Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. С. Аркашов, И. С. Борисов, А. А. Могульский,
Принцип больших уклонений для процессов част-
ных сумм скользящих средних, *Теория вероятн. и
ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 2, 209–239

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp171>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 10:27:46

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука

Том 52
Выпуск 2, 2007 год
апрель, май, июнь

© 2007 г. АРКАШОВ Н. С.*, БОРИСОВ И. С.,
МОГУЛЬСКИЙ А. А.*

ПРИНЦИП БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ЧАСТНЫХ СУММ СКОЛЬЗЯЩИХ СРЕДНИХ¹⁾

Исследована логарифмическая асимптотика вероятностей больших уклонений процессов частных сумм стационарно связанных наблюдений, имеющих структуру так называемых скользящих средних последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, в случае притяжения этого процесса к фрактальному броуновскому движению с произвольным параметром Хёрста.

Ключевые слова и фразы: процесс частных сумм скользящих средних, фрактальное броуновское движение, принцип больших уклонений, пространство Камерона–Мартина.

1. Введение и формулировка основных результатов

1.1. Принцип больших уклонений. Пусть $\mathbb{X}$ — сепарабельное банахово пространство с нормой $|x|$, $\mathcal{B}$ — σ -алгебра всех борелевских подмножеств $\mathbb{X}$. Функцию $I \equiv I(x)$, отображающую $\mathbb{X}$ в расширенную вещественную полуось $[0, \infty]$, называют *функционалом действия* в $\mathbb{X}$, если

1) I непрерывна снизу в каждой точке $x \in \mathbb{X}$, т.е.

$$\liminf_{x_n \rightarrow x} I(x_n) \geq I(x);$$

* Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: nicky1978@mail.ru, sibam@math.nsc.ru, mogul@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов: 05-01-00810 и 06-01-00738), ведомственной программы Гособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 8282) и гранта INTAS 03-51-5018.

2) при всех конечных $t \geq 0$ множество $\{x \in \mathbb{X}: I(x) \leq t\}$ компактно в $\mathbb{X}$.

Пусть заданы функционал действия I в $\mathbb{X}$, вещественная функция $r(u) \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow \infty$ и семейство вероятностных мер $\{Q_u\}_{u \geq 0}$ на $\mathcal{B}$. Говорят, что семейство $\{Q_u\}_{u \geq 0}$ удовлетворяет $(I, r(u))$ -принципу больших уклонений (ПБУ) в $\mathbb{X}$, если выполнены следующие два соотношения (см. [1]–[3]):

а) для любого замкнутого множества $U \subseteq \mathbb{X}$

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{r(u)} \ln Q_u(U) \leq - \inf_{x \in U} I(x),$$

б) для любого открытого множества $V \subseteq \mathbb{X}$

$$\liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{r(u)} \ln Q_u(V) \geq - \inf_{x \in V} I(x).$$

Для любого множества $A \in \mathcal{B}$ положим $I_0(A) := \inf_{x \in A} I(x)$. Легко видеть, что $I_0(\cdot)$ — монотонно убывающая функция множества, т.е. $I_0(A) \geq I_0(B)$ при $A \subseteq B$. В частности, если для некоторого $A \in \mathcal{B}$ имеет место равенство $I_0(A^o) = I_0(A^c)$ (включая случай бесконечных значений), где A^o и A^c — соответственно внутренность (т.е. объединение всех открытых подмножеств A) и замыкание A , то приведенные выше два неравенства влекут за собой равенство

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{r(u)} \ln Q_u(A) = -I_0(A).$$

Отметим также, что вышеупомянутое равенство $I_0(A^o) = I_0(A^c)$ вовсе не эквивалентно соотношению $I_0(A^c \setminus A^o) = 0$, что, очевидно, справедливо для мер. Для функции $I_0(\cdot)$ указанная эквивалентность возможна только в случае, когда $I_0(A^o) = I_0(A^c) = I_0(A^c \setminus A^o) = 0$.

Иногда нам удобно будет считать параметр u натуральным и говорить о последовательности Q_n вероятностных мер, удовлетворяющих $(I, r(n))$ -ПБУ в пространстве $\mathbb{X}$.

Если дана последовательность X_n случайных элементов со значениями в $\mathbb{X}$, то под словами «последовательность X_n удовлетворяет $(I, r(n))$ -ПБУ в $\mathbb{X}$ » будем понимать принцип больших уклонений для последовательности $Q_n(\cdot) := \mathbf{P}\{X_n \in \cdot\}$ соответствующих распределений.

Приведем теперь формулировку известного результата — ПБУ для центрированного гауссовского элемента γ со значениями в сепарабельном банаховом пространстве $\mathbb{X}$ (см. [4]–[6]). На сопряженном пространстве $\mathbb{X}^*$ определим скалярное произведение и норму по формулам

$$\langle l, h \rangle_* := \mathbf{E}l(\gamma)h(\gamma), \quad |l|_* := \langle l, l \rangle_*^{1/2}, \quad l, h \in \mathbb{X}^*.$$

Определим на пространстве $\mathbb{X}$ следующую функцию со значениями на расширенной полуоси $[0, \infty]$: $|x|_\gamma := \sup\{l(x) : l \in \mathbb{X}^*, |l|_* \leq 1\}$. Отметим, что если $\mathbb{X}$ гильбертово со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, то приведенная формула принимает следующий вид:

$$|x|_\gamma = \sup \{ \langle a, x \rangle : a \in \mathbb{X}, \mathbf{E} \langle a, \gamma \rangle^2 \leq 1 \}.$$

В общем случае, как нетрудно видеть, подмножество

$$K(\gamma) := \{x \in \mathbb{X} : |x|_\gamma < \infty\}$$

имеет структуру линейного нормированного пространства с нормой $|x|_\gamma$. Оно называется пространством Камерона–Мартина для распределения случайного элемента γ в $\mathbb{X}$. Из определения следует, что функция $J(x) := |x|_\gamma$, заданная на всем пространстве $\mathbb{X}$, непрерывна снизу, и, как доказано в [5] (см. также следствие 3.2.4 на с. 97 в [4]), единичный шар

$$\{x \in \mathbb{X} : J(x) \leq 1\}$$

является компактом в $\mathbb{X}$. Поэтому функция

$$I(x) := \frac{1}{2} |x|_\gamma^2 \tag{1}$$

является функционалом действия в $\mathbb{X}$. Следующее предложение доказано в [5] (см. также [4], [6]).

Предложение 1. Пусть γ — центрированный гауссовский элемент со значениями в сепарабельном банаховом пространстве $\mathbb{X}$. Тогда семейство $u^{-1}\gamma$ удовлетворяет (I, u^2) -ПБУ в пространстве $\mathbb{X}$, где функционал действия I определен в (1).

В качестве $\mathbb{X}$ мы будем рассматривать либо банахово пространство $C[0, 1]$ непрерывных функций $f \equiv f(t)$ с равномерной нормой

$$\|f\|_\infty := \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|,$$

либо гильбертово пространство $L_2[0, 1]$, в котором стандартным образом определяются скалярное произведение и евклидова норма:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t) g(t) dt, \quad \|f\|_2 := \langle f, f \rangle^{1/2},$$

либо банахово пространство $L_p[0, 1]$, $p \geq 1$, со стандартной нормой.

1.2. ПБУ для гауссовских процессов в $C[0, 1]$. Пусть теперь $\gamma(t)$ — произвольный центрированный гауссовский процесс с непрерывными на $[0, 1]$ траекториями и ковариационной функцией $R(t, s) := \mathbf{E} \gamma(t) \gamma(s)$, которая с необходимостью непрерывна на квадрате $[0, 1]^2$.

Рассмотрим ковариационный оператор $T^2: L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ введенного процесса $\gamma(t)$:

$$T^2 f(t) := \int_0^1 R(t, s) f(s) ds.$$

Сразу отметим, что T^2 является самосопряженным положительным линейным оператором, все собственные числа которого неотрицательны. Скажем, для стандартного винеровского процесса (т.е. в случае $R(t, s) = \min(t, s)$) этот оператор имеет вид

$$T^2 f(t) = t \int_t^1 f(s) ds + \int_0^t s f(s) ds,$$

а для вырожденного гауссовского процесса с ковариацией $R(t, s) = ts$

$$T^2 f = e_1 \langle e_1, f \rangle, \quad \text{где } e_1(t) = t.$$

Как известно, положительный интегральный оператор в $L_2[0, 1]$ с симметричным непрерывным на квадрате $[0, 1]^2$ ядром является вполне непрерывным. Причем совокупность его собственных функций $e_1(t), e_2(t), \dots$, отвечающих соответствующим *положительным* собственным значениям $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots$, образует ортонормированный базис в линейном подпространстве $\text{Im}(T^2) := \{g = T^2 f : f \in L_2[0, 1]\}$. Так как функции $\{e_k\}$ удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_k^2 e_k(t) = \int_0^1 R(t, s) e_k(s) ds, \quad k = 1, 2, \dots,$$

то в силу теоремы Лебега орты e_k непрерывны на $[0, 1]$.

Согласно теореме Гильберта–Шмидта, для любого $f \in L_2[0, 1]$ имеют место следующие представления (см., например, [7]):

$$f = f^* + g, \quad f^* := \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, f \rangle e_k, \quad (2)$$

где g принадлежит линейному подпространству $\text{Ker}(T^2)$ — ядру оператора T^2 и $\langle f^*, g \rangle = 0$. Таким образом,

$$T^2 f = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \langle e_k, f \rangle e_k;$$

при этом ряды в правых частях двух приведенных выше равенств сходятся в норме $\|\cdot\|_2$.

В рассматриваемом случае определен «квадратный корень» T из оператора T^2 по формуле

$$Tf := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle e_k, f \rangle e_k.$$

Очевидно, что T — тоже самосопряженный положительный линейный оператор с тем же набором собственных функций, что и у T^2 , причем $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(T^2)$. Заметим, что оператор T является интегральным, причем ядро этого оператора выписывается в явном виде (см. [8]). Введем в рассмотрение линейный оператор S , отображающий подпространство $\text{Im}(T)$ в $L_2[0, 1]$ по формуле

$$Sg := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \langle e_k, g \rangle e_k.$$

Отметим, что если $\text{Ker}(T)$ состоит только из нулевого элемента (т.е. T обратим, как, скажем, в случае стандартного винеровского процесса), то оператор S будет обратным для T . В общем же случае справедливо равенство $STf = STf^* = f^*$, где функция f^* определена в (2).

Далее, определим функцию

$$\Lambda(f) := \sup_{g \in L_2[0,1]} \left\{ \langle g, f \rangle - \frac{1}{2} \langle T^2 g, g \rangle \right\},$$

отображающую $L_2[0, 1]$ в расширенную полуось $[0, \infty]$. Будучи преобразованием Лежандра над функцией $\frac{1}{2} \langle T^2 g, g \rangle$, отображение $\Lambda(f)$ неотрицательно, непрерывно снизу и выпукло. Имеет место следующее представление (см. раздел 2):

$$\Lambda(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|Sf\|_2^2, & \text{если } f \in \text{Im}(T), \\ \infty & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3)$$

Поскольку $C[0, 1] \subset L_2[0, 1]$, то функция $\Lambda(f)$ определена и в пространстве $C[0, 1]$. В частности, для стандартного винеровского процесса функция $\Lambda(f)$ имеет вид (см. [9])

$$\Lambda(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 (f'(t))^2 dt, & \text{если } f(0) = 0 \text{ и } f(t) \text{ абсолютно непрерывна,} \\ \infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для упомянутого выше вырожденного гауссовского процесса с ковариацией $R(t, s) = ts$ имеем

$$\Lambda(f) = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{2}, & \text{если } f(t) = \alpha t, \\ \infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следующее утверждение будет доказано в разделе 2.

Предложение 2. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\text{Im}(T) = \{f \in L_2[0, 1]: \Lambda(f) < \infty\} \subseteq C[0, 1]. \quad (4)$$

При этом $\Lambda(f)$ совпадает с функцией $\frac{1}{2} |f|_\gamma^2$, построенной для гауссовского элемента γ по формуле (1) в пространствах $C[0, 1]$ и $L_p[0, 1]$ при всех $p \geq 1$. Поэтому $\Lambda(f)$ является функционалом действия в указанных банаховых пространствах.

Особый интерес для дальнейшего представляет случай, когда в качестве $\gamma(t)$ выступает так называемое фрактальное броуновское движение.

Напомним, что фрактальным (или дробным, см. [10]) броуновским движением с параметром Хёрста $H \in (0, 1]$ называется центрированный гауссовский случайный процесс $B_H \equiv B_H(t) \in C[0, 1]$ с ковариационной

функцией $R(t, s) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})$. Например, $B_{1/2}(t)$ представляет собой стандартный винеровский процесс, поскольку при $H = \frac{1}{2}$ имеет место равенство $R(t, s) = \min(t, s)$. При $H = 1$ имеет место равенство $R(t, s) = ts$, а соответствующий вырожденный гауссовский процесс, неоднократно упоминавшийся выше, имеет вид $B_1(t) = t\eta$, где η — случайная величина со стандартным нормальным распределением.

В качестве следствия из предложений 1, 2 получаем следующее предложение.

Предложение 3. Семейство $u^{-1}B_H$ удовлетворяет (Λ, u^2) -ПБУ в банаховых пространствах $C[0, 1]$ и $L_p[0, 1]$ при всех $p \geq 1$.

Всюду в дальнейшем, говоря о фрактальном броуновском движении, мы будем считать, что $H \in (0, 1)$. Тем самым мы исключаем из рассмотрения упомянутый выше вырожденный случай, т.е. одномерный гауссовский процесс $B_1(t)$.

1.3. ПБУ для процессов частных сумм скользящих средних. Обозначим символом $\mathbf{Z}$ множество всех целых чисел. Пусть $\{\xi_k; k \in \mathbf{Z}\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, для которых выполнено условие Крамера: существует такая положительная постоянная h , что

$$\mathbf{E} \exp(h|\xi_1|) < \infty. \quad (5)$$

Рассмотрим последовательность $\{a_k; k \in \mathbf{Z}\}$ вещественных чисел, удовлетворяющих условию

$$0 < \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k^2 < \infty. \quad (6)$$

Для этой последовательности построим последовательность случайных величин $\{Y_j; j \in \mathbf{Z}\}$, определенных по формуле

$$Y_j := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k} \xi_k. \quad (7)$$

Они называются *скользящими средними* исходной последовательности случайных величин $\{\xi_k; k \in \mathbf{Z}\}$. Легко видеть, что $\{Y_j; j \in \mathbf{Z}\}$ — стационарная в узком смысле последовательность случайных величин. При этом если последовательность $\{a_k\}$ содержит лишь один отличный от нуля элемент, то случайные величины $\{Y_j\}$ будут независимыми и одинаково распределенными. Отметим, что условие (6) гарантирует сходимость с вероятностью 1 ряда в (7).

Определим процесс частных сумм скользящих средних из (7):

$$S_0 := 0, \quad S_n := \sum_{i=1}^n Y_i, \quad n \geq 1.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} A_m &:= a_0 + \dots + a_m, & m \geq 0, \\ A_{-1} &:= 0, \\ A_m &:= -(a_{m+1} + \dots + a_{-1}), & m < -1, \end{aligned}$$

и заметим, что $S_n = \sum_{i \in \mathbb{Z}} A(n, i) \xi_i$, где $A(n, i) := A_{n-i} - A_{-i} = \sum_{j=1-i}^{n-i} a_j$. Всюду в дальнейшем предполагается, что $A(n, i)$ удовлетворяют следующему условию.

(I_H) Существует конечный ненулевой предел

$$\sigma^2 := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2H}} \mathbf{D}S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2H}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} A^2(n, i). \quad (8)$$

Обозначим через $Z_n(t)$ непрерывную случайную ломаную, построенную по точкам $(k/n, S_k/(\sigma n^H))$, $k = 0, 1, \dots, n$, где $H \in (0, 1)$. Эта случайная ломаная и будет основным объектом исследования настоящей работы. Отметим, что условие (8) обеспечивает слабую сходимость в пространстве $C[0, 1]$ ломаной Z_n к фрактальному броуновскому движению B_H (см. [11]).

Введем в рассмотрение еще одно условие, связывающее между собой последовательность $\{a_i\}$ и вышеприведенный параметр $H \in (0, 1)$ — показатель степени нормирующей последовательности в (8).

(II_H) Существует такая положительная постоянная $d > 0$, что для всех $n \geq 1$ и $l \geq 2$ имеют место соотношения

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} |A(n, i)|^l \leq d^{l+1} n^{(l-2)H^*} n^{2H}, \quad (9)$$

где $H^* = \max\{H - \frac{1}{2}, 0\}$.

Кроме того, нам понадобится следующее более жесткое, нежели (I_H) и (II_H), условие на коэффициенты $\{a_i\}$ и H . Отметим, что подобные условия содержатся в [12].

(III_H) Пусть для всех достаточно больших $|i|$ коэффициенты a_i монотонны; причем для некоторых постоянных $c \neq 0$ и $\delta > 0$ при $n \rightarrow \infty$ выполняются соотношения

$$|A_n - cn^{H-1/2}| + |A_{-n}| = O(n^{H-1/2-\delta}), \quad (10)$$

$$\left| a_n - c \left(H - \frac{1}{2} \right) n^{H-3/2} \right| + |a_{-n}| = O(n^{H-3/2-\delta}). \quad (11)$$

В п. 2.6 следующего раздела будет доказано

Предложение 4. Пусть $|a_n| = O(|n|^{H-3/2})$ и $|A_n| = O(|n|^{H-1/2})$ при $|n| \rightarrow \infty$. Тогда выполнено условие (II_H). При этом из условия (III_H) следуют условия (I_H) и (II_H); причем константа σ^2 из условия (I_H) имеет вид $c^2 L_H$, где $L_H = (2H)^{-1} + \int_0^\infty ((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 ds$, а константа c определена в условии (III_H).

Центральный результат настоящей работы состоит в следующем.

Теорема 1. Пусть $r(n) \rightarrow \infty$ и $r(n) = o(n^{\min\{1/2, H\}})$ при $n \rightarrow \infty$.

Тогда при выполнении условия (Π_H) последовательность

$$\frac{1}{r(n)} Z_n(\cdot)$$

удовлетворяет $(\Lambda, r^2(n))$ -ПБУ в пространствах $L_p[0, 1]$, $p \geq 1$, и $C[0, 1]$.

При этом в зоне уклонений $r(n)/\sqrt{\ln n} \rightarrow \infty$ и $r(n) = o(n^{\min\{1/2, H\}})$ утверждение теоремы сохраняется, если вместо условия (Π_H) одновременно выполнены условия (I_H) и (Π_H) .

З а м е ч а н и е. Для независимых одинаково распределенных слагаемых $\{Y_j\}$ (в этом случае из (8) с необходимостью следует равенство $H = \frac{1}{2}$) принцип больших уклонений для соответствующих случайных ломаных хорошо известен (см., например, [9], [13], [14]). Кроме того, для $H = \frac{1}{2}$ в [15] доказан принцип больших уклонений для несколько более общей, чем в теореме 1, последовательности стационарно связанных случайных величин $\{Y_j\}$.

2. Доказательство основных результатов

2.1. Схема доказательства ПБУ в $C[0, 1]$. Пусть задан центрированный гауссовский процесс $\gamma := \gamma(t)$ с ковариационной функцией $R(t, s)$ и траекториями из банахова пространства $C[0, 1]$. Пусть, кроме того, задана некоторая последовательность $X_n := X_n(t)$ случайных процессов в $C[0, 1]$, сходящихся по распределению к γ . При этом предполагается, что $X_n(0) = 0$ почти наверное. Через $\mathcal{R}$ обозначим некоторый класс числовых последовательностей, удовлетворяющих условию $r(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Обозначим через V множество всех конечных знакопеременных мер на σ -алгебре всех борелевских подмножеств отрезка $[0, 1]$. Выделим в V подмножество всех дискретных мер, имеющих конечное число атомов:

$$V_d := \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i \delta_{t_i} : t_i \in [0, 1] \text{ и } \lambda_i \in \mathbf{R}, i = 1, \dots, m, m \geq 1 \right\},$$

где δ_t — мера Дирака, т.е. единичная масса, сосредоточенная в точке $t \in \mathbf{R}$. Хорошо известно, что всякий элемент $l \in C[0, 1]^*$ можно представить в виде $l(f) = \int_0^1 f(t) \mu(dt)$, где $f \in C[0, 1]$ и $\mu \in V$. Такой элемент $l(\cdot)$ мы будем обозначать через $(\mu, \cdot)$.

Для всех $r(\cdot) \in \mathcal{R}$ и каждой меры $\mu \in V$ определим функционал

$$A_n(\mu) := \frac{1}{r^2(n)} \ln \mathbf{E} e^{r(n)(\mu, X_n)}.$$

Первый шаг доказательства ПБУ для последовательности X_n в $C[0, 1]$ состоит в установлении аналогичного ПБУ для всех конечномерных распределений процессов X_n . Следующее условие как раз и

призвано обеспечить выполнение $(I^{t_1, \dots, t_m}, r^2(n))$ -ПБУ в $\mathbf{R}^m$ для конечных проекций

$$\left(\frac{1}{r(n)} X_n(t_1), \dots, \frac{1}{r(n)} X_n(t_m) \right)$$

при всех $t_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, m$ (см. [3, с. 141]):

(A_1) для любой меры $\mu \in V_d$ и всех $r(\cdot) \in \mathcal{R}$ выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\mu) = R(\mu) := \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 R(t, s) \mu(dt) \mu(ds).$$

Второй шаг доказательства состоит в установлении так называемой экспоненциальной (сильной) плотности рассматриваемых распределений (см. [1]–[3]):

(A_2) для любого $\varepsilon > 0$ и всех $r(\cdot) \in \mathcal{R}$ выполняется соотношение

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2(n)} \ln \mathbf{P} \left\{ \omega \left(\frac{X_n(\cdot)}{r(n)}, \delta \right) \geq \varepsilon \right\} = -\infty,$$

где $\omega(f, \delta)$ — модуль непрерывности функции $f \in C[0, 1]$.

Заметим, что условия (A_2) и $X_n(0) = 0$ эквивалентны требованию, чтобы для каждого $r(\cdot) \in \mathcal{R}$ и любого $C < \infty$ существовал компакт $K \subset C[0, 1]$ со свойством (см. [3])

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2(n)} \ln \mathbf{P} \left\{ \frac{X_n(\cdot)}{r(n)} \notin K \right\} \leq -C.$$

Наконец, мы воспользуемся следующим утверждением.

Предложение 5. Пусть случайные процессы X_n удовлетворяют условиям (A_1) и (A_2). Тогда для любого $r(\cdot) \in \mathcal{R}$ последовательность $\{r(n)^{-1} X_n\}$ удовлетворяет $(\Lambda, r^2(n))$ -ПБУ в $C[0, 1]$ с функционалом действия Λ , определенным в предложении 2 для процесса γ .

Доказательство. Действительно, в силу условий (A_1) и (A_2) из теоремы А. А. Пухальского (см. [1]–[3]) следует, что $\{r(n)^{-1} X_n\}$ удовлетворяет $(I, r^2(n))$ -ПБУ в пространстве $C[0, 1]$, где

$$I(f) = \sup I^{t_1, \dots, t_m}(f(t_1), \dots, f(t_m)), \quad f \in C[0, 1]; \quad (12)$$

при этом супремум берется по всем наборам $(t_1, \dots, t_m)$, $t_i \in [0, 1]$, и всем натуральным m . Далее заметим, что для аналога величины $A_n(\mu)$, заданной для процесса γ , справедливо следующее тождество по n :

$$\frac{1}{r^2(n)} \ln \mathbf{E} e^{r(n)(\mu, \gamma)} \equiv R(\mu),$$

поскольку случайная величина (μ, γ) имеет центрированное нормальное распределение с дисперсией $2R(\mu)$. Это означает, что $\gamma_n \equiv \gamma$ удовлетворяет условию (A_1). Поэтому два семейства m -мерных векторов

$$\left(\frac{1}{r(n)} X_n(t_1), \dots, \frac{1}{r(n)} X_n(t_m) \right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{1}{r(n)} \gamma(t_1), \dots, \frac{1}{r(n)} \gamma(t_m) \right)$$

удовлетворяют $(I^{t_1, \dots, t_m}, r^2(n))$ -ПБУ в пространстве $\mathbf{R}^m$ с общим функционалом действия $I^{t_1, \dots, t_m}$ для любых $t_i \in [0, 1]$ и $m \geq 1$. Кроме того, в силу предложения 2 гауссовский процесс $r(n)^{-1}\gamma$ удовлетворяет $(\Lambda, r^2(n))$ -ПБУ в $C[0, 1]$, а в силу упомянутой теоремы А. А. Пухальского и представления (12) имеет место равенство

$$\Lambda(f) = I(f) \quad \text{при всех } f \in C[0, 1].$$

Предложение доказано.

2.2. Доказательство предложения 2. Покажем, что для всех $f \in L_2[0, 1]$ на расширенной полуоси $[0, \infty]$ выполняется равенство

$$\Lambda(f) = \frac{1}{2} |f|_\gamma^2. \quad (13)$$

Напомним, что $\Lambda(f) := \sup_{g \in L_2[0, 1]} \{ \langle g, f \rangle - \frac{1}{2} \langle T^2 g, g \rangle \}$ — преобразование Лежандра над функцией $\frac{1}{2} \langle T^2 g, g \rangle$. Нетрудно проверить, что для любых фиксированных $f \in L_2[0, 1]$ и $g \notin \text{Ker}(T)$ имеет место равенство

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \left\{ \langle tg, f \rangle - \frac{1}{2} \langle T^2 tg, tg \rangle \right\} = \sup_{\{t: \|Ttg\|_2 \leq 1\}} \left\{ \frac{1}{2} \langle tg, f \rangle^2 \right\}.$$

При этом если допустить существование ненулевой функции $g \in \text{Ker}(T)$, то при условии $\langle g, f \rangle \neq 0$ обе части приведенного равенства, очевидно, обращаются в бесконечность, т.е. оно справедливо для любых $f, g \in L_2[0, 1]$. Отсюда мы получаем, что на расширенной положительной полуоси

$$\begin{aligned} \Lambda(f) &= \sup_{g \in L_2[0, 1]} \left\{ \sup_{\{t: \|Ttg\|_2 \leq 1\}} \left\{ \frac{1}{2} \langle tg, f \rangle^2 \right\} \right\} \\ &= \sup_{\{g: \|Tg\|_2 \leq 1\}} \left\{ \frac{1}{2} \langle g, f \rangle^2 \right\} = \frac{1}{2} |f|_\gamma^2. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из упомянутого выше представления функционала $|f|_\gamma$ для гильбертова пространства, а также из равенства $\mathbf{E} \langle g, \gamma \rangle^2 = \|Tg\|_2^2$. Итак, справедливость равенства (13) установлена.

Теперь покажем, что

$$\frac{1}{2} |f|_\gamma^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} \|Sf\|_2^2, & \text{если } f \in \text{Im}(T), \\ \infty & \text{иначе.} \end{cases} \quad (14)$$

Вновь воспользуемся представлением

$$|h|_\gamma = \sup \{ \langle a, h \rangle : a \in L_2[0, 1], \|Ta\|_2 \leq 1 \}.$$

Пусть сначала $h \in \text{Im}(T)$. Тогда определен элемент Sh , причем $\|Sh\|_2 < \infty$. В силу самосопряженности оператора T и соотношения $T(Sh) = h$ имеем

$$|\langle a, h \rangle| = |\langle Ta, Sh \rangle| \leq \|Ta\|_2 \|Sh\|_2 \leq \|Sh\|_2,$$

если только $\|Ta\|_2 \leq 1$, т.е. $|h|_\gamma \leq \|Sh\|_2$. С другой стороны, положим $h_N := \sum_{i=1}^N h_i e_i$, где $h_i := \langle h, e_i \rangle$. Рассмотрим следующую последовательность конечномерных функций из $L_2[0, 1]$:

$$a_N := \frac{S^2 h_N}{\|Sh_N\|_2}. \quad (15)$$

Заметим, что $\|Ta_N\|_2 = 1$ и на конечномерных векторах типа h_N корректно определена любая степень оператора S . Тогда нетрудно видеть, что

$$|h|_\gamma \geq \langle a_N, h \rangle = \|Sh_N\|_2 \rightarrow \|Sh\|_2$$

при $N \rightarrow \infty$. Тем самым, мы доказали, что $|h|_\gamma = \|Sh\|_2 < \infty$ для всех $h \in \text{Im}(T)$.

Пусть теперь $h \notin \text{Im}(T)$. Как уже было отмечено, имеет место представление $h = \sum_{i=1}^\infty h_i e_i + \beta$, где $\beta \in \text{Ker}(T)$. Тогда при сделанном предположении с необходимостью либо $\sum_{i=1}^\infty (h_i/\lambda_i)^2 = \infty$, либо $\beta \neq 0$, так как в противном случае, т.е. при условии $\sum_{i=1}^\infty (h_i/\lambda_i)^2 < \infty$ и $\beta = 0$, элемент из $L_2[0, 1]$ с координатами $\{h_i/\lambda_i; i \geq 1\}$ переводится оператором T в элемент h . Положим $b_N := a_N + N\beta$, где a_N определен в (15). Очевидно, $\|Tb_N\|_2 = 1$ и

$$\langle b_N, h \rangle = \|Sh_N\|_2 + N\langle \beta, \beta \rangle \rightarrow \infty$$

при $N \rightarrow \infty$, откуда и следует, что $|h|_\gamma = \infty$. Итак, равенство (14) доказано.

Поскольку пространство $C[0, 1]$ непрерывно вложено в пространство $L_2[0, 1]$, то в силу леммы 3.2.2 в [4] (см. с. 96) множество $K(\gamma)$ не зависит от того, рассматривать траектории γ в $C[0, 1]$ или в $L_2[0, 1]$. Поэтому мы можем считать, что $K(\gamma)$ (стало быть, и $\text{Im}(T)$) является подмножеством $C[0, 1]$.

В силу предложения 1 процесс $u^{-1}\gamma$ удовлетворяет (I, u^2) -ПБУ в пространстве $C[0, 1]$, где функционал $I(\cdot)$ определен в (1). Кроме того, как мы только что доказали, процесс $u^{-1}\gamma$ удовлетворяет также и (Λ, u^2) -ПБУ в пространстве $L_2[0, 1]$. Покажем, что $I(g) = \Lambda(g)$ для всех $g \in C[0, 1]$. Сначала отметим, что для любого $g \in C[0, 1]$ справедливы соотношения (см. [1]–[3])

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{u} \gamma(\cdot) \in U_\varepsilon(g) \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{u} \gamma(\cdot) \in U_\varepsilon(g) \right\} = -I(g), \end{aligned} \quad (16)$$

где $U_\varepsilon(g)$ — открытый шар радиуса ε с центром в точке g в банаховом пространстве $C[0, 1]$. Обозначим через $U_\varepsilon^{(2)}(g)$ аналогичный шар в норме $L_2[0, 1]$. Так как

$$U_\varepsilon(g) \subset U_\varepsilon^{(2)}(g),$$

то в силу предложения 1 и соотношения (16), справедливого также и для шара $U_\varepsilon^{(2)}(g)$, для любой функции $g \in C[0, 1]$ получаем неравенство

$$-I(g) \leq -\Lambda(g). \quad (17)$$

Таким образом, нам достаточно рассмотреть случай $\Lambda(g) < \infty$. Так как $u^{-1}\gamma$ удовлетворяет (I, u^2) -ПБУ в пространстве $C[0, 1]$, то выполняется следующее условие экспоненциальной плотности (см. [1]–[3]): для любого положительного C найдется такое компактное подмножество K в $C[0, 1]$, что

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{u} \gamma(\cdot) \notin K \right\} \leq -C. \quad (18)$$

Теперь выберем компакт K так, чтобы (18) имело место при $C = 2\Lambda(g)$. Так как в силу теоремы Арцела–Асколи компакт K состоит из равномерно ограниченных и равномерно непрерывных (т.е. имеющих равномерно ограниченные модули непрерывности) функций, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, зависящее не только от ε , но и от компакта K , для которого

$$U_\delta^{(2)}(g) \cap K \subseteq U_\varepsilon(g).$$

Поэтому в силу выбора C имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{u} \gamma(\cdot) \in U_\varepsilon(g) \right\} &\geq \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{u} \gamma(\cdot) \in U_\delta^{(2)}(g) \right\} - \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{u} \gamma(\cdot) \notin K \right\} \\ &\sim \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{u} \gamma(\cdot) \in U_\delta^{(2)}(g) \right\} \end{aligned}$$

при $u \rightarrow \infty$. Применяя к правой части последнего неравенства предложение 1 и соотношение (16), получаем неравенство

$$-I(g) \geq -\Lambda(g). \quad (19)$$

Соотношения (17) и (19) доказывают предложение 2 в пространствах $C[0, 1]$ и $L_2[0, 1]$.

Распространение предложения 2 на пространства $L_p[0, 1]$ при всех $p \geq 1$ проходит по такой же схеме, что и при доказательстве теоремы 1 для этих пространств (см. п. 2.5).

Всюду в дальнейшем класс последовательностей $\{r(n)\}$, удовлетворяющих соотношениям

$$\frac{r(n)}{\sqrt{\ln n}} \rightarrow \infty, \quad r(n) = o(n^{\min\{1/2, H\}})$$

при $n \rightarrow \infty$, мы будем называть *верхней зоной* уклонений и обозначать $\mathcal{M}^+$, а класс последовательностей $\{r(n)\}$, для которых

$$r(n) = O(\ln n), \quad r(n) \rightarrow \infty$$

при $n \rightarrow \infty$, будем называть *нижней зоной* и обозначать $\mathcal{M}_+$.

2.3. Доказательство теоремы 1 в пространстве $C[0, 1]$ для верхней зоны уклонений. Введем обозначение:

$$R_n(t, s) := \mathbf{E} Z_n(t) Z_n(s).$$

Лемма 1. *Имеет место соотношение*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t, s \leq 1} |R_n(t, s) - R(t, s)| = 0.$$

Доказательство. Нам достаточно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t, s \leq 1} \left| \frac{1}{n^{2H} \sigma^2} \mathbf{E} S_{[nt]} S_{[ns]} - R(t, s) \right| = 0. \quad (20)$$

Поскольку

$$\frac{2\mathbf{E} S_{[nt]} S_{[ns]}}{n^{2H} \sigma^2} = \frac{\mathbf{D} S_{[nt]}}{n^{2H} \sigma^2} + \frac{\mathbf{D} S_{[ns]}}{n^{2H} \sigma^2} - \frac{\mathbf{D} S_{|[ns] - [nt]|}}{n^{2H} \sigma^2},$$

имеем

$$\begin{aligned} 2 \sup_{0 \leq t, s \leq 1} \left| \frac{1}{n^{2H} \sigma^2} \mathbf{E} S_{[nt]} S_{[ns]} - R(t, s) \right| &\leq 2 \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{1}{n^{2H} \sigma^2} \mathbf{D} S_{[nt]} - t^{2H} \right| \\ &+ \sup_{0 \leq t, s \leq 1} \left| \frac{1}{n^{2H} \sigma^2} \mathbf{D} S_{|[ns] - [nt]|} - |s - t|^{2H} \right|. \end{aligned} \quad (21)$$

Покажем, что первое слагаемое правой части (21) стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Для этого достаточно проверить, что для любой последовательности $k(n)$, удовлетворяющей условиям $k(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и $k(n) \leq n$, выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n^{2H} \sigma^2} \mathbf{D} S_{k(n)} - \left(\frac{k(n)}{n} \right)^{2H} \right| = 0. \quad (22)$$

Но в силу (8) имеем

$$\mathbf{D} S_{k(n)} = \sigma^2 k(n)^{2H} (1 + o(1))$$

при $n \rightarrow \infty$. Из последнего соотношения получаем (22). Совершенно аналогично доказывается, что и второе слагаемое правой части (21) также стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Для любого $\mu \in V$ введем обозначение

$$R_n(\mu) := \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 R_n(t, s) d\mu(t) d\mu(s).$$

Напомним также обозначение из п. 2.1:

$$R(\mu) := \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 R(t, s) d\mu(t) d\mu(s).$$

Отметим, что в силу теоремы Фубини кратные интегралы в правых частях этих формул представляют собой дисперсии функционала (μ, Y) соответственно для $Y(t) = Z_n(t)$ и $Y(t) = B_H(t)$. Из леммы 1 и теоремы Лебега вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. Для любой меры $\mu \in V_d$ имеет место сходимость

$$R_n(\mu) \rightarrow R(\mu)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Далее, обозначим через $\mathcal{M}$ класс последовательностей положительных чисел $\{r(n)\}$, удовлетворяющих условиям

$$r(n) \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad r(n) = o(n^{\min\{1/2, H\}}) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Для каждой последовательности $r(\cdot) \in \mathcal{M}$ и любой меры $\mu \in V$ определен функционал (см. п. 2.1)

$$A_n(\mu) := \frac{1}{r^2(n)} \ln \mathbf{E} e^{r(n)(\mu, Z_n)}.$$

Следующее утверждение устанавливает справедливость условия (A_1) из п. 2.1 для введенных случайных ломаных.

Лемма 3. Для любой меры $\mu \in V_d$ и любого $r(\cdot) \in \mathcal{M}$ имеет место сходимость

$$A_n(\mu) \rightarrow R(\mu)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Для $t \in [k/n, (k+1)/n]$ имеет место представление

$$Z_n(t) = n \left(\frac{k+1}{n} - t \right) Z_n \left(\frac{k}{n} \right) + n \left(t - \frac{k}{n} \right) Z_n \left(\frac{k+1}{n} \right).$$

Тогда, очевидно, выполняется равенство

$$\begin{aligned} r(n) \langle \mu, Z_n \rangle &= \frac{r(n)}{\sigma n^H} \sum_{i \in \mathbf{Z}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} A(k, i) \int_{k/n}^{(k+1)/n} n \left(\frac{k+1}{n} - t \right) d\mu(t) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{n-1} A(k+1, i) \int_{k/n}^{(k+1)/n} n \left(t - \frac{k}{n} \right) d\mu(t) \right) \xi_i. \end{aligned}$$

Из условия Крамера (см. (5)) следует, что существует круг с центром в точке 0, внутри которого производящая функция кумулянтов $L_{\xi_1}(z) := \ln \mathbf{E} \exp(z\xi_1)$ является аналитической функцией. В точках этого круга имеет место следующее разложение $L_{\xi_1}(z)$ в сходящийся степенной ряд:

$$L_{\xi_1}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\kappa_l}{l!} z^l,$$

где κ_l — кумулянт порядка l случайной величины ξ_1 (например, $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 1$). В частности, найдутся положительные a и c , для которых

$$\sup_{|z| < a} |L_{\xi_1}(z)| \leq c.$$

Отсюда следует оценка

$$|\kappa_l| \leq l! a^{-l} c \quad \text{для всех } l = 2, 3, \dots \quad (23)$$

Представим величину $A_n(\mu)$ в виде суммы двух слагаемых:

$$A_n(\mu) = A_{1,n}(\mu) + A_{2,n}(\mu), \quad (24)$$

где

$$A_{1,n}(\mu) := \frac{\kappa_2}{2} \frac{1}{n^{2H}\sigma^2} \sum_{i \in \mathbf{Z}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} A(k, i) B(k, n) + \sum_{k=0}^{n-1} A(k+1, i) C(k, n) \right)^2$$

и

$$A_{2,n}(\mu) := \sum_{l=3}^{\infty} \frac{\kappa_l}{l!} \frac{r^{l-2}(n)}{n^{lH}\sigma^l} \sum_{i \in \mathbf{Z}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} A(k, i) B(k, n) + \sum_{k=0}^{n-1} A(k+1, i) C(k, n) \right)^l,$$

при этом

$$B(k, n) := \int_{k/n}^{(k+1)/n} n \left(\frac{k+1}{n} - t \right) d\mu(t),$$

$$C(k, n) := \int_{k/n}^{(k+1)/n} n \left(t - \frac{k}{n} \right) d\mu(t).$$

Для меры $\mu := \sum_{i=1}^m \lambda_i \delta_{t_i}$ выполняются неравенства

$$|B(k, n)| \leq \sum_{i=1}^m |\lambda_i| I_{[k/n, (k+1)/n)}(t_i), \quad |C(k, n)| \leq \sum_{i=1}^m |\lambda_i| I_{[k/n, (k+1)/n)}(t_i).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathbf{Z}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} A(k, i) B(k, n) + \sum_{k=0}^{n-1} A(k+1, i) C(k, n) \right)^l \\ & \leq 2^l \sum_{i \in \mathbf{Z}} \left[\left(\sum_{k=1}^m |A([nt_k], i)| |\lambda_k| \right)^l + \left(\sum_{k=1}^m |A([nt_k + 1], i)| |\lambda_k| \right)^l \right] \\ & \leq 2(2Mm)^l \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i \in \mathbf{Z}} |A(k, i)|^l, \end{aligned}$$

где $M = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_m|\}$. Используя далее только что полученное неравенство, а также (23) и (9), выводим оценку для второго слагаемого в (24):

$$\begin{aligned} |A_{2,n}| & \leq 2(2Mm)^l \sum_{l=3}^{\infty} \frac{\kappa_l}{l!} \frac{|r(n)|^{l-2}}{n^{lH}\sigma^l} \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i \in \mathbf{Z}} |A(k, i)|^l \\ & \leq 2cm \sum_{l=3}^{\infty} \frac{|r(n)|^{l-2}}{n^{lH}\sigma^l} \frac{(2Mm)^l}{a^l} \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{i \in \mathbf{Z}} |A(k, i)|^l \\ & \leq 16c \frac{M^3 d^4 m^4}{\sigma^3 a^3} \frac{|r(n)|}{n^{\min\{H, 1/2\}}} \sum_{l=3}^{\infty} \left(\alpha \frac{|r(n)|}{n^{\min\{H, 1/2\}}} \right)^{l-3}, \end{aligned}$$

где $\alpha = 2Mmd/(\sigma\alpha)$. Поскольку $r(n) = o(n^{\min\{H, 1/2\}})$ при $n \rightarrow \infty$, то в правой части (24) второе слагаемое стремится к 0. Осталось заметить, что $A_{1,n}(\mu)$ совпадает с $R_n(\mu)$, и воспользоваться леммой 2. Лемма доказана.

Далее нам понадобится аналог неравенства С. Н. Бернштейна для хвоста распределения частичных сумм S_n . Прежде всего отметим, что из условия (9) для всех $n \geq 1$ следует оценка

$$\max_{i \in \mathbf{Z}} |A(n, i)| \leq dn^{\max\{H-1/2, 0\}}. \quad (25)$$

Здесь мы использовали тот факт, что

$$\left(\sum_{i \in \mathbf{Z}} |A(n, i)|^l \right)^{1/l} \rightarrow \max_{i \in \mathbf{Z}} |A(n, i)| \quad \text{при } l \rightarrow \infty.$$

Принимая во внимание (25) и используя известные показательные оценки для распределений сумм независимых случайных величин (см. [16, с. 81]), получаем следующее утверждение.

Лемма 4. *Существуют такие положительные постоянные b и T , зависящие от распределения случайной величины ξ_1 , что имеют место неравенства*

$$\mathbf{P}\{|S_k| \geq y\} \leq \begin{cases} 2 \exp\left(-\frac{y^2}{2G_k}\right), & \text{если } 0 \leq y \leq \frac{G_k T}{D_k}, \\ 2 \exp\left(-\frac{yT}{2D_k}\right), & \text{если } y \geq \frac{G_k T}{D_k}, \end{cases} \quad (26)$$

где $G_k := 2b \sum_{i \in \mathbf{Z}} (A(k, i))^2$, $D_k := dk^{\max\{H-1/2, 0\}}$.

В приводимой ниже лемме будет показано, что последовательность $r(n)^{-1}Z_n(\cdot)$, где $r(\cdot) \in \mathcal{M}^+$, удовлетворяет условию экспоненциальной плотности. Тем самым мы установим справедливость условия (A_2) из п. 2.1 для введенных случайных ломаных.

Лемма 5. *Для любого положительного ε и для любого $r(\cdot) \in \mathcal{M}^+$ выполняется соотношение*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2(n)} \ln \mathbf{P}\left\{\omega\left(\frac{Z_n(\cdot)}{r(n)}, \delta\right) \geq \varepsilon\right\} = -\infty,$$

где $\omega(f, \delta)$ — модуль непрерывности функции $f \in C[0, 1]$.

Доказательство. Зафиксируем δ и последовательность $r(\cdot) \in \mathcal{M}^+$ и введем в рассмотрение множество элементарных исходов

$$B_{t,n} := \left\{ \sup_{t \leq s \leq t+\delta} \left| \frac{Z_n(s)}{r(n)} - \frac{Z_n(t)}{r(n)} \right| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\};$$

при этом точки s и t могут лежать либо в одном интервале вида $[i\delta, (i+1)\delta]$, либо в двух соседних. Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{P}\left\{\omega\left(\frac{Z_n(\cdot)}{r(n)}, \delta\right) \geq \varepsilon\right\} \leq \mathbf{P}\left(\bigcup_{i < \delta^{-1}} B_{i\delta,n}\right) \leq \sum_{i < \delta^{-1}} \mathbf{P}(B_{i\delta,n}). \quad (27)$$

Рассмотрим целые j и k , определенные неравенствами

$$\frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}, \quad \frac{j-1}{n} \leq t + \delta < \frac{j}{n}.$$

Так как функция $Z_n(\cdot)$ кусочно линейна, то справедливо неравенство

$$\sup_{t \leq s \leq t+\delta} |Z_n(s) - Z_n(t)| \leq 2 \max_{0 \leq i \leq j-k} \frac{1}{\sigma n^H} |S_{k+i} - S_k|. \quad (28)$$

Так как при $n \geq 2/\delta$ имеет место неравенство $j - k \leq 2n\delta$, то из (28) следует

$$\sup_{t \leq s \leq t+\delta} |Z_n(s) - Z_n(t)| \leq 2 \max_{0 \leq i \leq 2n\delta} \frac{1}{\sigma n^H} |S_{k+i} - S_k|. \quad (29)$$

Воспользовавшись неравенствами (27), (29), а также стационарностью последовательности $\{Y_n\}$, получаем при $n \geq 2/\delta$ оценку

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \omega \left(\frac{Z_n(\cdot)}{r(n)}, \delta \right) \geq \varepsilon \right\} &\leq \frac{1}{\delta} \mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq i \leq 2n\delta} |S_i| \geq \frac{\varepsilon}{6} \sigma r(n) n^H \right\} \\ &\leq 2n \max_{1 \leq i \leq 2n\delta} \mathbf{P} \left\{ |S_i| \geq \frac{\varepsilon}{6} \sigma r(n) n^H \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Оценим правую часть (30). С учетом неравенств (26) имеем

$$\begin{aligned} &\max_{1 \leq i \leq 2n\delta} \mathbf{P} \left\{ |S_i| \geq \frac{\varepsilon}{6} \sigma r(n) n^H \right\} \\ &\leq 2 \max_{1 \leq k \leq 2n\delta} \max \left\{ \exp \left(-\frac{\varepsilon^2 r^2(n) \sigma^2 n^{2H}}{72 G_k} \right), \exp \left(-\frac{\varepsilon r(n) \sigma n^H T}{6 D_k} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Теперь оценим правую часть неравенства (31). Обозначим

$$d_1 := \sup_{k \geq 1} \left(\frac{G_k}{k^{2H}} \right).$$

Тогда показатель первой экспоненты в (31) допускает оценку снизу

$$\frac{\varepsilon^2 r^2(n) \sigma^2 n^{2H}}{72 G_k} \geq \frac{\varepsilon^2 \sigma^2 r^2(n) n^{2H}}{72 d_1 k^{2H}} \geq \frac{\varepsilon^2 \sigma^2}{72 d_1 2^{2H}} \frac{r^2(n)}{\delta^{2H}} \quad (32)$$

при всех $1 \leq k \leq 2n\delta$. Для фиксированной последовательности $r(n) = o(n^{\min\{1/2, H\}})$ выберем такой номер $N(\delta) > 0$, что при всех $n > N(\delta)$ выполняется неравенство

$$r(n) \leq \delta n^{\min\{1/2, H\}}.$$

Отсюда мы выводим нижнюю оценку для показателя второй экспоненты в (31):

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon r(n) \sigma n^H T}{6 D_k} &= \frac{T \varepsilon r(n)}{6 d} \frac{n^{\min\{1/2, H\}} n^{H^*}}{k^{H^*}} \\ &\geq \frac{T \varepsilon}{6 d} \frac{1}{(2\delta)^{H^*}} r(n) n^{\min\{1/2, H\}} \geq \frac{T \varepsilon}{6 d 2^{H^*}} \frac{r^2(n)}{\delta^{H^*+1}}, \end{aligned} \quad (33)$$

где $H^* = \max\{H - \frac{1}{2}, 0\}$, при всех $1 \leq k \leq 2n\delta$ и каждом $n > N(\delta)$. Объединяя (32) и (33), получаем, что для правой части неравенства (31) справедлива оценка

$$2 \max \left\{ \exp \left(-\frac{\varepsilon^2 \sigma^2}{72d_1 2^{2H}} \frac{r^2(n)}{\delta^{2H}} \right), \exp \left(-\frac{T\varepsilon}{6d2^{H^*}} \frac{r^2(n)}{\delta^{H^*+1}} \right) \right\} \quad (34)$$

при всех $n > N(\delta)$. Применяя (30), (34) и используя соотношение $r(n)/\sqrt{\ln n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2(n)} \ln \mathbf{P} \left\{ \omega \left(\frac{Z_n(\cdot)}{r(n)}, \delta \right) \geq \varepsilon \right\} \\ \leq -\max \left\{ \frac{\varepsilon^2 \sigma^2}{72d_1 2^{2H}} \frac{1}{\delta^{2H}}, \frac{T\varepsilon}{6d2^{H^*}} \frac{1}{\delta^{H^*+1}} \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Устремляя δ к 0 в обеих частях (35), получаем утверждение леммы.

Итак, мы показали, что для ломаных Z_n выполняются условия (A_1) и (A_2) для класса $\mathcal{M}^+$. Поэтому в силу предложения 5 семейство $\{r(n)^{-1} Z_n\}$ удовлетворяет $(\Lambda, r^2(n))$ -ПБУ в верхней зоне уклонений, где Λ — функционал действия, соответствующий, в силу предложения 3, процессу B_H .

2.4. Доказательство теоремы 1 в пространстве $C[0, 1]$ в нижней зоне уклонений. В основе метода доказательства теоремы в нижней зоне уклонений лежат оценки близости распределений ломаной Z_n и фрактального броуновского движения B_H . Мы будем следовать методологии работ [17] и [12], где эти оценки получены в случае, когда исходные случайные величины $\{\xi_k\}$ имеют степенные моменты.

Наряду с последовательностью $\{A_m\}$ нам понадобятся следующие обозначения, также связанные с исходными коэффициентами $\{a_i\}$:

$$\begin{aligned} \Delta_n^{(1)} &:= \sum_{m=0}^{\infty} \left(A_{n+m} - A_m - \sigma L_H^{-1/2} (n+m+1)^{H-1/2} \right. \\ &\quad \left. + \sigma L_H^{-1/2} (m+1)^{H-1/2} \right)^2; \\ \Delta_n^{(2)} &:= \sum_{m=1}^n \left(A_{n-m} - \sigma L_H^{-1/2} (n-m+1)^{H-1/2} - A_{-m} \right)^2; \\ \Delta_n^{(3)} &:= \sum_{m=n+1}^{\infty} (A_{n-m} - A_{-m})^2; \\ \Delta_n &:= \Delta_n^{(1)} + \Delta_n^{(2)} + \Delta_n^{(3)}; \\ \delta_n &:= \max_{k=1, \dots, n} \Delta_k. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} w_k^{(n)} &:= W(kn^{-1}) - W((k-1)n^{-1}), \quad k \geq 1, \\ w_{-k}^{(n)} &:= \widetilde{W}((k+1)n^{-1}) - \widetilde{W}(kn^{-1}), \quad k \geq 0, \end{aligned}$$

где $\widetilde{W}(t)$ и $W(t)$, $0 \leq t < \infty$, — две независимые версии стандартного винеровского процесса. Соответствующую частную сумму скользящих средних, определенных для гауссовских случайных величин $\{w_k^{(n)}; k \in \mathbf{Z}\}$, обозначим $\{G_l^{(n)}; l \geq 0\}$, а соответствующий нормированный процесс частных сумм определим как

$$\gamma_{n,H}(t) := \frac{G_{[nt]}^{(n)}}{\sigma n^{H-1/2}}.$$

Обозначим также через $g_n(t)$ случайную ломаную в $C[0, 1]$, построенную по точкам $(kn^{-1}, \gamma_{n,H}(kn^{-1}))$, $k = 0, 1, \dots, n$. Буквами C_i, c_i и τ_i (с индексами или без таковых) мы будем обозначать положительные постоянные, зависящие разве что от распределения ξ_1 . Нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 6 (см. [3]). Пусть $\{\xi_k; k \geq 1\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\mathbf{D}\xi_1 = 1$ и выполнено условие Крамера (см. (5)). Тогда при каждом n и всех $x > 0$ существует такой винеровский процесс W , что

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \leq n} \left| \sum_{j \leq k} \frac{\xi_j}{\sqrt{n}} - W\left(\frac{k}{n}\right) \right| \geq x\right\} \leq C_1 n e^{-\tau n^{1/2} x}.$$

Далее, введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \xi_i^{(n)} &:= \frac{\xi_i}{\sqrt{n}}, \quad i \in \mathbf{Z}, \quad S_k^{(n)} := \frac{S_k}{\sqrt{n}}, \quad k \geq 0; \\ \overline{S}_k^{(n)} &:= \sum_{i=0}^{\infty} (A_{k+i} - A_i) \xi_{-i}^{(n)}, \quad k \geq 0; \\ \underline{S}_0^{(n)} &:= 0, \quad \underline{S}_k^{(n)} := \sum_{i=1}^k (A_{k-i} - A_{-i}) \xi_i^{(n)}, \quad k \geq 1; \\ \underline{\underline{S}}_k^{(n)} &:= \sum_{i=k+1}^{\infty} (A_{k-i} - A_{-i}) \xi_i^{(n)}, \quad k \geq 0; \\ \overline{G}_k^{(n)} &:= \sum_{i=0}^{\infty} (A_{k+i} - A_i) w_{-i}^{(n)}, \quad k \geq 0; \\ \underline{G}_0^{(n)} &:= 0, \quad \underline{G}_k^{(n)} := \sum_{i=1}^k (A_{k-i} - A_{-i}) w_i^{(n)}, \quad k \geq 1; \\ \underline{\underline{G}}_k^{(n)} &:= \sum_{i=k+1}^{\infty} (A_{k-i} - A_{-i}) w_i^{(n)}, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Имеем

$$S_{[nt]}^{(n)} = \overline{S}_{[nt]}^{(n)} + \underline{S}_{[nt]}^{(n)} + \underline{\underline{S}}_{[nt]}^{(n)}, \quad G_{[nt]}^{(n)} = \overline{G}_{[nt]}^{(n)} + \underline{G}_{[nt]}^{(n)} + \underline{\underline{G}}_{[nt]}^{(n)}.$$

Из условий (10) и (11) сразу следует, что при $n \geq 0$

$$|a_i| \leq C|i|^{H-3/2} \quad \text{при} \quad |i| \geq 1 \quad \text{и} \quad \sum_{|i| \leq n} |a_i| \leq C_1(n+1)^{\max\{H-1/2, 0\}}. \quad (36)$$

В дальнейшем в леммах 7–10 и лемме 15 вместо условий (10) и (11) нам достаточно требовать лишь выполнение условия (36).

Лемма 7. *Существует такое вероятностное пространство, что при каждом n и всех $x > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0,1]} \left| \underline{S}_{[nt]}^{(n)} - \underline{G}_{[nt]}^{(n)} \right| n^{-H+1/2} \geq x \right\} \leq C_2 n \exp \left\{ -\tau_1 n^{\min\{H, 1/2\}} x \right\}.$$

Доказательство. Обозначим $\sigma_i^{(n)} = \sum_{j=1}^i \xi_j^{(n)}$ и $\varrho_i^{(n)} = \sum_{j=1}^i \gamma_j^{(n)}$. Тогда, применяя формулу Абеля, получаем

$$\begin{aligned} \underline{S}_{[nt]}^{(n)} &= \sum_{i=1}^{[nt]-1} \sigma_i^{(n)} (a_{[nt]-i} - a_{-i}) + \sigma_{[nt]}^{(n)} (a_0 - A_{-[nt]}), \\ \underline{G}_{[nt]}^{(n)} &= \sum_{i=1}^{[nt]-1} \varrho_i^{(n)} (a_{[nt]-i} - a_{-i}) + \varrho_{[nt]}^{(n)} (a_0 - A_{-[nt]}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \underline{S}_{[nt]}^{(n)} - \underline{G}_{[nt]}^{(n)} \right| &= \left| \sum_{i=1}^{[nt]-1} (\sigma_i^{(n)} - \varrho_i^{(n)}) (a_{[nt]-i} - a_{-i}) \right| + \left| \sigma_{[nt]}^{(n)} - \varrho_{[nt]}^{(n)} \right| |a_0 - A_{-[nt]}| \\ &\leq 2 \sup_{1 \leq i \leq n} \left| \sigma_i^{(n)} - \varrho_i^{(n)} \right| \sum_{|i| \leq n} |a_i| \\ &\leq \sup_{1 \leq i \leq n} \left| \sigma_i^{(n)} - \varrho_i^{(n)} \right| C_1 n^{\max\{H-1/2, 0\}}. \end{aligned}$$

С помощью леммы 6 получаем оценку

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0,1]} \left| \underline{S}_{[nt]}^{(n)} - \underline{G}_{[nt]}^{(n)} \right| n^{-H+1/2} \geq C_1 x \right\} \\ \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{1 \leq i \leq n} \left| \sigma_i^{(n)} - \varrho_i^{(n)} \right| \geq x n^{\min\{0, H-1/2\}} \right\} \leq C n \exp \left\{ -\tau n^{\min\{H, 1/2\}} x \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует утверждение леммы.

Лемма 8. *Существует такое вероятностное пространство, что при каждом n и всех $x > 1$ имеет место неравенство*

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0,1]} \left| \overline{S}_{[nt]}^{(n)} - \overline{G}_{[nt]}^{(n)} \right| n^{-H+1/2} \geq x \right\} \leq C_2 n \exp \left\{ -\tau_2 n^{\min\{H, 1/2\}} x \right\}$$

при всех достаточно больших n .

Доказательство. Имеем

$$\overline{S}_{[nt]}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} (A_{[nt]+i} - A_i) \xi_{-i}^{(n)} + \sum_{i=n}^{\infty} (A_{[nt]+i} - A_i) \xi_{-i}^{(n)}. \quad (37)$$

Представим второе слагаемое правой части (37) в виде

$$\sum_{i=n}^{\infty} (A_{[nt]+i} - A_i) \xi_{-i}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=n2^{k-1}}^{n2^k-1} (A_{[nt]+i} - A_i) \xi_{-i}^{(n)}.$$

Введем следующие обозначения:

$$S_i^{(k-1)}(n) = \sum_{j=n2^{k-1}}^i \xi_{-j}^{(n)},$$

$$G_i^{(k-1)}(n) = \sum_{j=n2^{k-1}}^i w_{-j}^{(n)}, \quad i = n2^{k-1}, \dots, n2^k - 1.$$

Далее, вновь применяя формулу Абеля, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=n2^{k-1}}^{n2^k-1} (A_{[nt]+i} - A_i) \xi_{-i}^{(n)} &= \sum_{i=n2^{k-1}}^{n2^k-2} (a_{i+1} - a_{[nt]+i+1}) S_i^{(k-1)}(n) \\ &\quad + (A_{[nt]+n2^k-1} - A_{n2^k-1}) S_{n2^k-1}^{(k-1)}(n). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=n2^{k-1}}^{n2^k-1} (A_{[nt]+i} - A_i) (\xi_{-i}^{(n)} - w_{-i}^{(n)}) \right| \\ &\leq \sup_{n2^{k-1} \leq i \leq n2^k-1} \left| S_i^{(k-1)}(n) - G_i^{(k-1)}(n) \right| \\ &\quad \times |A_{n2^k-1} - A_{n2^{k-1}} - (A_{[nt]+n2^k-1} - A_{[nt]+n2^{k-1}}) \\ &\quad + A_{[nt]+n2^k-1} - A_{n2^k-1}| \\ &= \sup_{n2^{k-1} \leq i \leq n2^k-1} \left| S_i^{(k-1)}(n) - G_i^{(k-1)}(n) \right| |A_{[nt]+n2^k-1} - A_{n2^k-1}|. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что коэффициенты a_i при достаточно больших $|i|$ монотонны и, следовательно, сохраняют знак. Поскольку $|a_n| \leq Cn^{H-3/2}$, то $|A_{[nt]+n2^k-1} - A_{n2^k-1}| \leq Cn(n2^{k-1})^{H-3/2} = Cn^{H-1/2}2^{(k-1)(H-3/2)}$. Итак,

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=n2^{k-1}}^{n2^k-1} (A_{[nt]+i} - A_i) (\xi_{-i}^{(n)} - w_{-i}^{(n)}) \right| \\ &\leq \sup_{n2^{k-1} \leq i \leq n2^k-1} \left| S_i^{(k-1)}(n) - G_i^{(k-1)}(n) \right| Cn^{H-1/2}2^{(k-1)(H-3/2)}. \end{aligned}$$

Следовательно (см. лемму 6),

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0,1]} \left| \sum_{i=n2^{k-1}}^{n2^k-1} (A_{[nt]+i} - A_i) (\xi_{-i}^{(n)} - w_{-i}^{(n)}) \right| n^{-H+1/2} \right. \\ &\quad \left. \geq C2^{(k-1)(H-3/2)} x(1 + 2\tau^{-1}(k-1) \ln 2) \right\} \end{aligned}$$

$$\leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{n2^{k-1} \leq i \leq n2^k - 1} \left| S_i^{(k-1)}(n) - G_i^{(k-1)}(n) \right| \geq x (1 + 2\tau^{-1}(k-1) \ln 2) \right\} \\ \leq 2^{-k+1} C_1 n e^{-\tau n^{1/2} x}.$$

В итоге имеем

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0,1]} \left| \sum_{i=n}^{\infty} (A_{[nt]+i} - A_i) (\xi_{-i}^{(n)} - w_{-i}^{(n)}) \right| n^{-H+1/2} \right. \\ \left. \geq Cx \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(k-1)(H-3/2)} (1 + 2\tau^{-1}(k-1) \ln 2) \right\} \leq 2C_1 n e^{-\tau n^{1/2} x}. \quad (38)$$

Теперь рассмотрим первое слагаемое правой части (37). Введем обозначения:

$$\sigma_i^{(n)} = \sum_{j=0}^i \xi_{-j}^{(n)}, \quad \varrho_i^{(n)} = \sum_{j=0}^i w_{-j}^{(n)}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

С помощью формулы Абеля получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1} (A_{[nt]+i} - A_i) \xi_{-i}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-2} \sigma_i^{(n)} (a_{i+1} - a_{[nt]+i+1}) + \sigma_{n-1}^{(n)} (A_{[nt]+n-1} - A_{n-1}); \\ \sum_{i=0}^{n-1} (A_{[nt]+i} - A_i) w_{-i}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-2} \varrho_i^{(n)} (a_{i+1} - a_{[nt]+i+1}) + \varrho_{n-1}^{(n)} (A_{[nt]+n-1} - A_{n-1}).$$

Таким образом,

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} (A_{[nt]+i} - A_i) (\xi_{-i}^{(n)} - w_{-i}^{(n)}) \right| \leq 4 \sup_{0 \leq i \leq n-1} |\sigma_i^{(n)} - \varrho_i^{(n)}| \sum_{i=0}^{2n-1} |a_i|.$$

Воспользуемся тем, что $\sum_{i=0}^{2n-1} |a_i| \leq C_1 (2n)^{\max\{H-1/2, 0\}}$. Итак,

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0,1]} \left| \sum_{i=0}^{n-1} (A_{[nt]+i} - A_i) (\xi_{-i}^{(n)} - w_{-i}^{(n)}) \right| n^{-H+1/2} \geq 4xC_1 2^{\max\{H-1/2, 0\}} \right\} \\ \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq i \leq n-1} |\sigma_i^{(n)} - \varrho_i^{(n)}| \geq xn^{\min\{H-1/2, 0\}} \right\} \\ \leq n C_2 \exp \{ -\tau n^{\min\{H, 1/2\}} x \}. \quad (39)$$

Объединяя неравенства (38) и (39), приходим к утверждению леммы 8.

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 9. *Существует такое вероятностное пространство, что при всех достаточно больших n и для каждого $x > 1$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0,1]} \left| \underline{S}_{[nt]}^{(n)} - \underline{G}_{[nt]}^{(n)} \right| n^{-H+1/2} \geq x \right\} \leq C_3 n \exp \{ -\tau_3 n^{\min\{H, 1/2\}} x \}.$$

Из лемм 7–9 вытекает следующее утверждение.

Лемма 10. *Существует такое вероятностное пространство, что при всех достаточно больших n и любом $x > 1$ выполняется неравенство*

$$\mathbf{P}\{\|Z_n - g_n\|_\infty \geq x\} \leq C_4 n \exp\{-\tau_4 n^{\min\{H, 1/2\}} x\}.$$

Введем в рассмотрение последовательность случайных величин:
 $B_0^{(n)} := 0,$

$$B_k^{(n)} := L_H^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^k (k-i+1)^{H-1/2} w_i^{(n)} + \sum_{i=0}^{\infty} \left((k+i+1)^{H-1/2} - (i+1)^{H-1/2} \right) w_{-i}^{(n)} \right)$$

для всех $k \geq 1$.

Лемма 11. *Для любого $x > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{t \in [0,1]} n^{-H+1/2} \left| \frac{1}{\sigma} G_{[nt]}^{(n)} - B_{[nt]}^{(n)} \right| \geq x \right\} \leq 2n \exp\left\{ -\frac{x^2 \sigma^2 n^{2H}}{2\delta_n} \right\}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{ \max \left\{ n^{-H+1/2} \left| \frac{1}{\sigma} G_1^{(n)} - B_1^{(n)} \right|, \dots, n^{-H+1/2} \left| \frac{1}{\sigma} G_n^{(n)} - B_n^{(n)} \right| \right\} \geq x \right\} \\ \leq \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\left\{ \left| \frac{1}{\sigma} G_k^{(n)} - B_k^{(n)} \right| \geq n^{-1/2+H} x \right\} \leq 2n \exp\left\{ -\frac{x^2 \sigma^2 n^{2H}}{2\delta_n} \right\}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 12. *Для любого $x > 0$ имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{t \in [0,1]} \left| B_{[nt]}^n n^{-H+1/2} - B_H\left(\frac{[nt]}{n}\right) \right| \geq x \right\} \leq 2ne^{-n^{2H} x^2/8}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что величину $B_k^{(n)}/n^{H-1/2}$ можно представить в виде стохастического интеграла

$$\begin{aligned} L_H^{-1/2} \left(\int_0^{k/n} \left(\frac{k}{n} - \frac{[ns]}{n} \right)^{H-1/2} dW(s) \right. \\ \left. + \int_0^\infty \left(\left(\frac{k}{n} + \frac{[ns]+1}{n} \right)^{H-1/2} - \left(\frac{[ns]+1}{n} \right)^{H-1/2} \right) d\widetilde{W}(s) \right). \end{aligned}$$

Между тем, и величина $B_H(k/n)$ также допускает представление в виде стохастического интеграла (см. [10])

$$L_H^{-1/2} \left(\int_0^{k/n} \left(\frac{k}{n} - s \right)^{H-1/2} dW(s) + \int_0^\infty \left(\left(\frac{k}{n} + s \right)^{H-1/2} - s^{H-1/2} \right) d\widetilde{W}(s) \right).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}
 & n^{2H} E \left(B_H \left(\frac{k}{n} \right) - n^{1/2-H} B_k^n \right)^2 \\
 & \leq L_H^{-1} \left(\int_0^k \left((k-s)^{H-1/2} - (k-[s])^{H-1/2} \right)^2 ds \right. \\
 & \quad + 2 \int_k^\infty \left(s^{H-1/2} - ([s]+1)^{H-1/2} \right)^2 ds \\
 & \quad \left. + 2 \int_0^\infty \left(s^{H-1/2} - ([s]+1)^{H-1/2} \right)^2 ds \right) \\
 & \leq L_H^{-1} \left(\int_0^k \left(s^{H-1/2} - (s+1)^{H-1/2} \right)^2 ds \right. \\
 & \quad + 2 \int_k^\infty \left(s^{H-1/2} - (s+1)^{H-1/2} \right)^2 ds \\
 & \quad \left. + 2 \int_0^\infty \left(s^{H-1/2} - (s+1)^{H-1/2} \right)^2 ds \right) \leq 4. \quad (40)
 \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что $[s] \leq s < [s]+1$. Из (40) мы сразу получаем утверждение леммы.

Далее нам понадобится следующее утверждение (см. [18]).

Лемма 13. Пусть $\{\xi(t); 0 \leq t \leq 1\}$ — центрированный гауссовский процесс, причем $\xi(0) = 0$ и $E(\xi(t) - \xi(s))^2 \leq C|t-s|^\beta$ для некоторого $\beta > 0$. Тогда для всех $x \geq 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0,1]} |\xi(t)| > x \right\} \leq 4 \exp \{ -C(\beta) x^2 C^{-1} \},$$

где $C(\beta)$ — постоянная, зависящая только от β .

Обозначим через $b_n(t) \in C(0,1)$ случайную ломанную, построенную по точкам $(kn^{-1}, B_H(kn^{-1}))$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Лемма 14. Для всех $x > 0$ имеет место неравенство

$$\mathbf{P} \{ \|B_H - b_n\|_\infty \geq x\varepsilon \} \leq 8n \exp \left\{ -\frac{C(H) x^2 n^{2H}}{4} \right\},$$

где $C(H) > 0$ — постоянная, зависящая только от H .

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P} \{ \|B_H - b_n\|_\infty \geq x \} \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0,1]} \left| B_H(t) - B_H \left(\frac{[nt]}{n} \right) \right| \geq \frac{x}{2} \right\} \\
 & \quad + \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0,1]} \left| B_H \left(\frac{[nt]}{n} \right) - b_n(t) \right| \geq \frac{x}{2} \right\} \\
 & \leq n \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0,1/n]} |B_H(t)| \geq \frac{x}{2} \right\} + n \mathbf{P} \left\{ \left| B_H \left(\frac{1}{n} \right) \right| \geq \frac{x}{2} \right\} \\
 & \leq 2n \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0,1/n]} |B_H(t)| \geq \frac{x}{2} \right\} \leq 2n \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in [0,1]} \left| B_H \left(\frac{t}{n} \right) \right| \geq \frac{x}{2} \right\}. \quad (41)
 \end{aligned}$$

Применив лемму 13 к правой части (41), получим утверждение леммы.

Из лемм 10–14 вытекает следующее утверждение.

Лемма 15. *Существует вероятностное пространство, на котором при всех достаточно больших n и любом $x > 1$*

$$\mathbf{P}\{\|Z_n - B_H\|_\infty > x\} \leq C_0 n \exp\{-c_0 x n^{\min\{H, 1/2\}}\} + C_0 n \exp\left\{-\frac{c_0 x^2 n^{2H}}{\delta_n}\right\}.$$

Нам понадобится также следующая оценка для δ_n .

Лемма 16. *Пусть выполняются условия (10) и (11). Тогда при $n \rightarrow \infty$*

$$\delta_n = O(n^{\max\{2H-2\delta, 0\}}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим величину $\Delta_n^{(3)}$ в виде суммы двух слагаемых:

$$\Delta_n^{(3)} = \sum_{m=n+1}^{2n} (A_{n-m} - A_m)^2 + \sum_{m=2n+1}^{\infty} (A_{n-m} - A_m)^2. \quad (42)$$

Оценим первое слагаемое правой части (42):

$$\begin{aligned} \sum_{m=n+1}^{2n} (A_{n-m} - A_m)^2 &\leq \sum_{m=n+1}^{2n} \left(c_1(m-n+1)^{H-\delta-1/2} + c_1(m+1)^{H-\delta-1/2} \right)^2 \\ &\leq c_2 n^{\max\{0, 2H-2\delta\}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $|A_{-i}| \leq c_1(i+1)^{H-\delta-1/2}$ при $i \geq 0$. Рассмотрим второе слагаемое правой части (42). Так как $|a_{-i}| \leq c_3 i^{H-\delta-3/2}$ для всех $i \geq 1$, то

$$\begin{aligned} \sum_{m=2n+1}^{\infty} (A_{n-m} - A_m)^2 &= \sum_{m=2n+1}^{\infty} \left(\sum_{i=-m+1}^{n-m} a_i \right)^2 \\ &\leq n^2 c_3^2 \sum_{m=2n+1}^{\infty} (m-n)^{2H-2\delta-3} \leq c_4 n^{2H-2\delta}. \end{aligned} \quad (44)$$

Далее, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \Delta_n^{(2)} &\leq 2 \sum_{m=0}^{n-1} \left((A_m - \sigma L_H^{-1/2}(m+1)^{H-1/2})^2 + A_m^2 \right) \\ &\leq 2c_5^2 \sum_{m=0}^{n-1} (m+1)^{2H-2\delta-1} + 2c_1^2 \sum_{m=0}^{n-1} (m+1)^{2H-2\delta-1} \\ &\leq c_6 n^{\max\{0, 2H-2\delta\}}, \end{aligned} \quad (45)$$

здесь мы использовали оценку

$$|A_m - \sigma L_H^{-1/2}(m+1)^{H-1/2}| \leq c_5(m+1)^{H-\delta-1/2}.$$

Аналогично выводим последнюю нужную оценку $\Delta_n^{(1)} \leq c_7 n^{\max\{0, 2H-2\delta\}}$. Лемма доказана.

Опираясь на леммы 3, 15 и 16, а также предложения 3 и 5, проведем доказательство второй части теоремы 1, относящейся к пространству $C[0, 1]$. Пусть процессы $Z_n(\cdot)$ и $B_H(\cdot)$ построены на одном вероятностном пространстве, как указано в лемме 15. Поскольку $u^{-1}B_H$ удовлетворяет (Λ, u^2) -ПБУ, то выполняется условие экспоненциальной плотности, см. [1]–[3]: для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \ln \mathbf{P} \left\{ \omega \left(\frac{1}{u} B_H, \delta \right) \geq \varepsilon \right\} = -\infty, \quad (46)$$

где $\omega(f, \delta)$ — модуль непрерывности функции $f \in C[0, 1]$. Из соотношения (46) мы получим, что для $\varepsilon > 0$ и для каждого положительного N существуют такие положительные постоянные $\theta = \theta(\varepsilon, N)$ и $\tau = \tau(\varepsilon, N)$, что имеет место неравенство

$$\mathbf{P} \left\{ \omega \left(\frac{1}{r(n)} B_H, \theta \right) \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \leq e^{-Nr^2(n)} \quad (47)$$

при всех $n \geq \tau$. Поскольку функция $g(\delta) = \mathbf{P} \{ \omega(B_H/r(n), \delta) \geq \varepsilon/3 \}$ монотонна по аргументу δ , то из (47) мы получаем

$$\sup_{0 \leq \delta \leq \theta} \mathbf{P} \left\{ \omega \left(\frac{1}{r(n)} B_H, \delta \right) \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \leq e^{-Nr^2(n)} \quad (48)$$

при всех $n \geq \tau$. Из лемм 15 и 16, а также используя то, что $r(\cdot) \in \mathcal{M}_+$, мы получаем оценку

$$\mathbf{P} \left\{ \|Z_n - B_H\|_\infty > \frac{\varepsilon}{3} r(n) \right\} = o(e^{-Nr^2(n)}) \quad (49)$$

при $n \rightarrow \infty$. Очевидно, выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \omega \left(\frac{1}{r(n)} B_H, \delta \right) \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \\ & \geq \mathbf{P} \left\{ \omega \left(\frac{1}{r(n)} Z_n, \delta \right) \geq \varepsilon, \|Z_n - B_H\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} r(n) \right\} \\ & \geq \mathbf{P} \left\{ \omega \left(\frac{1}{r(n)} Z_n, \delta \right) \geq \varepsilon \right\} - \mathbf{P} \left\{ \|Z_n - B_H\|_\infty > \frac{\varepsilon}{3} r(n) \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому в силу (48) и (49)

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2(n)} \ln \mathbf{P} \left\{ \omega \left(\frac{1}{r(n)} Z_n, \delta \right) \geq \varepsilon \right\} \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2(n)} \ln \left[\mathbf{P} \left\{ \omega \left(\frac{1}{r(n)} B_H, \delta \right) \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{P} \left\{ \|Z_n - B_H\|_\infty > \frac{\varepsilon}{3} r(n) \right\} \right] \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2(n)} \ln \left[e^{-Nr^2(n)} + \mathbf{P} \left\{ \|Z_n - B_H\|_\infty > \frac{\varepsilon}{3} r(n) \right\} \right] \leq -N \end{aligned}$$

при всех $0 < \delta < \theta$. Итак, мы получили, что для любого положительного ε имеет место соотношение

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2(n)} \ln \mathbf{P} \left\{ \omega \left(\frac{1}{r(n)} Z_n, \delta \right) \geq \varepsilon \right\} = -\infty, \quad (50)$$

что как раз и означает, что условие (A_2) выполнено. Кроме того, из леммы 3 следует также выполнение и условия (A_1) . Тем самым, в силу предложения 5, семейство $\{Z_n/r(n)\}$ удовлетворяет $(\Lambda, r^2(n))$ -ПБУ в нижней зоне $\mathcal{M}_+$, где Λ — функционал действия, определенный для процесса B_H . Итак, мы полностью доказали утверждение теоремы 1, относящееся к пространству $C[0, 1]$.

2.5. Доказательство теоремы 1 в пространстве $L_p[0, 1]$, $p \geq 1$.

Прежде всего отметим, что вложение пространства $C[0, 1]$ в пространство $L_p[0, 1]$ непрерывно. Поэтому в силу известного принципа сжатия (см., например, [19]) последовательность $Z_n/r(n)$ удовлетворяет $(J, r^2(n))$ -ПБУ в $L_p[0, 1]$ с функционалом действия

$$J(f) = \begin{cases} \inf\{\Lambda(g): M(g) = f\}, & \text{если } f \in \text{Im}(M), \\ \infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Осталось заметить, что функционал действия $\Lambda(f)$, определенный формулой (3), совпадает с $J(f)$. Теорема 1 доказана.

2.6. Доказательство предложения 4. Покажем, что если при $|n| \rightarrow \infty$

$$|a_n| = O(|n|^{H-3/2}), \quad |A_n| = O(|n|^{H-1/2}),$$

то выполнено условие (Π_H) . Сначала рассмотрим случай $H \geq \frac{1}{2}$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbf{Z}} |A_{n-i} - A_{-i}|^l &= \sum_{i=0}^{n-1} |A_i - A_{i-n}|^l + \sum_{i=0}^{n-1} |A_{n+i} - A_i|^l + \sum_{i=n}^{\infty} |A_{n+i} - A_i|^l \\ &\quad + \sum_{i=n}^{2n-1} |A_{n-i} - A_{-i}|^l + \sum_{i=2n}^{\infty} |A_{n-i} - A_{-i}|^l. \end{aligned} \quad (51)$$

Оценим первое слагаемое правой части (51). Поскольку справедливо неравенство $|A_i| \leq c_1(|i| + 1)^{H-1/2}$, то

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} |A_i - A_{i-n}|^l &\leq 2^l \sum_{i=-n}^n |A_i| \leq \sum_{i=-n}^n (2c_1)^l (|i| + 1)^{l(H-1/2)} \\ &\leq c_2^{l+1} n^{l(H-1/2)+1}. \end{aligned} \quad (52)$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое правой части (51). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} |A_{n+i} - A_i|^l &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(2c_1(n+i+1)^{H-1/2} \right)^l \\ &\leq \sum_{i=0}^{2n} (2c_1)^l i^{l(H-1/2)} \leq c_3^{l+1} n^{l(H-1/2)+1}. \end{aligned} \quad (53)$$

Оценим третье слагаемое правой части (51). Так как $|a_i| \leq c_4 i^{H-3/2}$ при $i \geq 1$, то $|A_{n+i} - A_i| \leq c_4 n i^{H-3/2}$ и, стало быть,

$$\sum_{i=n}^{\infty} |A_{n+i} - A_i|^l \leq \sum_{i=n}^{\infty} c_4^l n^l i^{l(H-3/2)} \leq c_5^{l+1} n^{l(H-1/2)+1}. \quad (54)$$

Оценка для четвертого слагаемого правой части (51) получается аналогично оценке второго слагаемого, т.е.

$$\sum_{i=n}^{2n-1} |A_{n-i} - A_{-i}|^l \leq c_6^{l+1} n^{l(H-1/2)+1}. \quad (55)$$

Наконец, оценка для пятого слагаемого получается аналогично оценке третьего слагаемого правой части (51), т.е.

$$\sum_{i=2n}^{\infty} |A_{n-i} - A_{-i}|^l \leq c_7^{l+1} n^{l(H-1/2)+1}. \quad (56)$$

Объединяя оценки (52)–(56), получаем неравенство (9) для $H \geq \frac{1}{2}$ (в качестве d можно взять $\max\{c_2, c_3, c_5, c_6, c_7\}$). Случай $H < \frac{1}{2}$ рассматривается совершенно аналогично.

Далее, покажем, что условие (III_H) обеспечивает выполнение условия (I_H) . Введем обозначения:

$$E_0 := a_0 - \sigma L_H^{-1/2}, \quad E_n := a_n - \sigma L_H^{-1/2}((n+1)^{H-1/2} - n^{H-1/2}), \quad n \geq 1;$$

$$F_n := A_n - \sigma L_H^{-1/2}(n+1)^{H-1/2}, \quad n \geq 0.$$

Из условий (10) и (11) при всех $n \geq 0$ получаем следующие неравенства:

$$|E_n| + |a_{-n}| \leq c(n+1)^{H-\delta-3/2}, \quad (57)$$

$$|F_n| + |A_{-n}| \leq c(n+1)^{H-\delta-1/2}. \quad (58)$$

Разобьем величину DS_n следующим образом:

$$\begin{aligned} DS_n &= \sum_{k=n}^{\infty} (A_{n+k} - A_k)^2 + \sum_{k=0}^{n-1} (A_{n+k} - A_k)^2 + \sum_{k=1}^n (A_{n-k} - A_{-k})^2 \\ &+ \sum_{k=n+1}^{2n} (A_{n-k} - A_{-k})^2 + \sum_{k=2n+1}^{\infty} (A_{n-k} - A_{-k})^2. \end{aligned} \quad (59)$$

Рассмотрим первое слагаемое правой части (59). Имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{k=n}^{\infty} (A_{n+k} - A_k)^2 \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \left(F_{n+k} - F_k + \sigma L_H^{-1/2}(n+k+1)^{H-1/2} - \sigma L_H^{-1/2}(k+1)^{H-1/2} \right)^2 \\ &= \sigma^2 L_H^{-1} \sum_{k=n}^{\infty} \left((n+k+1)^{H-1/2} - (k+1)^{H-1/2} \right)^2 \\ &+ \sum_{k=n}^{\infty} (F_{n+k} - F_k)^2 \\ &+ 2\sigma L_H^{-1/2} \sum_{k=n}^{\infty} (F_{n+k} - F_k) \left((n+k+1)^{H-1/2} - (k+1)^{H-1/2} \right). \end{aligned} \quad (60)$$

Для первого слагаемого правой части (60) имеет место следующая асимптотика:

$$\begin{aligned} & \sigma^2 L_H^{-1} \sum_{k=n}^{\infty} \left((n+k+1)^{H-1/2} - (k+1)^{H-1/2} \right)^2 \\ &= \sigma^2 L_H^{-1} n^{2H} \sum_{k=n}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{k+1}{n} \right)^{H-1/2} - \left(\frac{k+1}{n} \right)^{H-1/2} \right)^2 \frac{1}{n} \\ &\sim \sigma^2 L_H^{-1} n^{2H} \int_1^{\infty} \left((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2} \right)^2 ds \end{aligned} \quad (61)$$

при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим второе слагаемое правой части (60):

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} (F_{n+k} - F_k)^2 &= \sum_{k=n}^{\infty} \left(\sum_{i=k+1}^{n+k} E_i \right)^2 \leq c^2 n^2 \sum_{k=n}^{\infty} (n+k)^{2H-2\delta-3} \\ &\leq c_1 n^{2H-2\delta} = o(n^{2H}) \end{aligned} \quad (62)$$

при $n \rightarrow \infty$. Аналогично (62) доказывается следующее соотношение:

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} (F_{n+k} - F_k) \left((n+k+1)^{H-1/2} - (k+1)^{H-1/2} \right) \right| = o(n^{2H}). \quad (63)$$

Итак, из (61)–(63) мы получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=n}^{\infty} (A_{n+k} - A_k)^2 \sim \sigma^2 L_H^{-1} n^{2H} \int_1^{\infty} \left((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2} \right)^2 ds. \quad (64)$$

Оценим второе слагаемое правой части (59). Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} (A_{n+k} - A_k)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(F_{n+k} - F_k + \sigma L_H^{-1/2} (n+k+1)^{H-1/2} - \sigma L_H^{-1/2} (k+1)^{H-1/2} \right)^2 \\ &= \sigma^2 L_H^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left((n+k+1)^{H-1/2} - (k+1)^{H-1/2} \right)^2 + \sum_{k=0}^{n-1} (F_{n+k} - F_k)^2 \\ &\quad + 2\sigma L_H^{-1/2} \sum_{k=0}^{n-1} (F_{n+k} - F_k) \left((n+k+1)^{H-1/2} - (k+1)^{H-1/2} \right). \end{aligned} \quad (65)$$

Рассмотрим первое слагаемое правой части (65):

$$\begin{aligned} & \sigma^2 L_H^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left((n+k+1)^{H-1/2} - (k+1)^{H-1/2} \right)^2 \\ &= \sigma^2 L_H^{-1} n^{2H} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(1 + \frac{k+1}{n} \right)^{H-1/2} - \left(\frac{k+1}{n} \right)^{H-1/2} \right)^2 \frac{1}{n} \\ &\sim \sigma^2 L_H^{-1} n^{2H} \int_0^1 \left((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2} \right)^2 ds \end{aligned} \quad (66)$$

при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим второе слагаемое правой части (65):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (F_{n+k} - F_k)^2 &\leq 2 \sum_{k=0}^{n-1} F_{n+k}^2 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} F_k^2 \\ &\leq 2c^2 \sum_{k=0}^{n-1} (n+k+1)^{2H-2\delta-1} + 2c^2 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^{2H-2\delta-1} \\ &\leq c_1^2 n^{\max\{2H-2\delta, 0\}} = o(n^{2H}) \end{aligned} \quad (67)$$

при $n \rightarrow \infty$. Аналогично (67) оценивается и третье слагаемое правой части (65). В итоге получаем оценку

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} (F_{n+k} - F_k) \left((n+k+1)^{H-1/2} - (k+1)^{H-1/2} \right) \right| = o(n^{2H}). \quad (68)$$

Тем самым, из (66)–(68) мы выводим оценку второго слагаемого правой части (59):

$$\sum_{k=0}^{n-1} (A_{n+k} - A_k)^2 \sim \sigma^2 L_H^{-1} n^{2H} \int_0^1 \left((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2} \right)^2 ds \quad (69)$$

при $n \rightarrow \infty$. Повторяя приведенные рассуждения, мы получаем оценки для третьего и четвертого слагаемых правой части (59):

$$\sum_{k=1}^n (A_{n-k} - A_{-k})^2 \sim \sigma^2 L_H^{-1} n^{2H} \frac{1}{2H}, \quad (70)$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} (A_{n-k} - A_{-k})^2 = o(n^{2H}) \quad (71)$$

при $n \rightarrow \infty$. Наконец, оценка для пятого слагаемого правой части (59) получается аналогично (62), т.е.

$$\sum_{k=2n+1}^{\infty} (A_{n-k} - A_{-k})^2 = o(n^{2H}) \quad (72)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Объединяя оценки (64), (69)–(72), получаем, что $\mathbf{D}S_n \sim \sigma^2$ при $n \rightarrow \infty$. Предложение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пухальский А. А. К теории больших уклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 3, с. 553–562.
2. Puhalskii A. On functional principle of large deviations. — New Trends in Probability and Statistics, v. 1. Utrecht: VSP, 1991, с. 198–218.
3. Боровков А. А., Мозульский А. А., Сатаненко А. И. Предельные теоремы для случайных процессов. М.: ВИНТИ, 1995. (Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы матем. Фундам. напр., т. 82.)
4. Богачев В. И. Гауссовские меры. М.: Наука, 1997, 352 с.

5. *Ben Arous G., Ledoux M.* Schilder's large deviation principle without topology. Asymptotic Problems in Probability Theory: Wiener Functionals and Asymptotics. Harlow: Longman, 1993, p. 107–121. (Pitman Res. Notes Math. Ser., v. 284.)
6. *Лифшиц М. А.* Гауссовские случайные функции. Киев: ТВиМС, 1995, 246 с.
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989, 623 с.
8. *Decreusefond L., Üstünel A. S.* Stochastic analysis of the fractional Brownian motion. — Potential Anal., 1999, v. 10, № 2, p. 177–214.
9. *Боровков А. А.* Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, в. 4, с. 635–654.
10. *Mandelbrot B. B., Van Ness J. W.* Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. — SIAM Rev., 1968, v. 10, p. 422–437.
11. *Давыдов Ю. А.* Принцип инвариантности для стационарных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. 24, в. 15, с. 498–509.
12. *Аркашов Н. С., Борисов И. С.* Гауссовская аппроксимация процессов частных сумм скользящих средних. — Сиб. матем. журн., 2004, т. 45, № 6, с. 1221–1255.
13. *Varadhan S. R. S.* Asymptotic probabilities and differential equations. — Comm. Pure Appl. Math., 1966, v. 19, № 3, p. 261–286.
14. *Могульский А. А.* Большие уклонения для траекторий многомерных случайных блужданий. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. 21, в. 2, с. 309–323.
15. *Могульский А. А.* Большие уклонения в пространстве траекторий для последовательностей и процессов со стационарными приращениями. — Сиб. матем. журн., 1975, т. 16, № 2, с. 314–327.
16. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.
17. *Konstantopoulos T., Sakhanenko A.* Convergence and convergence rate to fractional Brownian motion for weighted random sums. — Сиб. электронные матем. известия, 2004, т. 1, с. 47–63.
18. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989, 391 с.
19. *Dembo A., Zeitouni O.* Large Deviations Techniques and Applications. Boston: Jones and Bartlett, 1993, 346 p.

Поступила в редакцию
8.IV.2005

Исправленный вариант
22.V.2006