Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, В. А. Топчий, Максимум критических процессов Гальтона–Ватсона и непрерывные слева случайные блуждания, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 1, 21–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1709>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:45:19

© 1997 г. ВАТУТИН В. А.* , ТОПЧИЙ В. А.**

МАКСИМУМ КРИТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ГАЛЬТОНА-ВАТСОНА И НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛЕВА СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ¹⁾

Пусть $Z(n)$, $n = 0, 1, \dots$, — критический ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона, $Z(0) = 1$. При слабых ограничениях на распределение $Z(1)$ доказано, что

$$E \max_{1 \leq k \leq n} Z(k) \sim \log n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ключевые слова и фразы: критический ветвящийся процесс, максимум ветвящегося процесса, неравенство Барр-Эссена, непрерывное слева случайное блуждание.

Пусть $Z(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, — критический ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона, $Z(0) = 1$. Обозначим через ν случайную величину, распределение которой совпадает с распределением числа непосредственных потомков отдельной частицы процесса. Будем предполагать, что производящая функция $f(s) = Es^\nu = \sum_{k=0}^{\infty} f_k s^k$ удовлетворяет условиям:

$$f'(1) = 1, \quad f''(1) > 0. \quad (1)$$

Положим

$$M(n) = \max_{0 \leq k \leq n} Z(k), \quad M = \max_n M(n).$$

Известно, что в критическом случае $M < \infty$ с вероятностью 1, в то время как $EM = \infty$, и поэтому представляет интерес исследование асимптотического поведения $EM(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Свойства этой величины изучались многими авторами (см. [1]–[6]). В частности, в [1] доказано, что если $f''(1) < \infty$, то

$$EM(n) \sim \log n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

*Математический институт им. В. А. Стеклова, ул. Вавилова, 42, 117966 Москва, ГСП-1, Россия.

**Институт информационных технологий и прикладной математики СО РАН, ул. Певцова, 13, 644099 Омск, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 96-01-00091, 96-01-00338, а также INTAS-RFBR 95-0099.

Этот результат был обобщен в [2], где показано, что соотношение (2) остается справедливым, если $f(s)$ имеет вид

$$f(s) = s + (1-s)^{1+\alpha} L(1-s), \quad (3)$$

где $0 < \alpha \leq 1$, а функция $L(x)$ медленно меняется при $x \rightarrow +0$. Независимость асимптотического поведения $EM(n)$ при $n \rightarrow \infty$ от конкретного значения α позволяет надеяться, что соотношение (2) верно при условиях, более слабых, чем (3). Доказываемая ниже теорема 1 подтверждает эту гипотезу.

Положим

$$F_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} f_j, \quad \mathcal{F}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k s^k.$$

Очевидно, что

$$(1 - \mathcal{F}(s))(1-s) = f(s) - s.$$

Теорема 1. Если $f'(1) = 1$ и существует такая постоянная $c > 1$, что

$$\liminf_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \mathcal{F}(1 - cy)}{1 - \mathcal{F}(1 - y)} = l > 1, \quad (4)$$

то справедливо соотношение (2).

З а м е ч а н и е 1. Условие (4) исключает из рассмотрения (среди прочих) функции вида $f(s) = s + (1-s)L(1-s)$, где $L(x)$ медленно меняется при $x \rightarrow +0$.

З а м е ч а н и е 2. Как показано в [7], условие (4) влечет за собой существование такого $\delta > 0$, что при всех $\beta > 0$ и $0 < \beta y < 1$

$$\min \{\beta^\delta, \beta\} \leq \frac{1 - \mathcal{F}(1 - \beta y)}{1 - \mathcal{F}(1 - y)} \leq \max \{\beta^\delta, \beta\}.$$

Это, в частности, означает, что найдутся такие числа c_1 и $\delta > 0$, что

$$1 - \mathcal{F}(1 - y) \leq c_1 y^\delta, \quad y \in [0, 1].$$

Доказательство теоремы 1 основано на следующем утверждении, полученном в [2].

Лемма 1 [2]. Для любых $t > 0$ и $n = 0, 1, 2, \dots$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} -tP\{Z(n) > 0\} &\leq EM(n) - \int_0^t P\{M > x\} dx \\ &\leq \int_t^\infty P\{M(n) > x\} dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Для применения леммы 1 нам понадобится описание естественной связи между абсолютным максимумом $Z(n)$ и максимумом некоторого непрерывного слева случайного блуждания.

Пусть ξ_t ($t = 1, 2, \dots$) — независимые случайные величины, каждая из которых распределена так же, как и случайная величина $\xi = \nu - 1$, и, следовательно, имеет нулевое среднее.

Положим

$$S(0) = 1, \quad S(t) = S(t-1) + \xi_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Как известно из [4], процесс $Z(n)$ можно вложить в случайное блуждание $S(t)$. Для этого достаточно взять $V(-1) = 0$ и положить

$$Z(n) = S(V(n-1)), \quad V(n) = \sum_{k=0}^n Z(k). \quad (7)$$

Очевидно, что $V(n), n = 0, 1, 2, \dots$, — моменты остановки случайного блуждания $S(t)$. Пусть

$$S^*(t) = S(t \wedge \tau), \quad \tau = \min \{k: S(k) = 0\}; \quad (8)$$

нетрудно проверить, что

$$M^* = \max_t S^*(t) \geq M.$$

Кажется весьма правдоподобным, что в случае $E\xi = 0$ случайная величина M^* не может быть «существенно больше», чем M . Это подтверждается следующей леммой, доказанной в [2].

Лемма 2 [2]. Для любого критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона $Z(n)$ существует такая функция $\epsilon = \epsilon(x)$, что $\epsilon(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и

$$(1 - \epsilon) P \{M^* > (1 + \epsilon)x\} \leq P \{M > x\} \leq P \{M^* > x\}. \quad (9)$$

Прежде чем применять лемму 2, введем несколько новых понятий.

Для $\theta = \min\{t > 0: S^*(t) \neq 1\}$ положим

$$b_0 = P \{S^*(\theta) = 0\} = \frac{P \{\nu = 0\}}{P \{\nu = 0\} + P \{\nu > 1\}} = f_0(1 - f_1)^{-1}$$

и

$$b_1 = 0, \quad b_k = P \{S^*(\theta) = k\} = f_k(1 - f_1)^{-1}, \quad k > 1.$$

Ввиду (1) справедливо соотношение

$$ES^*(\theta) = E\{\nu \mid \nu \neq 1\} = 1.$$

Обозначим

$$T(n) = \# \{t: S^*(t) = n + 1, S^*(t + 1) = n\}.$$

Формулируемая ниже лемма является простым следствием определения $T(n)$, строго марковского свойства $S^*(n)$ и того факта, что рассматриваемое случайное блуждание непрерывно слева. Поэтому мы опускаем ее доказательство.

Лемма 3. *Справедливо представление*

$$T(n) = I\{S^*(\theta) > n\} \left(1 + \sum_{m=1}^n T_n(m)\right) + \sum_{k=2}^n I\{S^*(\theta) = k\} \sum_{m=n-k+1}^n T_k(m), \quad n > 1, \quad (10)$$

в котором $T_k(m) \stackrel{d}{=} T(m)$, $m = n - k + 1, n - k + 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, n$, и случайные величины $T_k(m)$ независимы в совокупности.

З а м е ч а н и е 3. Очевидно, что

$$Q(n) \equiv P\{T(n) > 0\} = P\{M^* > n\}.$$

Далее, пусть

$$P(n, s) = E s^{T(n)}, \quad B_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j.$$

Из леммы 3 следует, что

$$\begin{aligned} P(n, s) &= b_0 + \sum_{k=2}^n b_k E[s^{T(n)} | S^*(\theta) = k] + B_n E[s^{T(n)} | S^*(\theta) > n] \\ &= b_0 + \sum_{k=2}^n b_k \prod_{m=n-k+1}^n P(m, s) + B_n s \prod_{m=1}^n P(m, s). \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть $P(n) = P(n, 0)$ и $Q(n) = 1 - P(n)$. Наша ближайшая цель — изучить асимптотическое поведение $Q(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Положим

$$\mathcal{H}(n+1, n) = 1 \quad \text{и} \quad \mathcal{H}(j, n) = \prod_{m=j}^n P(m) \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Заметим, что

$$\mathcal{H}(m+1, n) - \mathcal{H}(m, n) = Q(m) \mathcal{H}(m+1, n).$$

Согласно (11)

$$\begin{aligned}
 Q(n) &= \sum_{k=2}^n b_k \left(1 - \prod_{m=n-k+1}^n P(m) \right) + B_n \\
 &= \sum_{k=2}^n b_k \sum_{m=n-k+1}^n (\mathcal{H}(m+1, n) - \mathcal{H}(m, n)) + B_n \\
 &= \sum_{k=2}^n b_k \sum_{m=n-k+1}^n Q(m) \mathcal{H}(m+1, n) + B_n \\
 &= \sum_{m=1}^n Q(m) \mathcal{H}(m+1, n) \sum_{k=n-m+1}^n b_k + B_n \\
 &= \sum_{m=1}^n Q(m) \mathcal{H}(m+1, n) (B_{n-m} - B_n) + B_n \\
 &= \sum_{m=1}^n Q(m) \mathcal{H}(m+1, n) B_{n-m} + B_n \left(1 - \sum_{m=1}^n Q(m) \mathcal{H}(m+1, n) \right) \\
 &= \sum_{m=1}^n Q(m) \mathcal{H}(m+1, n) B_{n-m} + B_n \mathcal{H}(1, n). \tag{12}
 \end{aligned}$$

Пусть $\Pi(0) = 1$ и для $n \geq 1$

$$\Pi(n) = (\mathcal{H}(1, n))^{-1}, \quad R(n) = \Pi(n) Q(n).$$

Заметим, что ввиду соотношения

$$P(n) = \mathbf{P}\{M^* < n\} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

которое вытекает, например, из леммы 2,

$$R(n) = \frac{\Pi(n+1) - \Pi(n)}{P(n)} \sim \Pi(n+1) - \Pi(n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \tag{13}$$

Из (12) легко следует, что

$$R(n) = \sum_{m=1}^n B_{n-m} R(m) + B_n. \tag{14}$$

Положим $R(0) = 1$ и обозначим

$$\mathcal{R}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} R(j) s^j, \quad \mathcal{B}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j s^j.$$

Заметим, что

$$\mathcal{B}(s) = B_0 + \sum_{j=1}^{\infty} B_j s^j = B_0 + (1 - f_1)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} F_j s^j = B_0 + (1 - f_1)^{-1} (\mathcal{F}(s) - F_0)$$

и

$$1 - \mathcal{B}(s) = (1 - f_1)^{-1} (1 - \mathcal{F}(s)).$$

Умножая обе части (14) на s^n и суммируя по n от 1 до ∞ , находим, что

$$\mathcal{R}(s) - 1 = (\mathcal{R}(s) - 1) \mathcal{B}(s) + \mathcal{B}(s) - B_0.$$

Последнее равенство немедленно влечет за собой представление

$$\mathcal{R}(s) = \frac{1 - B_0}{1 - \mathcal{B}(s)} = \frac{1 - F_0}{1 - \mathcal{F}(s)} = \frac{f_0}{1 - \mathcal{F}(s)}. \quad (15)$$

Зададим функцию τ_x , $x > 1$, соотношением

$$x^{-1} = 1 - \mathcal{F}(1 - \tau_x) \quad (16)$$

и положим $t_x = \tau_x^{-1}$.

Лемма 4. Пусть $\mathcal{F}(s)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда

$$\sum_{i=0}^{[t_n]} Q(i) = \sum_{i=0}^{[t_n]} \mathbf{P} \{M^* > i\} \sim \log n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы ложно, и пусть $\mathcal{N}_1$ — такое подмножество натуральных чисел, что

$$(\log n)^{-1} \sum_{i=0}^{[t_n]} Q(i) \rightarrow c_0 \neq 1, \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathcal{N}_1. \quad (17)$$

Как показано в [2],

$$\mathbf{P} \{M^* > x\} \leq x^{-1}, \quad (18)$$

поэтому $c_0 < \infty$.

Нетрудно проверить, что

$$\mathcal{R}^*(\lambda) = (1 - e^{-\lambda}) \frac{\mathcal{R}(e^{-\lambda})}{\lambda} \quad (19)$$

является преобразованием Лапласа меры, плотность которой равна $\rho(u) = R(n)$ при $u \in [n, n+1)$ (см. [8, гл. XIII, § 5]).

По обобщенной теореме непрерывности [8, гл. XIII, § 1] существует такое подмножество $\mathcal{N}_2 \subseteq \mathcal{N}_1$, что для всех $\lambda \geq 0$

$$\psi_n(\lambda) \equiv \frac{\mathcal{R}^*(\lambda \tau_n)}{\mathcal{R}^*(\tau_n)} \rightarrow \psi(\lambda), \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathcal{N}_2,$$

где предельная функция $\psi(\lambda)$ конечна по крайней мере при $\lambda > 1$ и является преобразованием Лапласа некоторой меры Δ .

Очевидно, что функция $(1 - \mathcal{F}(s))/(1 - s)$ монотонно возрастает по s при $s \rightarrow 1$, поэтому при всех $0 < x \leq y < 1$

$$\frac{(1 - \mathcal{F}(1 - y))x}{(1 - \mathcal{F}(1 - x))y} \leq 1.$$

Следовательно, функция

$$\psi_n(\lambda) = \frac{\mathcal{R}^*(\lambda\tau_n)}{\mathcal{R}^*(\tau_n)} = \frac{1(1 - \mathcal{F}(e^{-\tau_n}))(1 - e^{-\lambda\tau_n})}{\lambda(1 - \mathcal{F}(e^{-\lambda\tau_n}))(1 - e^{-\tau_n})}$$

такова, что для каждого $\lambda > 0$

$$\min\{1, \lambda^{-1}\} \leq \psi_n(\lambda) \leq \max\{1, \lambda^{-1}\}.$$

Поэтому при всех $\lambda > 0$

$$\min\{1, \lambda^{-1}\} \leq \psi(\lambda) \leq \max\{1, \lambda^{-1}\}$$

и, таким образом, величина $\Delta(x) \equiv \Delta([0, x])$ конечна и положительна при всех $x \in (0, \infty)$, так как в противном случае $\psi(\lambda)$ была бы либо бесконечной при любом $\lambda > 0$, либо экспоненциально убывающей при $\lambda \rightarrow \infty$.

Применяя еще раз обобщенную теорему непрерывности и соотношения (16) и (19), получаем, что

$$\frac{1}{n} \int_0^{x\tau_n} \rho(u) du \rightarrow \Delta(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathcal{N}_2, \quad (20)$$

в каждой точке непрерывности Δ .

Покажем, что Δ непрерывна всюду на $(0, \infty)$. В самом деле, для любой точки $a \in (0, \infty)$ и произвольного малого $\varepsilon > 0$ существуют точки непрерывности y и w меры Δ такие, что $y < a < w$ и $wy^{-1} < 1 + \varepsilon$. Ясно, что

$$0 \leq \Delta(w) - \Delta(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{y\tau_n}^{w\tau_n} \rho(u) du.$$

Ввиду (13)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_{y\tau_n}^{w\tau_n} \rho(u) du &\leq \frac{2}{n} (\Pi([w\tau_n] + 1) - \Pi([y\tau_n])) \\ &= \frac{2}{n} \Pi([w\tau_n] + 1) \left(1 - \prod_{j=[y\tau_n]+1}^{[w\tau_n]+1} (1 - Q(j)) \right) \\ &\leq \frac{2}{n} \Pi([w\tau_n] + 1) \sum_{j=[y\tau_n]+1}^{[w\tau_n]+1} Q(j) \end{aligned}$$

для всех достаточно больших n и, кроме того, найдется такое T , что при $wt_n \geq T$

$$\int_T^{wt_n} \rho(u) du \geq \frac{2}{3} \sum_{j=T+1}^{[wt_n]} (\Pi(j) - \Pi(j-1)).$$

Отсюда и из (20) следует, что при всех достаточно больших n

$$\Pi([wt_n] + 1) \leq 2\Delta(w)n = Kn.$$

Вспоминая (18), получаем, что при всех достаточно больших n

$$\frac{1}{n} \int_{yt_n}^{wt_n} \rho(u) du \leq 2K \sum_{j=[yt_n]}^{[wt_n]} Q(j) \leq 3K \log \frac{w}{y} \leq 3K \log(1 + \varepsilon).$$

Таким образом, мера Δ непрерывна в каждой точке положительной оси и, в частности, при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}_2$

$$\int_0^{t_n} \rho(u) du \sim n\Delta(1) \sim \sum_{k=0}^{[t_n]} R(k) \sim \sum_{k=0}^{[t_n]} (\Pi(k+1) - \Pi(k)).$$

Итак,

$$\Pi([t_n]) \sim n\Delta(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathcal{N}_2.$$

Поскольку

$$\Pi(M) = \prod_{i=1}^M (1 - Q(i))^{-1},$$

из предыдущего соотношения, неравенств

$$e^x \leq (1-x)^{-1} = 1+x+x^2(1-x)^{-1} \leq 1+x+2x^2 \leq e^{x+2x^2},$$

справедливых при $0 < x \leq 1/2$, замечания 3 и оценки (18) легко следует, что

$$\sum_{i=0}^{[t_n(j)]} Q(i) \sim \log n(j), \quad j \rightarrow \infty.$$

Последнее противоречит (17). Лемма 4 доказана.

Лемма 5. В условиях теоремы 1

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-1} EM(n) \geq 1.$$

Доказательство. Из лемм 4, 1 и 2 следует, что для доказательства утверждения леммы достаточно показать, что

$$t_n P \{Z(n) > 0\} = o(\log n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Последняя оценка верна в силу того, что в условиях теоремы 1

$$P\{Z(n) > 0\} \asymp \tau_n = t_n^{-1}$$

(см. [7]), где запись $c_n \asymp d_n$ означает, что

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{d_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{d_n} < \infty.$$

Лемма 5 доказана.

Чтобы оценить $EM(n)$ сверху, нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Будем называть функцию $H(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, *слабо выпуклой*, если она удовлетворяет условиям:

- 1) $H(x)$ — выпуклая четная функция;
- 2) $H(0) = 0$ и $H(x)$ не убывает на $(0, +\infty)$;
- 3) $H(x)$ дифференцируема всюду, кроме, быть может, точки $x = 0$, в которой $\lim_{x \rightarrow +0} H'(x) = H'(+0)$ существует (и, в силу выпуклости, конечен);
- 4) $H'(x)$ — вогнутая функция на $(0, +\infty)$.

Очевидно, что при $r \in [1, 2]$ функция $H(x) = |x|^r$ слабо выпукла.

Теорема 2. Пусть $H(x)$ — слабо выпуклая функция, последовательность $W_0 = 0, W_1, W_2, \dots, W_n$ является мартингалом, и пусть $X_k = W_k - W_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$, обозначают соответствующие мартингал-разности. Если $EH(X_k) < \infty$, $k = 1, 2, \dots, n$, то

$$EH(W_n) \leq 4 \sum_{k=1}^n EH(X_k). \quad (21)$$

З а м е ч а н и е 4. В случае $H(x) = |x|^r$, $1 \leq r \leq 2$, данная теорема (с постоянной 2 вместо 4 в правой части (21)) была получена в работе [9]. Наше доказательство во многом близко к рассуждениям, использованным в упомянутой работе.

Мы разобьем доказательство теоремы 2 на несколько этапов.

Лемма 6. Если $H(x)$ — слабо выпуклая функция, то для всех $x, y \in (-\infty, +\infty)$

$$H(x+y) + H(x-y) \leq 2(H(x) + H(y)). \quad (22)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай $x > y > 0$. Для фиксированного $h > 0$ положим

$$r(h, x) = H'(x+h) - H'(x), \quad x > 0.$$

Так как $H'(x)$ вогнута, то

$$r(h, x) \leq r(h, 0) = H'(h) - H'(+0) \leq H'(h).$$

Следовательно, для $x \geq h$

$$H'(x+h) - H'(x-h) \leq 2H'(h).$$

Интегрируя полученное неравенство по h от 0 до y , приходим к (22).

Лемма 7. Пусть $H(x)$ — слабо выпуклая функция, а X и Y — такие случайные величины, что $EH(X) < \infty$ и $EH(Y) < \infty$. Если условное распределение Y относительно X симметрично, то

$$EH(X+Y) \leq EH(X) + EH(Y).$$

Доказательство. В силу условий леммы

$$EH(X+Y) = EE(H(X+Y) | X) = EE(H(X-Y) | X) = EH(X-Y),$$

что ввиду (22) немедленно влечет за собой утверждение леммы.

Лемма 8. Пусть $H(x)$ — выпуклая функция, а X и Y — такие случайные величины, что $EH(X) < \infty$ и $EH(Y) < \infty$. Если $E(Y|X) = 0$ почти наверное, то

$$EH(X+Y) \geq EH(X).$$

Доказательство. В силу неравенства Йенсена

$$\begin{aligned} EH(X) &= EH(X + E(Y | X)) = EH(E(X+Y | X)) \\ &\leq EE(H(X+Y) | X) = EH(X+Y). \end{aligned}$$

Лемма 9. Пусть $H(x)$ — слабо выпуклая функция, X — такая случайная величина, что $EX = 0$ и $EH(X) < \infty$. Тогда

$$4^{-1}EH(X - X') \leq EH(X) \leq EH(X - X'),$$

где случайная величина X' имеет то же распределение, что и X , и не зависит от X .

Доказательство. Оценка сверху следует из леммы 8. Оценка снизу может быть получена из неравенств

$$4EH(X) \geq EH(X + X') + EH(X - X') \geq EH(X - X'),$$

в которых использована неотрицательность функции $H(x)$ и оценка (22).

Доказательство теоремы 2. Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ утверждение теоремы очевидно.

Зафиксируем теперь произвольное $m > 1$ и введем случайную величину X'_{m+1} , условное распределение которой относительно W_m совпадает с таким же условным распределением X_{m+1} , причем указанная пара случайных величин независима при фиксации W_m .

Ввиду лемм 8, 7 и левой части неравенства леммы 9 справедлива цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{E}H(W_{m+1}) &= \mathbf{E}H(W_m + X_{m+1}) \leq \mathbf{E}H(W_m + X_{m+1} - X'_{m+1}) \\ &\leq \mathbf{E}H(W_m) + \mathbf{E}H(X_{m+1} - X'_{m+1}) \\ &\leq \mathbf{E}H(W_m) + 4\mathbf{E}H(X_{m+1}), \end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы 2.

Для любого фиксированного $\varepsilon \in (0, 1)$ положим

$$K(\varepsilon, x) = (1 - \mathcal{F}(1 - x^{-1}))^{-1+\varepsilon}.$$

Очевидно, что $K(\varepsilon, x)$ монотонно возрастает, а $K(\varepsilon, x)x^{-1+\varepsilon}$ монотонно убывает по x . Кроме того, согласно замечанию 2 найдется такое $\delta > 0$, что

$$K(2\varepsilon, x) \leq K(\varepsilon, x)x^{-\delta\varepsilon}.$$

Положим

$$H(\varepsilon, x) = I\{x \geq 1\} \int_1^x du \int_1^u dv \int_v^\infty \frac{K(2\varepsilon, z)}{z^2} dz$$

при $x \geq 0$ и $H(\varepsilon, x) = H(\varepsilon, -x)$ при $x < 0$. Так как $H(\varepsilon, x)$ — четная функция, ниже мы рассматриваем только положительные значения x .

Для $0 < v \leq x$ имеем

$$\begin{aligned} \int_v^\infty \frac{K(2\varepsilon, z)}{z^2} dz &= \int_v^\infty \frac{K(2\varepsilon, z)}{z^{1-2\varepsilon}} \frac{1}{z^{1+2\varepsilon}} dz \leq \frac{K(2\varepsilon, v)}{v^{1-2\varepsilon}} \int_v^\infty \frac{1}{z^{1+2\varepsilon}} dz \\ &= \frac{K(2\varepsilon, v)}{2\varepsilon v} \leq \frac{K(\varepsilon, x)}{2\varepsilon v^{1+\delta\varepsilon}}, \end{aligned}$$

и, следовательно, $H(\varepsilon, x)$ определена корректно. Очевидно, что функция $H(\varepsilon, x)$ слабо выпукла.

Лемма 10. Для любого $\varepsilon \in (0, 2^{-1})$ существует такая постоянная $c(\varepsilon) > 0$, что

$$H(\varepsilon, x) \geq c(\varepsilon)xK(2\varepsilon, x)$$

для всех $x > 2$.

Доказательство. Так как $K(2\varepsilon, x)x^{-1+2\varepsilon}$ не возрастает по x , то при $x \geq 2$ и некотором $c > 0$

$$\begin{aligned} H(\varepsilon, x) &\geq \int_1^x du \int_1^u \frac{K(2\varepsilon, v)}{v} dv \geq \frac{K(2\varepsilon, x)}{x^{1-2\varepsilon}} \int_1^x du \int_1^u \frac{1}{v^{2\varepsilon}} dv \\ &\geq \frac{K(2\varepsilon, x)}{x^{1-2\varepsilon}} \int_1^x du \int_1^u \frac{1}{v^{2\varepsilon}} dv \geq \frac{c}{(1-2\varepsilon)(2-2\varepsilon)} xK(2\varepsilon, x), \end{aligned}$$

что доказывает лемму.

Лемма 11. В условиях теоремы 1

$$EH(\varepsilon, Z(1)) < \infty$$

для всех $\varepsilon \in (0, 2^{-1})$.

Доказательство. Используя определение функции $H(\varepsilon, x)$ и теорему о среднем, нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} EH(\varepsilon, Z(1)) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k H(\varepsilon, k) = \sum_{k=1}^{\infty} (F_{k-1} - F_k) H(\varepsilon, k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} F_k (H(\varepsilon, k+1) - H(\varepsilon, k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} F_k H'(\varepsilon, k+1). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$H'_k(\varepsilon, k) = \int_1^k dv \int_v^{\infty} \frac{K(2\varepsilon, z)}{z^2} dz \leq \int_1^k \frac{K(\varepsilon, v)}{2\varepsilon v^{1+\delta\varepsilon}} dv \leq c_1(\varepsilon) K(\varepsilon, k).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} 1 - \mathcal{F}(1 - k^{-1}) &= \sum_{j=1}^{\infty} F_j (1 - (1 - k^{-1})^j) \\ &\geq \sum_{j=\lfloor k/2 \rfloor}^k F_j (1 - (1 - k^{-1})^j) \geq c_2 k F_k \end{aligned}$$

для некоторой положительной константы c_2 и достаточно больших k .

Отсюда, ввиду замечания 2, сопровождающего теорему 1, вытекает, что

$$\begin{aligned} EH(\varepsilon, Z(1)) &\leq c_3(\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} K(\varepsilon, k) (1 - \mathcal{F}(1 - k^{-1})) k^{-1} \\ &= c_3(\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \mathcal{F}(1 - k^{-1}))^\varepsilon k^{-1} < \infty. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 12. В условиях теоремы 1

$$EH(\varepsilon, Z(n)) \leq 16nEH(\varepsilon, Z(1)).$$

Доказательство. Приводимые ниже рассуждения используют схему доказательства леммы 2 из [2].

Положим $X_0 = 1$ и обозначим $X_k = Z(k+1) - Z(k)$, $k \geq 1$, $W_m = \sum_{k=0}^m X_k = Z(m+1)$.

Ввиду (1) $E(X_{m+1} | W_m) = 0$, $m = 1, 2, \dots, n-1$.

Мы знаем, что $H(\varepsilon, x)$ слабо выпукла, поэтому, согласно теореме 2,

$$\mathbf{E}H(\varepsilon, Z(n)) \leq 4 \sum_{k=0}^n \mathbf{E}H(\varepsilon, X_k). \quad (23)$$

В соответствии с определением ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона

$$X_k = Z(k+1) - Z(k) = \sum_{i=1}^{Z(k)} \xi_i,$$

где ξ_i — независимые случайные величины, каждая из которых распределена так же, как $\xi = \nu - 1$.

Поскольку $\mathbf{E}\xi = 0$, мы можем еще раз применить теорему 2 и получить

$$\mathbf{E}(H(\varepsilon, X_k) | Z(k)) \leq 4Z(k) \mathbf{E}H(\varepsilon, \xi) \leq 4Z(k) \mathbf{E}H(\varepsilon, Z(1)),$$

что в сочетании с (1) приводит к неравенству

$$\mathbf{E}H(\varepsilon, X_k) \leq 4 \mathbf{E}(Z(k) \mathbf{E}H(\varepsilon, Z(1))) = 4 \mathbf{E}H(\varepsilon, Z(1)).$$

Объединение этой оценки с (23) доказывает лемму.

Лемма 13. В условиях теоремы 1

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-1} \mathbf{E}M(n) \leq 1.$$

Доказательство. Так как $Z(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, — мартингал, а функция $H(\varepsilon, x)$ выпукла для каждого фиксированного $\varepsilon \in (0, 2^{-1})$, то последовательность $H(\varepsilon, Z(n))$, $n = 0, 1, \dots$, является субмартингалом.

Мы знаем также, что $H(\varepsilon, x)$ — возрастающая функция для $x > 0$. Поэтому

$$\mathbf{P}\{M(n) > x\} = \mathbf{P}\{H(\varepsilon, M(n)) \geq H(\varepsilon, x)\} \leq \frac{\mathbf{E}H(\varepsilon, Z(n))}{H(\varepsilon, x)} \quad (24)$$

или, в силу лемм 12 и 10,

$$\mathbf{P}\{M(n) > x\} \leq c_3(\varepsilon) n(xK(2\varepsilon, x))^{-1}. \quad (25)$$

Используя замечание 2 и монотонность $K(2\varepsilon, x)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_t^\infty (xK(2\varepsilon, x))^{-1} dx &= \int_t^\infty x^{-1} (1 - \mathcal{F}(1 - x^{-1}))^{1-2\varepsilon} dx \\ &\leq (1 - \mathcal{F}(1 - t^{-1}))^{1-3\varepsilon} \int_t^\infty x^{-1} (1 - \mathcal{F}(1 - x^{-1}))^\varepsilon dx \\ &\leq (\delta\varepsilon)^{-1} (1 - \mathcal{F}(1 - t^{-1}))^{1-3\varepsilon} t^{-\delta\varepsilon}. \end{aligned}$$

Комбинируя эту оценку с (24) и (25), приходим к неравенству

$$U(t) \equiv \int_t^\infty \mathbf{P}\{M(n) > x\} dx \leq c_4(\varepsilon) n(1 - \mathcal{F}(1 - t^{-1}))^{1-3\varepsilon}.$$

Зафиксируем $s > 0$ и, в соответствии с (16), положим $1 - \mathcal{F}(1 - \tau_{n^{1+s}}) = n^{-1-s}$ и $t_{n^{1+s}} = (\tau_{n^{1+s}})^{-1}$.

Очевидно, что

$$U(t_{n^{1+s}}) \leq c_4(\varepsilon) n^{1-(1-3\varepsilon)(1+s)}. \quad (26)$$

Согласно лемме 1 и соотношению (9)

$$\mathbf{E}M(n) \leq \int_0^t \mathbf{P}\{M^* > x\} dx + U(t). \quad (27)$$

Возьмем в этом соотношении $t = t_{n^{1+s}}$ и выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство $(1 - 3\varepsilon)(1 + s) > 1$. Применяя лемму 4 и используя (26) и (27), мы видим, что при указанном выборе t и ε

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-1} \mathbf{E}M(n) \leq 1 + s.$$

Так как $s > 0$ можно выбрать сколь угодно малым, это доказывает лемму.

Для завершения доказательства теоремы 1 достаточно скомбинировать леммы 5 и 13.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Athreya K. B. On the maximum sequence in a critical branching processes. — Ann. Probab., 1988, v. 16, p. 502–507.
2. Borovkov K. A., Vatutin V. A. On distribution tails and expectations of maxima in critical branching processes. — J. Appl. Probab., 1996 (to appear).
3. Kämmerle K., Schuh H.-J. The maximum in critical Galton–Watson and birth and deaths processes. — J. Appl. Probab., 1986, v. 23, p. 601–613.
4. Lindval T. On the maximum of a branching process. — Scand. J. Statist. Theory Appl., 1976, v. 3, p. 209–214.
5. Pakes A. G. On the maximum and absorption time of a left-continuous random walk. — J. Appl. Probab. 1978, v. 15, p. 292–299.
6. Weiner H. Moments of the maximum in a critical branching process. — J. Appl. Probab., 1984, v. 21, p. 920–923.
7. Топчий В. А. Свойства вероятности продолжения общих критических ветвящихся процессов при слабых ограничениях. — Сиб. матем. ж., 1987, т. 28, в. 5, с. 178–192.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. II. М.: Мир, 1984, 751 с.
9. von Bahr B., Esseen C.-G. Inequalities for the r -th moment of a sum of random variables, $1 \leq r \leq 2$. — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, p. 299–303.

Поступила в редакцию
11.IV.1996