Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Зуев, К оценке эффективности голосующих процедур,
Теория вероятн. и ее примен., 1997, том 42, выпуск 1, 74–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1713>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:32:30

© 1997 г.

ЗУЕВ Ю. А.*

К ОЦЕНКЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ
ГОЛОСУЮЩИХ ПРОЦЕДУР¹⁾

Рассматривается задача принятия коллегиального решения на основе индивидуальных мнений n экспертов, принимающих решения независимо, причем вероятность принятия правильного решения i -м экспертом равна p_i , где $\frac{1}{2} < m \leq p_i \leq M < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Показано, что для вероятности ошибки оптимального коллегиального решения справедливы оценки

$$\frac{1-M}{M} \binom{n}{[n/2]} \prod_{i=1}^n \sqrt{p_i(1-p_i)} \leq P_{\text{ош}}^{\text{опт}} \leq \frac{m}{2m-1} \binom{n}{[n/2]} \prod_{i=1}^n \sqrt{p_i(1-p_i)}.$$

Ключевые слова и фразы: взвешенное голосование, пороговая функция, оптимальное решающее правило.

1. Введение. Исследование статистических свойств голосующих процедур началось с Кондорсе [1], отыскивавшего, в частности, вероятность того, что решение, принимаемое по большинству голосов собранное из нечетного числа членов, окажется правильным. Предполагалось, что выбор производится из двух альтернатив, вероятность правильного решения для всех членов собрания одинакова и больше $\frac{1}{2}$, решения независимы.

Данная вероятностная модель надолго стала основой для приложения теории вероятностей к анализу таких вопросов, как вынесение решений судебными трибуналами, согласование свидетельских показаний, обработка экспертных мнений и т.д. (см. [2], [3]). Вывод о том, что численное увеличение состава собрания ведет к уменьшению вероятности ошибки, является в рамках модели простым следствием закона больших чисел, известного со времен Я. Бернулли.

Уже в более близкое к нам время подобные применения и основанные на них выводы подверглись едкой критике, причем наиболее уязвимым оказался постулат независимости (см. [4], [5, с. 192]). Это на долгие годы прервало и связанные с моделью вероятностные исследования.

*Вычислительный центр РАН, ул. Вавилова, 40, 117967 Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 95-01-01492).

Положение изменилось в середине XX века, когда развитие технических средств передачи, обработки и хранения информации привело к появлению таких методов повышения ее надежности, как дублирование и мажоритарное восстановление информационного символа. Здесь допущение независимости ошибок в различных технических устройствах не вызывает принципиальных возражений. Работа Дж. фон Неймана [6] положила начало многочисленным дальнейшим исследованиям в этом направлении.

Более гибким решающим правилом, позволяющим учесть различия в уровне компетентности экспертов, является взвешенное голосование, когда каждому члену коллектива приписывается некоторый вес и принимается решение, набравшее больший суммарный вес. Адаптивные возможности взвешенного голосования привлекли к нему внимание специалистов в области искусственного интеллекта и распознавания образов. Здесь в начале шестидесятых годов рядом исследователей было обнаружено, что при независимости ошибок оптимальное коллегиальное решение является взвешенным голосованием (см. [7]–[9]).

Статистические свойства взвешенного голосования изучались Пирсом [10], оценившим вероятность ошибки сверху и указавшим на возможность самообучения. Эти исследования были продолжены автором и С. К. Ивановым [11], [12]. В настоящей работе оценивается вероятность ошибки оптимального решающего правила.

2. Постановка задачи и обзор результатов. Для наглядности представления вероятностной модели и указания на ее возможные приложения рассмотрим многоканальную систему передачи информации, по каждому из n каналов которой в каждый момент времени передается один и тот же символ из алфавита $\{-1, 1\}$, но в процессе передачи в канале он может с некоторой вероятностью измениться на противоположный. Когда по системе передается сигнал $z \in \{-1, 1\}$, то на выходе i -го канала принимается сигнал $y_i \in \{-1, 1\}$, который с вероятностью $p_i \geq \frac{1}{2}$ совпадает с z и с вероятностью $1 - p_i$ противоположен ему, причем эти вероятности не зависят от значения z . Априорные вероятности обоих значений сигнала z одинаковы и равны $\frac{1}{2}$, каналы независимы. Требуется по принятому вектору $y = (y_1, \dots, y_n)$ с максимальной достоверностью восстановить переданный символ z .

Данная вероятностная модель эквивалентна схеме испытаний Бернулли, которую в случае различия вероятностей успеха $p_1, \dots, p_n$ называют также схемой Пуассона.

Любое решающее правило, восстанавливающее по каждому набору y значение z , является, по определению, некоторой булевой функцией $f: \{-1, 1\}^n \rightarrow \{-1, 1\}$. На практике в качестве такого решающего правила обычно используют мажоритарную функцию, т.е. решение по простому большинству голосов, которое однозначно определено при нечетном

n и может быть представлено как

$$f_{\text{маж}}(y) = \text{sgn}(y_1 + \dots + y_n).$$

Обоснованием для такого выбора могут служить следующие характеристики мажоритарного решающего правила:

1) если вероятности $p_1, \dots, p_n$ равны, то мажоритарная функция является оптимальным решением, минимизирующим вероятность ошибки [13];

2) если вероятности $p_1, \dots, p_n$ различны, но их расстановка по каналам неизвестна, то мажоритарная функция минимизирует вероятность ошибки при рандомизации по всем $n!$ перестановкам вероятностей в каналах [12];

3) мажоритарная функция — это единственная булева функция, являющаяся одновременно симметрической, самодвойственной и монотонной [12] (определения см. в п. 3).

Вероятность ошибки для мажоритарной функции равна вероятности того, что в серии из $n = 2k + 1$ испытаний Бернулли с вероятностями успеха $p_1, \dots, p_n$ суммарное число успехов окажется меньшим $k + 1$. Как вытекает из результатов Хефдинга [14] (см. также [15], [16]), при фиксированной сумме $\sum_{i=1}^n p_i = np \geq k + 1$ максимум вероятности ошибки достигается, когда $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$.

Таким образом, верхняя оценка для вероятности ошибки мажоритарной функции может быть получена оцениванием хвоста биномиального распределения

$$P_{\text{ош}}^{\text{маж}} \leq \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad (1)$$

где $p = (\sum_{i=1}^n p_i)/n$.

Для любого $i \leq k$ имеем

$$\frac{\binom{n}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{i+2}}{\binom{n}{i} p^i (1-p)^{i+1}} = \frac{i}{n-i+1} \frac{1-p}{p} < \frac{1-p}{p}.$$

Поэтому, мажорируя сумму (1) бесконечно убывающей геометрической прогрессией с первым членом $\binom{2k+1}{k} p^k (1-p)^{k+1}$ и знаменателем $(1-p)/p$, для вероятности ошибки мажоритарной функции получаем

$$P_{\text{ош}}^{\text{маж}} < \binom{2k+1}{k} \frac{[p(1-p)]^{k+1}}{2p-1} \sim \frac{[4p(1-p)]^{k+1}}{2(2p-1)\sqrt{\pi k}}. \quad (2)$$

Разбив подходящим образом сумму (1) по i на две части (например, $i \leq k - \sqrt{k}$ и $i > k - \sqrt{k}$), легко убедиться, что при $p_i = p$, $i = 1, 2, \dots, n$, правая часть (2) является точной асимптотикой для вероятности ошибки мажоритарной функции [13].

Поставим теперь задачу отыскания оптимального решающего правила по заданным вероятностям $p_1, \dots, p_n$. Если на выходе системы получен вектор $y = (y_1, \dots, y_n)$, то апостериорные вероятности для значений переданного сигнала z могут быть найдены по формулам

$$P\{z = 1 | y\} = C \prod_{i=1}^n P\{y_i | z = 1\}, \quad P\{z = -1 | y\} = C \prod_{i=1}^n P\{y_i | z = -1\},$$

где C — нормировочная константа формулы Байеса.

Отсюда получаем

$$\frac{P\{z = 1 | y\}}{P\{z = -1 | y\}} \geq 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\log P\{y_i | z = 1\}}{\log P\{y_i | z = -1\}} \geq 0.$$

Непосредственной проверкой для $y_i = 1$ и $y_i = -1$ убеждаемся, что в обоих случаях

$$\frac{\log P\{y_i | z = 1\}}{\log P\{y_i | z = -1\}} = y_i \log \frac{p_i}{1 - p_i}.$$

Поэтому оптимальное решающее правило $f(y)$, выбирающее для каждого $y \in \{-1, 1\}^n$ наиболее вероятное значение для z , может быть задано в виде

$$f(y) = \operatorname{sgn}(a_1 y_1 + \dots + a_n y_n), \quad (3)$$

где $a_i = \log(p_i/(1 - p_i))$, т.е. является взвешенным голосованием.

Хотя этот факт известен с начала шестидесятых годов, важнейший вопрос об оценке вероятности ошибки оптимального решения остался малоисследованным. Связав с каждым каналом случайную величину $\xi_i \in \{-1, 1\}$, $P\{\xi_i = 1\} = p_i$, $P\{\xi_i = -1\} = 1 - p_i$, сигнал на выходе канала можно представить в виде

$$y_i = \xi_i z, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

а вероятность ошибки решающей функции (3) записать как

$$P_{\text{ош}}^f = P\{a_1 \xi_1 + \dots + a_n \xi_n < 0\}.$$

Подобные вероятности принято называть вероятностями больших отклонений, причем в данном случае величина отклонения от математического ожидания слишком велика, чтобы для суммы независимых случайных величин можно было воспользоваться нормальным приближением. Общим методом для оценки вероятностей таких отклонений остается экспоненциальное неравенство Бернштейна.

Пирсом [10] для вероятности ошибки оптимального решения была получена оценка

$$P_{\text{ош}}^{\text{опт}} \leq \prod_{i=1}^n 2\sqrt{p_i(1 - p_i)}, \quad (4)$$

но вопрос о ее точности остался открытым. В [12] с помощью подхода, впервые использованного А. Н. Колмогоровым при доказательстве закона повторного логарифма, было показано, что при условии $\frac{1}{2} < m \leq p_i \leq M < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, оценка (4) правильно отражает асимптотику логарифма вероятности ошибки

$$\log P_{\text{ош}}^{\text{опт}} \sim \log \left[\prod_{i=1}^n 2\sqrt{p_i(1-p_i)} \right], \quad n \rightarrow \infty,$$

а в результате сравнения (2) и (4) было предположено, что порядок вероятности ошибки имеет вид

$$P_{\text{ош}}^{\text{опт}} \asymp \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\prod_{i=1}^n 2\sqrt{p_i(1-p_i)} \right], \quad n \rightarrow \infty,$$

В настоящей работе это предположение доказывается. Доказательство представляет собой обобщение элементарного приема, с помощью которого было получено (2). Оно основано на дискретном анализе и ведется на характерном для пороговой логики геометрическом языке.

3. Сведения из пороговой логики. Будем считать наборы $y \in \{-1, 1\}^n$ вершинами гиперкуба $[-1, 1]^n$. Две вершины $y_1, y_2 \in \{-1, 1\}^n$ соединены ребром, если они отличаются лишь одной координатой. Ребро $[y_1, y_2]$ считается положительным, если эта координата в y_1 равна -1 , а в y_2 равна $+1$. Ребро $[y_2, y_1]$ считается в этом случае отрицательным. Изменяющуюся координату ребра будем называть его направляющей координатой. Две вершины $y_1, y_2 \in \{-1, 1\}^n$ находятся в отношении порядка $y_1 \leq y_2$, если из y_1 можно перейти в y_2 , двигаясь только по положительным ребрам. Шпернеровым множеством, или антицепью, называется любое подмножество вершин, попарно несравнимых в смысле введенного отношения. Согласно теореме Шпернера (см., например, [13]), мощность любой антицепи не превышает $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Если $n = 2k$, то имеется единственная антицепь такой мощности, состоящая из всех вершин с k положительными координатами. При $n = 2k + 1$ таких антицепей две: множество вершин с k положительными координатами и множество вершин с $k + 1$ положительными координатами.

Булева функция $f: \{-1, 1\}^n \rightarrow \{-1, 1\}$ приписывает каждой вершине гиперкуба значение $+1$ или -1 . В зависимости от приписанных значений вершины называются положительными или отрицательными. Функция f называется симметрической, если она не меняет значения при любой перестановке координат. Функция f называется самодвойственной, если $f(-y) = -f(y)$. Функция f называется монотонной, если из $y_1 \leq y_2$ следует $f(y_1) \leq f(y_2)$.

Булева функция f называется пороговой, если она представима в виде

$$f(y) = \text{sgn}(a_0 + a_1 y_1 + \dots + a_n y_n). \quad (5)$$

Действительные числа $a_1, \dots, a_n$ называются весами, a_0 — смещением. Они выбираются таким образом, что $a_0 + a_1 y_1 + \dots + a_n y_n \neq 0$ для всех $y \in \{-1, 1\}^n$. При таком задании достаточно малые изменения весов и смещения не изменяют функции.

Геометрически пороговая функция (5) задается гиперплоскостью, рассекающей гиперкуб так, что по одну ее сторону лежат положительные вершины, по другую — отрицательные. Если $a_0 = 0$, то пороговая функция самодвойственна, задающая ее гиперплоскость проходит через центр гиперкуба, совпадающий с началом координат. Если $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, то пороговая функция монотонна. Монотонные самодвойственные пороговые функции задают процедуру взвешенного голосования (3).

Важный принцип пороговой логики, облегчающий многие доказательства, состоит в том, что всегда можно считать веса пороговой функции (5) выбранными таким образом, что при вариации смещения гиперплоскость, перемещаясь параллельно, не пересекает одновременно более одной вершины гиперкуба. В противном случае этого можно добиться небольшим предварительным изменением весов, не меняющим исходной функции. Точнее, множество весовых векторов, для которых существует такое значение смещения, что в гиперплоскости лежит более одной вершины гиперкуба, имеет лебегову меру нуль (см. [18]).

Множество вершин гиперкуба, у которых выбранные k координат принимают фиксированные значения из множества $\{-1, 1\}$, образует подкуб размерности $n - k$. Для каждого подмножества из k координат существует 2^k таких непересекающихся изоморфных подкубов, каждый из которых содержит 2^{n-k} вершин, составляющих в объединении 2^n вершин гиперкуба. Такое разбиение называется разложением гиперкуба по выбранным k координатам.

При этом булевой функции f соответствуют 2^k подфункций, определенных в каждом подкубе на множестве свободных переменных. Если функция f пороговая, то ее подфункции также являются пороговыми, со смещениями, определяемыми значениями зафиксированных переменных и их весами. Это позволяет рассматривать изменение одного или нескольких весов пороговой функции как изменение смещений ее подфункций и использовать принцип вариации смещения в соответствующих подкубах.

Поясним сказанное. Пусть гиперкуб разложен по первым k координатам. Тогда в подкубе $y_i = \alpha_i$, где $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, k$, подфункция пороговой функции (5) имеет вид

$$f'(y_{k+1}, \dots, y_n) = \text{sgn}(a'_0 + a_{k+1}y_{k+1} + \dots + a_n y_n),$$

где $a'_0 = a_0 + a_1 \alpha_1 + \dots + a_k \alpha_k$. Если веса $a_1, \dots, a_n$ изменяются, то меняется и смещение a'_0 , и, в соответствии с принципом вариации сме-

щения, в гиперплоскости $a'_0 + a_{k+1}y_{k+1} + \dots + a_n y_n = 0$ не может лежать одновременно более одной вершины подкуба.

4. Вспомогательные результаты. Для дальнейшего потребуются следующие определения.

О п р е д е л е н и е 1. Граничным множеством $\Gamma(f)$ монотонной пороговой функции f называется множество тех ее положительных вершин, из которых выходит хотя бы одно отрицательное ребро, пересекающее гиперплоскость.

О п р е д е л е н и е 2 (индуктивное). Первым прилегающим слоем $\Gamma_1(f)$ монотонной пороговой функции f называется множество таких ее положительных вершин, что все выходящие из них отрицательные ребра пересекают гиперплоскость. Далее, i -м прилегающим слоем $\Gamma_i(f)$ называется множество положительных вершин, которые не принадлежат прилегающим слоям с номерами $1, 2, \dots, i-1$, но все выходящие из этих вершин отрицательные ребра либо заканчиваются в прилегающих слоях с номерами $1, 2, \dots, i-1$, либо пересекают гиперплоскость.

Определением 2 множество положительных вершин функции разбивается на слои. Ясно, что $\Gamma_1(f) \subseteq \Gamma(f)$, причем для мажоритарной функции $\Gamma_1(f_{\text{маж}}) = \Gamma(f_{\text{маж}})$.

Оценка вероятности ошибки будет опираться на следующую лемму.

Лемма. *Мощность граничного множества $\Gamma(f)$ монотонной самодвойственной функции f и мощность ее i -го прилегающего слоя $\Gamma_i(f)$ для любого i удовлетворяют соотношению*

$$|\Gamma_i(f)| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq |\Gamma(f)|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно убедиться, что i -й прилегающий слой является антицепью. Поэтому в силу теоремы Шпернера его мощность не превышает $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Для доказательства правого неравенства перенумеруем координаты так, чтобы было выполнено $a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0$. Доказательство будет состоять в пошаговом уравнивании весов, достигаемом уменьшением максимальных весов. Будет показано, что при каждом изменении функции в результате такого уравнивания мощность граничного множества уменьшается. Заключительный весовой вектор будет равен $(a_n, \dots, a_n)$ для нечетных n и $(a_{n-1}, \dots, a_{n-1}, a_n)$ для четных n . В первом случае возникает мажоритарная функция, мощность граничного множества которой равна $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Во втором случае функция не зависит существенно от переменной y_n , мощность ее граничного множества равна

$$\binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} > \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

На первом шаге у исходного весового вектора только первая координата имеет максимальный вес. Будем уменьшать a_1 до тех пор, пока

a_1 не станет равным a_2 : $a_1(t) = a_1 - t(a_1 - a_2)$, $0 \leq t \leq 1$. Если в момент $t = t^*$ гиперплоскость пересекает некоторую вершину $y = (1, y_2, \dots, y_n)$, которая из положительного полупространства переходит в отрицательное, то в силу самодвойственности одновременно пересекается и вершина $-y = (-1, -y_2, \dots, -y_n)$, переходящая из отрицательного полупространства в положительное. Таким образом, вершина y покинет граничное множество, а вершина $-y$ войдет в него.

Разложив гиперкуб по первой координате в соответствии с принципом вариации смещения, примененным к подкубам $y_1 = 1$ и $y_1 = -1$, получаем, что y и $-y$ — единственные вершины, в которых пороговая функция в момент t^* меняет значение. Можно также считать, что $t^* \neq 1$.

Чтобы решить, какие еще вершины могли изменить свой статус в граничном множестве, достаточно рассмотреть вершины, в которых заканчиваются положительные ребра, выходящие из y , и вершины, в которых заканчиваются положительные ребра, выходящие из $-y$. Каждая вершина первой группы приобретает в момент t^* отрицательное ребро, пересекающее гиперплоскость, но она имела и до момента t^* такое ребро с направляющей первой координатой. Поэтому статус вершин первой группы не изменяется — они были и остались в граничном множестве.

Вершина второй группы, напротив, может покинуть граничное множество, если она не имеет положительной координаты с меньшим номером, чем номер направляющей координаты ребра, соединяющего ее с $-y$. Такой вершиной является, в частности, вершина $(1, -y_1, \dots, -y_n)$. Поэтому мощность граничного множества в момент t^* уменьшится. После окончания первого шага две координаты имеют максимальный вес.

На k -м шаге k координат весового вектора имеют максимальный вес: $a_1 = a_2 = \dots = a_k > a_{k+1} > \dots > a_n$. Будем одновременно уменьшать их веса до тех пор, пока они не станут равными a_{k+1} : $a_i(t) = a_i - t(a_i - a_{k+1})$, $0 \leq t \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, k$. Пусть в некоторый момент $t = t^*$ вершина y переходит из положительного полупространства в отрицательное, тогда противоположная ей вершина $-y$ переходит из отрицательного полупространства в положительное. Пусть вершина y среди первых своих k координат имеет k_+ положительных и k_- отрицательных. Тогда $k_+ + k_- = k$ и $k_+ > k_- \geq 0$, так как $a_1(t) = \dots = a_k(t) > 0$ и значение линейной формы в вершине y уменьшается.

Разложим гиперкуб по первым k координатам. Тогда в каждом из $\binom{k}{k_+}$ подкубов, имеющих среди первых k координат k_+ положительных и k_- отрицательных, смещения пороговых подфункций в каждый момент одинаковы, и в соответствии с принципом вариации смещения в каждом из них одна вершина, координаты которой совпадают с последними $n - k$ координатами вершины y , в момент t^* перейдет из положительного полупространства в отрицательное. В каждом из $\binom{k}{k_+}$ подкубов, получаемых приписыванием первым k координатам k_- положительных и k_+ отрицательных значений, одна вершина, координаты которой совпада-

ют с последними $n - k$ координатами вершины $-y$, перейдет из отрицательного полупространства в положительное. Можно считать, что в остальных $2^k - 2\binom{k}{k_+}$ подкубах в момент t^* ни одна из вершин не пересекается гиперплоскостью (множество весовых векторов $(a_{k+1}, \dots, a_n)$, для которых это не выполнено, имеет лебегову меру нуль).

Таким образом, $\binom{k}{k_+}$ вершин покинут граничное множество и столько же вершин войдут в него. Кроме того, в граничное множество войдут $\binom{k}{k_++1}$ вершин, в которых заканчиваются положительные ребра, выходящие из вершин типа y с направляющими, выбранными из первых k координат (статус вершин, в которых заканчиваются положительные ребра, выходящие из вершин типа y с направляющими, выбранными из последних $n - k$ координат, не изменится — они были и остались в граничном множестве). Граничное множество покинут $\binom{k}{k_+-1}$ вершин, в которых заканчиваются положительные ребра, выходящие из вершин типа $-y$ с направляющими, выбранными из первых k координат. Так как $\binom{k}{k_++1} < \binom{k}{k_+-1}$, то мощность граничного множества уменьшится.

Тем самым показано, что при каждом изменении функции в процессе выравнивания весов мощность граничного множества уменьшается. Лемма доказана.

Отметим, что, как следует из доказательства, правое неравенство обращается в равенство на мажоритарной функции и только на ней. В левом же неравенстве случай равенства имеет место лишь для первого прилегающего слоя и мажоритарной функции, как это следует из теоремы Шпернера.

5. Оценка вероятности ошибки. Сформулируем и докажем теперь основной результат настоящей работы.

Теорема. Пусть $\frac{1}{2} < m \leq p_i \leq M < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда для вероятности ошибки оптимального решающего правила справедливы оценки

$$\frac{1-M}{M} \binom{n}{[n/2]} \prod_{i=1}^n \sqrt{p_i(1-p_i)} \leq P_{\text{ош}}^{\text{опт}} \leq \frac{m}{2m-1} \binom{n}{[n/2]} \prod_{i=1}^n \sqrt{p_i(1-p_i)}.$$

Доказательство. Вероятность ошибки для оптимального решения (3) равна

$$\begin{aligned} P_{\text{ош}}^{\text{опт}} &= \frac{1}{2} P \left\{ \sum_{i=1}^n a_i y_i < 0 \mid z = 1 \right\} + \frac{1}{2} P \left\{ \sum_{i=1}^n a_i y_i > 0 \mid z = -1 \right\} \\ &= P \left\{ \sum_{i=1}^n a_i y_i > 0 \mid z = -1 \right\} = \sum_{\substack{y \in \{-1, 1\}^n \\ f(y) = 1}} P\{y \mid z = -1\}. \end{aligned}$$

Заметим, что условные вероятности $P\{y \mid z = -1\}$ и $P\{y \mid z = 1\}$

для любой вершины $y \in \{-1, 1\}^n$ связаны соотношением

$$P\{y | z = -1\} P\{y | z = 1\} = \prod_{i=1}^n p_i(1 - p_i). \quad (6)$$

Пусть $f(y) = 1$. Тогда из оптимальности $f(y)$ следует

$$P\{y | z = -1\} \leq P\{y | z = 1\}.$$

Отсюда получаем

$$P^2\{y | z = -1\} \leq P\{y | z = -1\} P\{y | z = 1\} = \prod_{i=1}^n p_i(1 - p_i)$$

и

$$P\{y | z = -1\} \leq \prod_{i=1}^n \sqrt{p_i(1 - p_i)}. \quad (7)$$

Будем теперь рассматривать множество положительных вершин функции (3) как объединение ее прилегающих слоев $\cup \Gamma_i(f)$, $i = 1, 2, \dots$. Для каждой вершины $y_1 \in \Gamma_1(f)$ справедливо соотношение (7). Произвольная вершина $y_2 \in \Gamma_2(f)$ может быть получена из некоторой вершины $y_1 \in \Gamma_1(f)$ изменением одной из ее координат, скажем j -й, с -1 на $+1$. Поэтому для вероятности $P\{y_2 | z = -1\}$ имеем

$$P\{y_2 | z = -1\} = \frac{1 - p_j}{p_j} P\{y_1 | z = -1\} \leq \frac{1 - m}{m} \prod_{i=1}^n \sqrt{p_i(1 - p_i)}.$$

Аналогично, для вершины $y_l \in \Gamma_l(f)$ справедливо

$$P\{y_l | z = -1\} = \left(\frac{1 - m}{m}\right)^{l-1} \prod_{i=1}^n \sqrt{p_i(1 - p_i)}.$$

По лемме мощность каждого прилегающего слоя не превышает $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Поэтому суммирование бесконечно убывающей геометрической прогрессии дает верхнюю оценку теоремы.

Пусть теперь $y \in \Gamma(f)$. Оценим вероятность $P\{y | z = -1\}$ снизу. Для вершины y найдется такая вершина y' , получаемая из y изменением одной из ее координат, скажем j -й, с $+1$ на -1 , что $f(y') = -1$. Поэтому для вероятности $P\{y | z = -1\}$ имеем

$$P\{y | z = -1\} = \frac{1 - p_j}{p_j} P\{y' | z = -1\} \geq \frac{1 - M}{M} P\{y' | z = -1\}.$$

А из оптимальности функции f следует, что

$$P\{y' | z = -1\} \geq P\{y' | z = 1\}.$$

Отсюда и из (6) получаем:

$$P^2\{y' | z = -1\} \geq \prod_{i=1}^n p_i(1-p_i), \quad P\{y' | z = -1\} \geq \prod_{i=1}^n \sqrt{p_i(1-p_i)},$$

$$P\{y | z = -1\} \geq \frac{1-M}{M} \prod_{i=1}^n \sqrt{p_i(1-p_i)}.$$

Так как согласно лемме мощность $\Gamma(f)$ не меньше $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, то из последнего соотношения следует нижняя оценка теоремы. Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность А. М. Зубкову и Г. П. Гаврилову за полезные советы и обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Condorcet M. J. A. N.* Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix. Paris, 1785.
2. *Майстров Л. Е.* Теория вероятностей. Исторический очерк. М.: Наука, 1967, 320 с.
3. *Колмогоров А. Н., Юшкевич А. П.* (ред.) Математика XIX века. М.: Наука, 1978, 255 с.
4. *Пуанкаре А.* Наука и метод. — В кн.: Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1983, 560 с.
5. *Бернштейн С. Н.* Теория вероятностей, 4-е изд. М.-Л.: ОГИЗ, 1946, 556 с.
6. *Нейман Дж.* Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент. — В сб.: Автоматы. М.: ИЛ, 1956, с. 68–139.
7. *Нильсон Н.* Обучающиеся машины. М.: Мир, 1967, 180 с.
8. *Минский М., Пейперт С.* Перцептроны. М.: Мир, 1971, 261 с.
9. *Дуда Р., Харт П.* Распознавание образов и анализ сцен. М.: Мир, 1976, 511 с.
10. *Пирс У.* Построение надежных вычислительных машин. М.: Мир, 1968, 270 с.
11. *Зуев Ю. А., Иванов С. К.* Обучение и самообучение в процедурах взвешенного голосования. — Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1995, т. 35, № 1, с. 104–121.
12. *Зуев Ю. А., Иванов С. К.* Взвешенное голосование в многоканальных системах передачи дискретных сигналов. — Проблемы передачи информации, 1995, т. 31, в. 4, с. 22–36.
13. *Зуев Ю. А.* Вероятностная модель комитета классификаторов. — Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1986, т. 26, № 2, с. 276–292.
14. *Hoeffding W.* On the distribution of the number of successes in independent trials. — Ann. Math. Statist., 1956, v. 27, № 3, p. 713–721.
15. *Gleser L. J.* On the distribution of the number of successes in independent trials. — Ann. Probab., 1975, v. 3, № 1, p. 182–188.
16. *Маршалл А., Олкин И.* Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир, 1983, 574 с.
17. *Рыбников К. А.* Введение в комбинаторный анализ, 2-е изд. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985, 308 с.
18. *Зуев Ю. А.* Пороговые функции и пороговые представления булевых функций. — В сб.: Математические вопросы кибернетики. Вып. 5. М.: Наука, 1994, с. 5–61.

Поступила в редакцию

14.VIII.1995