Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Гирко, Уточнение центральной предельной теоремы для случайных детерминантов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 1, 63–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1712>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:28:20

© 1997 г.

ГИРКО В. Л.*

УТОЧНЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ
ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ДЕТЕРМИНАНТОВ

При более слабых условиях, чем те, которые использовались автором ранее, доказана центральная предельная теорема (*логарифмический закон*) для случайных детерминантов: если для каждого n случайные элементы $\xi_{ij}^{(n)}$, $i, j = 1, \dots, n$, матрицы $\Xi = (\xi_{ij}/n)$ независимы, $E\xi_{ij}^{(n)} = a$, $\text{Var} \xi_{ij}^{(n)} = 1$ и для некоторого $\delta > 0$

$$\sup_n \max_{i,j=1,\dots,n} E|\xi_{ij}^{(n)}|^{4+\delta} < \infty,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log \det \Xi^2 - \log(n-1)! - \log(1+na^2)}{\sqrt{2 \log n}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

Ключевые слова и фразы: логарифмический закон, случайные детерминанты, метод перпендикуляров, нормальная регуляризация.

1. Введение. В теории случайных детерминантов одной из основных задач является следующая: найти предельные функции распределения для последовательности случайных величин $b_n^{-1}(\log |\det \Xi_n| - a_n)$, где $\Xi = (\xi_{ij}^{(n)})$ — случайная матрица, b_n и a_n — некоторые константы. Автором этой статьи разработано три метода доказательства центральной предельной теоремы для случайных детерминантов: метод возмущений, метод ортогональных преобразований, или метод перпендикуляров, и метод интегральных представлений. Каждый из этих методов имеет преимущества и недостатки по сравнению с двумя другими, о чем подробно говорится во введении к книге автора [5]. Но метод перпендикуляров среди этих методов занимает основное место. С его помощью доказан так называемый логарифмический закон. Формулировка логарифмического закона в 1979 году отличалась от настоящей тем, что мы требовали, чтобы выполнялись два дополнительных условия $E[\xi_{ij}^{(n)} \sqrt{n}]^4 = 3$,

*Киевский национальный университет им. Т. Г. Шевченко, факультет кибернетики, кафедра прикладной статистики, ул. Владимирская, 64, 252017 Киев, Украина.

$i, j = 1, 2, \dots$, и $E\xi_{ij}^{(n)} = 0$. Долгое время считалось, что эти условия существенные и что без них нельзя доказать логарифмический закон. Однако после долгих лет исследований выяснилось, что эти условия не нужны.

2. Метод перпендикуляров. Пусть Ξ — квадратная матрица n -го порядка. Мы будем пользоваться формулой

$$\frac{\det \Xi_{k-1} \Xi_{k-1}^T}{\det \Xi_k \Xi_k^T} = \xi_k [I - \Xi_k^T (\Xi_k \Xi_k^T)^{-1} \Xi_k] \xi_k^T, \quad (2.1)$$

$k = 1, \dots, n-1$, где матрица Ξ_k получена из матрицы Ξ вычеркиванием первых ее k строк: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$. Предполагается, что матрицы $(\Xi_k \Xi_k^T)^{-1}$ существуют, $\Xi_n^T (\Xi_n \Xi_n^T)^{-1} \Xi_n = 0$, $\det \Xi_n \Xi_n^T = 1$, $\Xi_0 = \Xi$.

В силу (2.1) имеем

$$\det \Xi \Xi^T = \prod_{k=1}^n \gamma_k, \quad \gamma_k = \frac{\det \Xi_{k-1} \Xi_{k-1}^T}{\det \Xi_k \Xi_k^T} = \xi_k [I - \Xi_k^T (\Xi_k \Xi_k^T)^{-1} \Xi_k] \xi_k^T, \quad (2.2)$$

где по определению: $\Xi_n^T (\Xi_n \Xi_n^T)^{-1} \Xi_n = 0$, $\det \Xi_n \Xi_n^T = 1$, $\Xi_0 = \Xi$.

Матрица $H_k := \Xi_k^T (\Xi_k \Xi_k^T)^{-1} \Xi_k$ является симметричной и идемпотентной, т.е. $H_k^2 = H_k$. Так как ее собственные числа принимают только два значения, 0 и 1: $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-k} = 1$, $\lambda_{n-k+1} = \dots = \lambda_n = 0$, то эту матрицу можно представить в виде

$$I - \Xi_k^T (\Xi_k \Xi_k^T)^{-1} \Xi_k = \sum_{s=1}^k h_s^{(k)} h_s^{(k)T},$$

где $h_s^{(k)}$ — некоторые ортонормированные случайные векторы.

Если мы определим $\det \Xi \Xi^T$ как объем некоторого параллелепипеда в евклидовом пространстве, то мы можем назвать величины γ_k длинами векторов-перпендикуляров, т.е. длинами соответствующих векторов-высот параллелепипеда. Тогда объем параллелепипеда равен произведению длин векторов-высот. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1.

$$\det \Xi \Xi^T = \prod_{k=1}^n \gamma_k,$$

где

$$\gamma_k = \begin{cases} \xi_k [I - \Xi_k^T (\Xi_k \Xi_k^T)^{-1} \Xi_k] \xi_k^T, & \det \Xi_k \Xi_k^T \neq 0, \\ \sum_{s=1}^k (\xi_k h_s)^2, & \det \Xi_k \Xi_k^T = 0, \end{cases} \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$\gamma_n = \xi_n \xi_n^T$, h_s — произвольные ортонормированные неслучайные векторы.

Если элементы матрицы Ξ независимы и распределены по стандартному нормальному закону, то легко видеть, что случайные величины $\{\gamma_k\}$ независимы и γ_k распределена по хи-квадрат закону с k степенями свободы.

3. Метод нормальной регуляризации случайных детерминантов. Поясним кратко метод нормальной регуляризации случайных детерминантов. Величина γ_k равна сумме k положительных величин. Мы увидим в следующем разделе, что к таким γ_k можно применить предельные теоремы, когда k стремится к бесконечности и для каждого n случайные элементы $\xi_{ij}^{(n)}$, $i, j = 1, \dots, n$, матрицы $\Xi = (\xi_{ij}^{(n)})$ независимы, $E\xi_{ij}^{(n)} = 0$, $\text{Var} \xi_{ij}^{(n)} = 1$. Но мы пока еще не можем использовать предельные теоремы для величин γ_k с фиксированным k . Эти величины могут существенно влиять на распределение случайного детерминанта. В случае, если элементы матрицы имеют дискретное распределение, γ_k могут принимать нулевые значения с положительной вероятностью, и тогда «о логарифмическом законе» не может быть и речи. Но оказывается, что для таких величин можно применить предельные теоремы, но при дополнительном условии $\sup_n \sup_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m} E|\xi_{ij}^{(n)}|^{4+\delta} < \infty$, и доказать, что предельное распределение величин γ_k непрерывно — тогда этими величинами можно пренебречь при доказательстве логарифмического закона. Докажем следующее вспомогательное утверждение при более широких предположениях об элементах случайной матрицы.

Теорема 2. Пусть элементы $\xi_{ij}^{(n)}$ матрицы $\Xi = (\xi_{ij}^{(n)})_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, n}$ независимы,

$$E\xi_{ij}^{(n)} = a_{ij}^{(n)}, \quad \text{Var} \xi_{ij}^{(n)} = \sigma_{ij}^{(n)}, \quad 0 < c_1 < \sigma_{ij}^2 < c_2 < \infty, \quad (3.1)$$

для некоторого $\delta > 0$

$$\sup_n \sup_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m_n} E|\xi_{ij}^{(n)} - a_{ij}^{(n)}|^{4+\delta} < \infty, \quad (3.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{p=1, \dots, n} n^{-1} \sum_{j=1}^n a_{pj}^2 = 0. \quad (3.3)$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sum_{j=1}^n [\xi_{1i}^{(n)} - a_{1i}^{(n)}] \alpha_{1i}^{(n)} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy, \quad (3.4)$$

где

$$\alpha_{1i}^{(n)} = \begin{cases} A_{1i} (\sum_{i=1}^n \sigma_{1i}^2 A_{1i}^2)^{-1/2}, & \sum_{i=1}^n \sigma_{1i}^2 A_{1i}^2 \neq 0, \\ n^{-1/2}, & \sum_{i=1}^n \sigma_{1i}^2 A_{1i}^2 = 0, \end{cases}$$

и A_{1i} есть алгебраическое дополнение элемента $\xi_{ij}^{(n)}$ матрицы Ξ_n .

Доказательство. По центральной предельной теореме равенство (3.4) имеет место, если выполняется условие Ляпунова: для некоторого $\delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \sum_{i=1}^n \left| [\xi_{1i}^{(n)} - a_{1i}^{(n)}] \alpha_{1i}^{(n)} \right|^{2+\delta} = 0. \quad (3.5)$$

Если условие (3.2) выполняется, то условие (3.5) имеет место, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n E |\alpha_{1k}^{(n)}|^{2+\delta} = 0. \quad (3.6)$$

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^n \sigma_{1i}^2 A_{1i}^2 = E \{ \det A_n^2 \mid \Xi_n \},$$

где матрица A_n получена из матрицы Ξ_n заменой ее первой строки вектором ν , который не зависит от матрицы Ξ_n и нормально распределен: $N(0, \Lambda)$, $\Lambda = (\sigma_{1i}^2 \delta_{ij})_{i,j=1}^n$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Используя эту формулу, получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{1k}^{(n)} &= \left[E \{ \det A_n^2 (\det A_{1k})^{-2} \mid \Xi_n \} \right]^{-1/2} \\ &= \begin{cases} [\sigma_{1k}^2 + n^{-1} \xi_k^T \{ \Xi_k^{(1)} \}^{-1} \Lambda_k^{(1)} \{ \Xi_k^{(1)} \}^{-1} \xi_k]^{1/2}, & \sum_{i=1}^n \sigma_{1i}^2 A_{1i}^2 \neq 0, \\ \alpha_{1k}^{(n)} = n^{-1/2}, & \sum_{i=1}^n \sigma_{1i}^2 A_{1i}^2 = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

где матрица $\Xi_k^{(1)}$ получена из матрицы Ξ_n вычеркиванием ее первой строки и k -го столбца, $\xi_k = (\xi_{2k}^{(n)}, \dots, \xi_{nk}^{(n)})^T$.

Легко проверить, что

$$\xi_k^T \{ \Xi_k^{(1)} \}^{-1} \Lambda_k^{(1)} \{ \Xi_k^{(1)} \}^{-1} \xi_k \geq c \xi_k^T B^{-1}(1_k) \xi_k \geq c \xi_k^T R_k(t) \xi_k,$$

где $R_k(t) = (r_{ij}^{(k)}(t)) = [tI + B(\frac{1}{k})]^{-1}$, $B(\frac{1}{k}) = n^{-1}\Xi(\frac{1}{k})\Xi^T(\frac{1}{k})$ и t есть произвольное положительное число.

В силу этого неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sum_{i=1}^n |\alpha_{1i}|^{2+\delta} &\leq \frac{\mathbf{P}\{\sum_{i=1}^n A_{1i}^2 = 0\}}{n^{\delta/2}} \\ &+ c \mathbf{E} \sum_{k=1}^n \alpha_{1k}^2 [1 + n^{-1} \nu_k^T R_k(t) \nu_k + 2n^{-1} \nu_k^T R_k(t) \mathbf{a}_k \\ &\quad + n^{-1} \mathbf{a}_k^T R_k(t) \mathbf{a}_k]^{-\delta/2}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $\nu_k = \xi_k - \mathbf{a}_k$.

Используя условия (3.1)–(3.3), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[n^{-1} \nu_k^T R_k(t) \nu_k - n^{-1} \sum_{s=1}^{n-1} r_{ss}^{(k)} \tilde{\nu}_{sk}^{-2} \right]^4 &\leq cn^{-2} t^{-4}, \\ \mathbf{E} [n^{-1} \nu_k^T R_k(t) \mathbf{a}_k]^2 &\leq cn^{-2} t^{-2} \mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_k, \\ \mathbf{a}_k^T R_k(t) \mathbf{a}_k &\leq \mathbf{a}_k^T \mathbf{a}_k t^{-1}, \\ \mathbf{E} \left| n^{-1} \sum_{s=1}^{n-1} [r_{ss}^{(k)} \tilde{\nu}_{sk}^2 - r_{ss}^{(k)} \tilde{\sigma}_{sk}^2] \right|^{2+\delta} &\leq cn^{-1-\delta} t^{-2-\delta}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\tilde{\nu}_{sk}$ — компоненты вектора ν_k , $\tilde{\sigma}_{sk} = \text{Var } \xi_{sk}$, ξ_{sk} — компоненты вектора ξ_k .

Воспользуемся неравенствами (см. [5, с. 143])

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left| \sum_{s=1}^{n-1} n^{-1} [r_{ss}^{(k)} \tilde{\sigma}_{sk}^2 - \mathbf{E} r_{ss}^{(k)} \tilde{\sigma}_{sk}^2] \right|^4 &\leq cn^{-2} t^{-4}, \\ \left| \sum_{s=1}^{n-1} n^{-1} [r_{ss}^{(k)} \tilde{\sigma}_{sk}^2 - r_{ss} \tilde{\sigma}_{sk}^2] \right| &\leq cn^{-1} t^{-1}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$R(t) = (r_{sp}) = (tI + n^{-1}\Xi\Xi^T)^{-1}. \quad (3.11)$$

Из (3.9)–(3.11) для любого $t > 0$ и $\varepsilon > 0$ получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{P} \left\{ n^{-1} \left| \nu_k^T R_k(t) \nu_k - \sum_{s=1}^n \mathbf{E} r_{ss} \sigma_{sk}^2 \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Тогда, принимая во внимание (3.8), находим

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_{1k}^2}{[1 + n^{-1} \xi_k^T R_k(t) \xi_k]^{\delta/2}} \\
& \leq \max_{k=1, \dots, n} \frac{1}{[1 + n^{-1} \sum_{s=1}^n \mathbf{E} r_{ss} \sigma_{sk}^2 + n^{-1} \mathbf{a}_k^T T_k(t) \mathbf{a}_k - \varepsilon]^{\delta/2}} + o(1) \\
& \leq \max_{k=1, \dots, n} \frac{1}{[1 + cn^{-1} \sum_{s=1}^n \mathbf{E} r_{ss} - \varepsilon]^{\delta/2}} + o(1). \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Используя формулы возмущений для матриц, имеем [5]

$$n^{-1} \mathbf{E} \operatorname{Tr} R(t) = n^{-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{E} [t + n^{-1} \mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T - n^{-1} \mathbf{q}_k \Xi_k^T R_k(t) \Xi_k \mathbf{q}_k^T]^{-1}, \quad (3.13)$$

где Ξ_k — матрица, полученная вычеркиванием k -й строки $\mathbf{q}_k$ матрицы Ξ .

Но $I_n - n^{-1} \Xi_k^T (tI_n + n^{-1} \Xi_k \Xi_k^T)^{-1} \Xi_k = t(tI_n + n^{-1} \Xi_k^T \Xi_k)^{-1}$. Поэтому из (3.13) следует

$$n^{-1} \mathbf{E} \operatorname{Tr} R(t) = n^{-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{E} [t + tn^{-1} \mathbf{q}_k (tI_n + n^{-1} \Xi_k^T \Xi_k)^{-1} \mathbf{q}_k^T]^{-1}.$$

Из этих равенств и соотношений (3.9)–(3.11) находим

$$\begin{aligned}
m(t) &:= n^{-1} \mathbf{E} \operatorname{Tr} R(t) \\
&= n^{-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{E} \left[t + t \sum_{s=1}^{n-1} \mathbf{E} \{ (tI + n^{-1} \Xi_k^T \Xi_k)^{-1} \}_{ss} \tilde{\sigma}_{sk}^2 \right. \\
&\quad \left. + n^{-1} \mathbf{a}_k^T (tI_n + n^{-1} \Xi_k^T \Xi_k)^{-1} \mathbf{a}_k \right] + o(1), \quad (3.14)
\end{aligned}$$

где символ « $:=$ » означает равенство по определению.

Из [5, с. 143] следует

$$\mathbf{E} \operatorname{Tr} (tI_n + \Xi_k^T \Xi_k)^{-1} = n^{-1} \mathbf{E} \operatorname{Tr} R(t) + o(1).$$

Поэтому в силу (3.3) из (3.14) имеем $m(t) = n^{-1} \mathbf{E} \operatorname{Tr} R(t) \geq [t + ct m(t)]^{-1} + o(1)$. Решая это неравенство, находим

$$n^{-1} \mathbf{E} \operatorname{Tr} R(t) \geq 2 \left[t + \sqrt{t^2 + 4tc} \right]^{-1} + o(1). \quad (3.15)$$

Устремляя t к нулю, получаем (3.6) из (3.8) и (3.15). Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 2 остается верной, если условие (3.3) заменить на условие

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{p=1, \dots, s_n} n^{-1} \sum_{j=1}^n a_{pj}^2 < \infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n n^{-1} = 0.$$

4. Логарифмический закон.

Теорема 3 (логарифмический закон). Если для каждого n случайные элементы $\xi_{ij}^{(n)}$, $i, j = 1, \dots, n$, матрицы $\Xi = (\xi_{ij}^{(n)})$ независимы, $E\xi_{ij}^{(n)} = a$, $\text{Var} \xi_{ij}^{(n)} = 1$ и $\sup_n \max_{i,j=1,\dots,n} E|\xi_{ij}^{(n)}|^{4+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\log \det \Xi^2 - \log(n-1)! - \log(1+na^2)}{\sqrt{2 \log n}} < x \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) du.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\det \Xi = \det \begin{bmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nn} & 0 \\ a & \cdots & a & 1 \end{bmatrix} = \det H_{(n+1) \times (n+1)},$$

$$H_{(n+1) \times (n+1)} = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \cdots & \eta_{1n} & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \eta_{n1} & \cdots & \eta_{nn} & -1 \\ a & \cdots & a & 1 \end{bmatrix},$$

где $\eta_{ij} = \xi_{ij} - a$.

Обозначим A_{nk} матрицу, вектор-строки которой: а) равны соответствующим вектор-строкам матрицы Ξ_n за исключением первых k вектор-строк с номерами $1, \dots, k$; б) независимы, не зависят от матрицы Ξ_n и распределены по стандартному нормальному закону $\mathcal{N}(0, I)$. В силу теоремы 2 имеем (см. также замечание 1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[E \exp \left\{ it (2 \log n)^{-1/2} \log \frac{\det H_n^2}{(n-1)!(1+na^2)} \right\} - E \exp \left\{ it (2 \log n)^{-1/2} \log \frac{\det A_{n,1}^2}{(n-1)!(1+na^2)} \right\} \right] = 0.$$

В этом выражении считаем, что $\exp(\pm\infty) = 0$.

Используя теорему 2, соответственно, s раз, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[E \exp \left\{ it (2 \log n)^{-1/2} \log \frac{\det H_n^2}{(n-1)!(1+na^2)} \right\} - E \exp \left\{ it (2 \log n)^{-1/2} \log \frac{\det A_{n,s}^2}{(n-1)!(1+na^2)} \right\} \right] = 0.$$

Этот предел дает возможность рассматривать матрицу A_{ns} вместо матрицы H . Применяя теорему 2 к матрице A_{ns} , мы снова придем к величинам γ_k :

$$\det A_{ns}^2 = \prod_{k=1}^{n+1} \gamma_k; \quad \gamma_{n+1} = 1 + na^2,$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \xi_k [I - H_k^T (H_k H_k^T)^{-1} H_k] \xi_k^T, & \det H_k H_k^T \neq 0, \\ \sum_{s=1}^k (\xi_k h_s)^2, & \det H_k H_k^T = 0, \end{cases}$$

$k = 1, \dots, n$, h_s — произвольные ортонормированные неслучайные векторы, и ξ_k — вектор-строки матрицы H , но теперь первые s величин γ_k будут иметь хи-квадрат распределения и они не повлияют на предельное распределение нормированного случайного детерминанта. Поэтому для каждого фиксированного s

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} (2 \log n)^{-1/2} \sum_{k=1}^s \log \gamma_k = 0. \quad (4.1)$$

Поскольку в теореме 1 h_s — это произвольные ортогональные векторы, с целью упрощения выражений будем считать, что существуют обратные матрицы $(H_k H_k^T)^{-1}$. Используя метод перпендикуляров, имеем

$$\log \det H_n^2 - \log n! = \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{\gamma_k - k}{k} \right),$$

где $\gamma_k = \xi_k [I - H_k^T (H_k H_k^T)^{-1} H_k] \xi_k^T$ и ξ_k — вектор-строки матрицы H .

Очевидно, что для любого $0 < \varepsilon < 1$ и для некоторого $\delta > 0$ (см. [2])

$$\begin{aligned} P \left\{ \left| \frac{\gamma_k - k}{k} \right| < \varepsilon, k = s+1, \dots, n \right\} &\geq P \left\{ \sum_{k=s+1}^n \left| \frac{\gamma_k - k}{k} \right|^{2+\delta} < \varepsilon^{2+\delta} \right\} \\ &\geq 1 - E \sum_{k=s+1}^n \left| \frac{\gamma_k - k}{k} \right|^{2+\delta} \varepsilon^{-2-\delta} \geq c \sum_{k=s+1}^n k^{-1-\delta/2} \varepsilon^{-2-\delta}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из (4.2) получаем

$$\sum_{k=s+1}^n \log \left(1 + \frac{\gamma_k - k}{k} \right) = \sum_{k=s+1}^n \frac{\gamma_k - k}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=s+1}^n \left(\frac{\gamma_k - k}{k} \right)^2 + \varepsilon_{s,n}, \quad (4.3)$$

где $p \lim_{s,n \rightarrow \infty} |\varepsilon_{s,n}| < \infty$, и

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \left(\frac{\gamma_k - k}{k} \right)^2 \middle| \xi_i, i \neq k \right\} &= \frac{1}{k} [1 - H_k^T (H_k H_k^T)^{-1} H_k]_{n+1, n+1} \\ &= \frac{1}{k} [I + \eta_{n+1}^T (H_k^{(n+1)} H_k^{(n+1)T})^{-1} \eta_{n+1}]^{-1}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \left(\frac{\gamma_k - k}{k} \right)^2 \middle| \xi_i, i \neq k \right\} &= \frac{2}{k} \\ &+ \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^n \left\{ [I - H_k^T (H_k H_k^T)^{-1} H_k]_{ii} \right\}^2 \mathbf{E}(\xi_{ki}^4 - 3) \\ &+ \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{n+1} \left\{ [I - H_k^T (H_k H_k^T)^{-1} H_k]_{i, n+1} \right\}^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^n [I + \eta_i^T (H_k^{(i)} H_k^{(i)T})^{-1} \eta_i]^{-2} \mathbf{E}(\xi_{ki}^4 - 3) \\ &+ \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{n+1} \left\{ [I - H_k^T (H_k H_k^T)^{-1} H_k]_{i, n+1} \right\}^2, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где η_i — векторы-столбцы матрицы H_k и матрица $H_k^{(i)}$ получена из матрицы H_k вычеркиванием вектор-столбца η_i .

Лемма 1. В условиях теоремы 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}} \mathbf{E} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^n |\mathbf{E} \xi_{ki}^4 - 3| [I + \eta_i^T (H_k^{(i)} H_k^{(i)T})^{-1} \eta_i]^{-2} = 0.$$

Доказательство. Пусть

$$R_i^{(k)} = \left[\alpha I + \frac{1}{n} H_k^{(i)} H_k^{(i)T} \right]^{-1}, \quad R^{(k)} = \left[\alpha I + \frac{1}{n} H_k H_k^T \right]^{-1}, \quad \alpha > 0.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n |\mathbf{E} \xi_{ki}^4 - 3| [I + \eta_i^T (H_k^{(i)} H_k^{(i)T})^{-1} \eta_i]^{-1} \\ &\leq \max_{i=1, \dots, n} |\mathbf{E} \xi_{ki}^4 - 3| \operatorname{Tr} [I - H_k^T (H_k H_k^T)^{-1} H_k] = k \max_{i=1, \dots, n} |\mathbf{E} \xi_{ki}^4 - 3|, \end{aligned}$$

то используя те же самые преобразования, что и при доказательстве (3.14) и (3.15), для любого m_n такого, что

$$m_n n^{-1} = \varepsilon_n (\log n)^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

и $\alpha > 0$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, имеем:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{\log n}} \mathbf{E} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^n |\mathbf{E} \xi_{ki}^4 - 3| \left[I + \eta_i^T (H_k^{(i)} H_k^{(i)T})^{-1} \eta_i \right]^{-2} \\
 & \leq c \frac{\log m}{\sqrt{\log n}} \max_{k=1, \dots, m_n} \mathbf{E} \max_{i=1, \dots, n} \left[1 + n^{-1} \eta_i^T R_i^{(k)} \eta_i \right]^{-1} + c \frac{\log m_n^{-1} n}{\sqrt{\log n}} \\
 & \leq c \frac{\log m}{\sqrt{\log n}} \max_{k=1, \dots, m_n} \mathbf{E} \left[1 + n^{-1} \text{Tr} R^{(k)} - \varepsilon \right]^{-1} + c \frac{\log m_n^{-1} n}{\sqrt{\log n}} \\
 & \quad + c \frac{\log m}{\sqrt{\log n}} \max_{k=1, \dots, m_n} \mathbf{P} \left\{ \max_{i=1, \dots, n} n^{-1} |\eta_i^T R_i^{(k)} \eta_i - \text{Tr} R^{(k)}| > \varepsilon \right\} \\
 & \leq c \frac{\log m}{\sqrt{\log n}} \max_{k=1, \dots, m_n} \left[1 + \frac{n-k}{n} c_k(\alpha) - \varepsilon \right]^{-1} + c \frac{\log m_n^{-1} n}{\sqrt{\log n}} \\
 & \quad + c \varepsilon^{-2-\delta} \frac{\log m}{\sqrt{\log n}} \max_{k=1, \dots, m_n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E} [n^{-1} |\eta_i^T R_i^{(k)} \eta_i - \text{Tr} R^{(k)}|]^{2+\delta} \\
 & \quad + \frac{\log m}{n \alpha^2 \sqrt{\log n}} + o(1), \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

где $c_k(\alpha)$ есть решение уравнения

$$c_k(\alpha) = \left[\alpha + \left(1 - \frac{n-k}{n} \right) + \frac{n-k}{n} \alpha c_k(\alpha) \right]^{-1}.$$

Из соотношений (3.13)–(3.15) и замечания 1 следует, что это уравнение справедливо для всех $\alpha > c n^{-\delta_1}$, где $c > 0$ и $0 < \delta_1 < 1$. Положительное решение этого уравнения равно

$$c_k(\alpha) = 2 \left[\alpha + 1 - \frac{n-k}{n} + \sqrt{\left(\alpha + 1 - \frac{n-k}{n} \right)^2 + 4\alpha \frac{n-k}{n}} \right]^{-1}.$$

Используя это решение и (4.7), как и при доказательстве (3.15), выбирая $\alpha = c n^{-\delta_1}$, $0 < \delta_1 < 1$, получаем

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}} \mathbf{E} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^n |\mathbf{E} \xi_{ki}^4 - 3| \left[I + \eta_i^T (H_k^{(i)} H_k^{(i)T})^{-1} \eta_i \right]^{-2} \\
 & \leq c \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log m}{\sqrt{\log n}} \max_{k=1, \dots, m_n} \left[1 + \frac{n-k}{n} c_k(\alpha) - \varepsilon \right]^{-1} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\log m_n^{-1} n}{\sqrt{\log n}} + \frac{\log m}{\sqrt{\log n}} \frac{1}{n^{\delta/2} \alpha^{2+\delta}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log m_n}{\sqrt{\log n}} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{m_n}{n} \right) \right. \\
&\quad \times \left[\alpha + \frac{m_n}{n} + \sqrt{\left(\alpha + \frac{m_n}{n} \right)^2 + 4 \left(1 - \frac{m_n}{n} \right) \alpha} \right]^{-1} - \varepsilon \left. \right\}^{-1} \\
&\leq c \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log m_n}{\sqrt{\log n}} \sqrt{\alpha + \frac{m_n}{n}} \leq c \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\log n} \sqrt{cn^{-\delta_1} + \frac{\varepsilon_n}{\log n}} = 0.
\end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

В силу леммы 1 и неравенства

$$\frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{n+1} \left\{ [I - H_k^T (H_k H_k^T)^{-1} H_k]_{i, n+1} \right\}^2 \leq \frac{1}{k^2}$$

находим

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}} \left[\sum_{k=1}^n \mathbf{E} \left\{ \left(\frac{\gamma_k - k}{k} \right)^2 \middle| \xi_i, i \neq k \right\} - \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \right] = 0.$$

Отсюда, учитывая неравенство (см. [2])

$$\mathbf{E} \left| \frac{\gamma_k - k}{k} \right|^{2+\delta} \leq \frac{c}{k^{1+\delta/2}},$$

теорему 1, центральную предельную теорему для сумм мартингал-разностей [5, с. 134] и (4.3), получаем утверждение теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гирко В. Л. Логарифмический закон. — Докл. АН УССР, сер. матем. мех. 1979, № 4, с. 243–244.
2. Гирко В. Л. Центральная предельная теорема для случайных детерминантов. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. XXIV, в. 4, с. 728–740.
3. Гирко В. Л. О центральной предельной теореме для случайных детерминантов. — Теория вероятн. и матем. статист., 1979, в. 21, с. 35–39.
4. Гирко В. Л. Центральная предельная теорема для случайных детерминантов. — Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. XXVI, в. 3, с. 532–542.
5. Girko V. L. Theory of Random Determinants. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990.

Поступила в редакцию
4.II.1996