Общероссийский математический портал

Э. М. Кудлаев, Слабая сходимость распределений разделенных статистик, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 1, 85–107

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1714>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 12:22:09

© 1997 г.

КУДЛАЕВ Э. М.*

**СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ
РАСПРЕДЕЛЕНИЙ РАЗДЕЛИМЫХ СТАТИСТИК¹⁾**

Изучаются слабые пределы (с ростом числа слагаемых) распределений разделимых статистик со значениями в локально компактных хаусдорфовых абелевых группах. Рассматривается универсальный метод получения предельных теорем для разделимых статистик, приспособленный для всех схем. Полученный слабый предел выражается через предельное условное распределение сопутствующей разделимой статистике аддитивной формы, построенной по независимым случайным величинам.

Ключевые слова и фразы: разделимые статистики со значениями в локально компактных хаусдорфовых абелевых группах; теорема двойственности Л. С. Понтрягина; непрерывная версия регулярного условного распределения; интегральное представление Зейбелла для условной характеристической функции; суммирование независимых случайных величин; общий принцип сходимости Б. М. Клосса.

В настоящей работе изучаются слабые пределы (с ростом числа слагаемых) распределений сумм зависимых специальным образом случайных величин со значениями в локально компактных хаусдорфовых абелевых группах (LCA-группах, для краткости). Предполагается, что слагаемые таких сумм являются функциями от случайных аргументов; последние являются зависимыми таким образом, что их совместное распределение совпадает с условным распределением некоторых независимых случайных величин при условии фиксации суммы последних в некоторой точке « a ». В отечественной литературе суммы такого вида называются разделимыми статистиками (РС, для краткости) и широко используются как в математической статистике и теории вероятностей, так и в других областях математики (см. [3], [6], [10], [14], [15], [17], [18], [38]). Имеется ряд методов (см. [6], [9]–[12], [14], [18], [25], [26], [31], [34]–[36], [39], [41]) получения предельных теорем для РС. Здесь рассматривается универсальный способ, приспособленный для РС всех схем;

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, лаборатория математической статистики, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-01273 и грантового центра по исследованиям в области математики при Новосибирском государственном университете.

полученный при этом слабый предел распределения выражается через предельное условное распределение сопутствующей РС аддитивной формы, построенной по независимым случайным величинам.

Работа состоит из трех параграфов. Первый из них носит вспомогательный характер: в нем приводятся определения и обозначения, а также играющий важную роль в дальнейшем изложении результат Зейбелла о существовании непрерывной, в смысле слабой сходимости, версии регулярного условного распределения на LCA-группе. В § 2 доказывается основной результат этой статьи (его формулировка приведена в [20]); последний параграф посвящен следствиям этого результата.

§ 1. Основные определения и обозначения.

Непрерывная версия условного распределения

1.1. Некоторые сведения об LCA-группах. Пусть для $j = 1$ и $j = 2$ тройка $G_j \equiv (G_j, (+)_j, \mathcal{U}_j)$ является LCA-группой с операцией сложения $(+)_j$ и топологией $\mathcal{U}_j$ (в дальнейшем изложении вместо $(+)_j$ будет применяться и символ $+$, если это не вызовет недоразумений). Как известно (см., например, [4, с. 43]), на каждой LCA-группе существует *мера Хаара* μ , являющаяся инвариантной относительно групповой операции и единственной с точностью до мультипликативной константы. Произведение конечного числа LCA-групп с топологией произведения является LCA-группой (см., например, [21, предложение 16]) с мерой Хаара, равной произведению мер Хаара сомножителей.

Следующие группы являются «элементарными» LCA-группами. В группе действительных чисел $\mathbf{R}$ групповой операцией является обычное сложение, а топологией — обычная топология с совокупностью всех открытых интервалов в качестве своей базы; мера Хаара в $\mathbf{R}$ — мера Лебега. Группа целых чисел $\mathbf{Z}$ является LCA-подгруппой группы $\mathbf{R}$; топология $\mathbf{Z}$ дискретна, а мерой Хаара является «считающая» мера, равная для каждого множества числу элементов $\mathbf{Z}$, в нем содержащихся. Множество $\mathbf{T}$ всех комплексных чисел, равных по модулю единице, с умножением в качестве групповой операции и с топологией, порожденной топологией комплексной плоскости, образует LCA-группу $\mathbf{T}$; мерой Хаара для каждой «дуги» из $\mathbf{T}$ является длина этой дуги. Как и $\mathbf{Z}$, конечная дискретная абелева группа $\mathbf{F}$ имеет дискретную топологию и «считающую» меру в качестве меры Хаара.

Пространство G_j может рассматриваться и как группа $(G_j, (+)_j)$, и как топологическое пространство $(G_j, \mathcal{U}_j)$. Две группы $(G, +)$ и $(G', +')$ называют *алгебраически изоморфными*, если существует отображение $f: G \rightarrow G'$, являющееся взаимно однозначным («на») и сохраняющим групповую операцию, т.е. $f(g_1 + g_2) = f(g_1) +' f(g_2)$ для любых $g_1, g_2 \in G$; два топологических пространства $(G, \mathcal{U})$ и $(G', \mathcal{U}')$ называют *топологически эквивалентными* (или *гомеоморфными*), если существует отображение $f: G \rightarrow G'$, являющееся взаимно однозначным («на») и непрерыв-

ным, причем обратное отображение f^{-1} также непрерывно. Две топологические (или непрерывные) группы $G = (G, +, \mathcal{U})$ и $G' = (G', +', \mathcal{U}')$ называют *топологически изоморфными*, если существует отображение $f: G \rightarrow G'$, относительно которого эти группы являются алгебраически изоморфными и топологически эквивалентными.

Предположим, что H — замкнутая подгруппа LCA-группы G ; тогда алгебраическая факторгруппа G/H , снабженная фактортопологией относительно канонического гомоморфизма p (ставящего в соответствие каждому элементу $g \in G$ содержащий его элемент из множества G/H классов смежности), образует LCA-группу — см. [21, предложения 10, 13 и 14].

Пусть $(G, \mathcal{U})$ — топологическое пространство и $\mathfrak{B}$ — наименьшая σ -алгебра, содержащая $\mathcal{U}$; при этом $\mathfrak{B}$ называется *борелевской σ -алгеброй*, ее элементы — *борелевскими множествами*, а пара $(G, \mathfrak{B})$ — *борелевским пространством*. Пусть $(G_i, \mathfrak{B}_i)$, $i = 1, \dots, M$, — борелевские пространства; наименьшая σ -алгебра $\mathfrak{B}_1 \times \dots \times \mathfrak{B}_M$, содержащая все борелевские прямоугольники $B = B_1 \times \dots \times B_M$, $B_i \in \mathfrak{B}_i$ ($i = 1, \dots, M$), называется *произведением борелевских σ -алгебр $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_M$* , а пара $(G_1 \times \dots \times G_M, \mathfrak{B}_1 \times \dots \times \mathfrak{B}_M)$ называется *произведением борелевских пространств $(G_i, \mathfrak{B}_i)$, $i = 1, \dots, M$* . Если $(G, \mathfrak{S})$ и $(G', \mathfrak{S}')$ — измеримые пространства, то функция $f: G \rightarrow G'$ называется *$(\mathfrak{S}', \mathfrak{S})$ -измеримой*, если прообраз $f^{-1}[A]$ любого множества A из $\mathfrak{S}'$ принадлежит $\mathfrak{S}$. Если σ -алгебры $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ являются борелевскими, то $(\mathfrak{S}', \mathfrak{S})$ -измеримая функция f называется *борелевской*; если, кроме того, f является взаимно однозначным отображением («на») и обратное отображение является борелевским, то f называется *борелевским изоморфизмом* борелевских пространств $(G, \mathfrak{S})$ и $(G', \mathfrak{S}')$. Борелевский изоморфизм двух одинаковых борелевских пространств называется *борелевским автоморфизмом*.

Если $G = (G, +, \mathcal{U})$ есть LCA-группа, то непрерывный гомоморфизм $\gamma: G \rightarrow T$ называется *непрерывным характером*. На множестве G^* всех непрерывных характеров γ можно ввести коммутативную операцию, определяемую формулой:

$$(\gamma' + \gamma'')(g) = \gamma'(g)\gamma''(g), \quad (1.1)$$

для всех $g \in G$ и всех $\gamma', \gamma'' \in G^*$, и компактно-открытую топологию $\mathcal{U}^*$, предбазу которой образуют все множества вида:

$$M(K, V) = \{\gamma \in G^*: G \rightarrow T, \gamma[K] \subseteq V\}, \quad (1.2)$$

где K — произвольное компактное множество в G и V — произвольное открытое множество в T . Тройка $G^* \equiv (G^*, +, \mathcal{U}^*)$ называется *группой непрерывных характеров* или *группой, двойственной к G* . Хорошо известно (см., например, [21, Предложение 29]), что G^* является LCA-группой, так что существует κ^* — мера Хаара на G^* . Для элементов последней группы наряду с γ будет использоваться и обозначение g^* .

Пусть G_j^* — группа, двойственная к G_j , $j = 1, 2$; тогда произведение групп $G^* = G_1^* \times G_2^*$ является (см. [21, теорема 13]) LCA-группой, двойственной к произведению групп $G = G_1 \times G_2$. Аннулятором L замкнутой подгруппы H LCA-группы G называется множество (снабженное индуцированной топологией) всех $\gamma \in G^*$, таких, что $\gamma(h) = 1$ для всех $h \in H$; аннулятор представляет собой (см. [21, с. 74]) замкнутую подгруппу группы G^* , так что L^* есть LCA-группа.

Для любого элемента g из LCA-группы G определим функцию g' : $G^* \rightarrow T$ согласно формуле: $g'(\gamma) \mapsto \gamma(g)$ для всех $\gamma \in G^*$. Имеет место теорема двойственности Понтрягина (см. [23, теорема 52] и [21, теорема 23]): каноническое отображение $\alpha: \alpha(g) \mapsto g'$ для всех $g \in G$ является изоморфизмом топологической группы G на вторую двойственную группу $G^{**} = (G^*)^*$. К многочисленным следствиям этой теоремы относятся, в частности, следующие: а) группа G^* компактна, если группа G дискретна; б) группа G^* дискретна, если G компактна; в) из первых двух утверждений следует, что для всех натуральных значений $n \geq 1$ топологические группы Z^n и T^n являются двойственными по отношению друг к другу; г) если H — замкнутая подгруппа LCA-группы G , то топологические группы L и G^*/L топологически изоморфны [21, теорема 27]) группам $(G/H)^*$ и H^* соответственно.

1.2. Условная характеристическая функция и регулярное условное распределение. Если X — случайная величина, принимающая значения в LCA-группе G , и PX^{-1} — ее распределение, то характеристическая функция (х.ф.) φ_X величины X определяется преобразованием Фурье

$$\varphi_X(\gamma) = \int_G \gamma(g) dPX^{-1}(g)$$

для всех $\gamma \in G^*$. Совместная характеристическая функция $\varphi_{X,Y}$ случайных величин X и Y , заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ и принимающих значения в LCA-группах G_1 и G_2 соответственно, определяется формулой:

$$\varphi_{X,Y}(\gamma) = \int_{G_1 \times G_2} \prod_{j=1}^2 \gamma_j(g_j) dP(X, Y)^{-1}(g) \quad (1.3)$$

для всех $\gamma \equiv (\gamma_1, \gamma_2) \in G_1^* \times G_2^*$, где $P(X, Y)^{-1}$ — совместное распределение случайных величин X, Y и $g = (g_1, g_2)$.

Функция $Q_{X|Y}(\cdot, \cdot)$ называется регулярным условным распределением случайной величины X при заданной случайной величине Y , если для каждого значения $y \in G_2$ функция $Q_{X|Y}(y, \cdot)$ является вероятностным распределением на $\mathfrak{S}_1$ и для каждого значения $B \in \mathfrak{S}_1$ функция $Q_{X|Y}(\cdot, B)$ является вариантом условной вероятности

$$P_{X|Y}(\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in B\} | \cdot)$$

при заданной случайной величине Y . В этом случае для любой действительной случайной величины h , определенной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ и имеющей конечное математическое ожидание, почти наверное (относительно PY^{-1}) справедливо равенство:

$$\int_{G_1} h(x) Q_{X|Y}(y, dx) = E(h | Y = y), \quad (1.4)$$

где правая часть является условным математическим ожиданием случайной величины h при заданном значении y случайной величины Y . Согласно (1.4), *условная характеристическая функция* $\varphi_{X|Y}(\cdot | y)$ случайной величины X при условии $Y = y$ определяется формулой:

$$\varphi_{X|Y}(\gamma_1 | Y = y) = \int_{G_1} \gamma_1(g_1) P_{X|Y}(dg_1 | Y = y) \quad (1.5)$$

для всех $\gamma_1 \in G_1^*$ и почти всех (относительно PY^{-1}) $y \in G_2$. Если LCA-группы G_1 и G_2 являются полными сепарабельными метрическими пространствами, то существует [22, утверждение 46.3] регулярное условное распределение $Q_{X|Y}(\cdot, \cdot)$. Условное распределение $Q_{X|Y}(\cdot, \cdot)$ называется *непрерывным в смысле слабой сходимости на множестве V* , если для любых $y, y_0 \in V$

$$Q_{X|Y}(y, \cdot) \Rightarrow Q_{X|Y}(y_0, \cdot) \quad \text{при} \quad y \rightarrow y_0,$$

где символ $\Rightarrow$ обозначает слабую сходимость распределений.

1.3. Основные определения. Предположим, что случайные величины $w_1, \dots, w_N$ и независимые в совокупности случайные величины $\theta_1, \dots, \theta_N$, определенные на вероятностных пространствах $(\Omega_1, \mathfrak{S}_1, P_1)$ и $(\Omega_2, \mathfrak{S}_2, P_2)$ соответственно, принимают значения в LCA-группе $G_2 = (G_2, +, \mathcal{U}_2)$, и пусть

$$w(N) = (w_1, \dots, w_N) \quad \text{и} \quad \theta(N) = (\theta_1, \dots, \theta_N). \quad (1.6)$$

Предположим, что на произведении множеств G_2^{l+1} заданы функции f_k , $k = 1, \dots, N$, принимающие значения в LCA-группе $G_1 = (G_1, +, \mathcal{U}_1)$; введем функцию

$$f: (g_2^{(1)}, \dots, g_2^{(N)}) \mapsto \sum_{k=1}^N f_k(g_2^{(k)}, \dots, g_2^{(k+1)}), \quad (1.7)$$

где

$$g_2^{(k)} \in G_2, \quad k = 1, \dots, N, \quad g_2^{(k+N)} = g_2^{(k)}, \quad k = 1, \dots, l. \quad (1.8)$$

Учитывая соотношения (1.8), рассмотрим сумму

$$\zeta_N = \sum_{k=1}^N f_k(w_k, \dots, w_{k+l}) \quad (1.9)$$

и введем «сопутствующие» случайной величине ζ_N суммы:

$$\xi_N = \sum_{k=1}^N f_k(\theta_k, \dots, \theta_{k+l}), \quad \eta_N = \sum_{k=1}^N \theta_k. \quad (1.10)$$

Пусть $\mathfrak{B}_j$ — наименьшая σ -алгебра, содержащая топологию $\mathfrak{U}_j$, ($j = 1, 2$).

Отметим следующие обстоятельства. Во-первых, если точка «а» не является атомом распределения суммы η_N , то при условии фиксации последней в «а» выбор версии условного распределения вектора $\theta(N)$ неоднозначен, так что в этой ситуации случайные величины $w_1, \dots, w_N$ не определены. Указанная неопределенность исчезает, если потребовать существование версии упомянутого условного распределения, непрерывной (в смысле слабой сходимости) в какой-нибудь окрестности точки «а» относительно некоторой топологии; в свою очередь, последнее требование эквивалентно существованию непрерывной в некоторой окрестности точки «а» версии условной х.ф. Во-вторых, нам интересен тот случай, при котором распределение случайной величины (1.9) совпадает с условным распределением суммы ζ_N при условии $\eta_N = a$. Поэтому мы предполагаем существование версии этого условного распределения, непрерывной (в смысле слабой сходимости) в какой-нибудь окрестности точки «а», и то, что эта версия совпадает с версией, индуцированной непрерывным вариантом ранее упомянутого условного распределения. В-третьих, формулы (1.9) и (1.10) основаны на коммутативных операциях, и естественное требование (в частности, при округлении значений действительных функций f_k от действительных аргументов) к таким операциям состоит в их непрерывности относительно некоторых топологий. Если, например, $G_1 = \mathbf{R}$ и $G_2 = \mathbf{Z}$, то в качестве топологий выбираются «обычная», как правило, и дискретная топологии соответственно. Следующее определение принадлежит автору [17]–[19], [38].

О п р е д е л е н и е 1. Величина ζ_N , определенная формулой (1.9), называется *l-разделимой статистикой* (*l-PC*, для краткости), если выполняются следующие условия.

- 1) Функция f является $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2^N)$ -измеримой.
- 2) Существуют независимые в совокупности случайные величины $\theta_1, \dots, \theta_N$, определенные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega_2, \mathfrak{S}_2, P_2)$, и элемент $a \in G_2$, такие, что: а) суммы (1.10) являются случайными величинами; б) распределение $P_1(w(N))^{-1}$ вектора $w(N)$ удовлетворяет соотношению

$$P_1(w(N))^{-1}(B) = \hat{Q}_{\theta(N)|\eta_N}(a, B) \quad (1.11)$$

для всех $B \in \mathfrak{B}_2^N$, где $\hat{Q}_{\theta(N)|\eta_N}(\cdot, \cdot)$ — непрерывная в смысле слабой сходимости, в окрестности V точки «а» версия регулярного условного распределения $Q_{\theta(N)|\eta_N}(\cdot, \cdot)$ случайного вектора $\theta(N)$ при заданной случайной величине η_N ; в) версия $\hat{Q}_{\xi_N|\eta_N}(\cdot, \cdot)$ условного распределения случайной величины ξ_N при заданной случайной величине η_N , определяемая для всех $y \in G_2$ и всех $A \in \mathfrak{B}_1$ формулой

$$\hat{Q}_{\xi_N|\eta_N}(y, A) = \hat{Q}_{\theta(N)|\eta_N}(y, f^{-1}[A]), \quad (1.12)$$

регулярна и непрерывна, в смысле слабой сходимости, в окрестности V^* «точки» a .

В работе [38] приведены широкие достаточные условия существования разделимых статистик. Согласно части 1) определения 1, сумма ζ_N является (см. [22, упражнение 22.11]) случайной величиной, и в силу условия 2.a) и формул (1.11) и (1.12) для любого $A \in \mathfrak{B}_1$ имеем:

$$\begin{aligned} P_1 \zeta_N^{-1}(A) &= \hat{Q}_{\theta(N)|\eta_N}(a, f^{-1}[A]) \\ &= \hat{P}_2\left(\{\omega_2 \in \Omega_2: f(\theta(N)(\omega_2)) \in A\} \mid \eta_N = a\right), \end{aligned} \quad (1.13)$$

где $P_1 \zeta_N^{-1}$ — распределение случайной величины ζ_N и $\hat{P}_2(\cdot, \cdot)$ — соответствующая версия условного распределения на σ -алгебре $\mathfrak{S}_{\xi_N} \subset \mathfrak{S}_2$, индуцируемой случайной величиной ζ_N , при заданной случайной величине η_N .

Замкнутое множество C_μ (или $\text{supp } \mu$) называется *носителем вероятностной меры* μ (см., например, [42, с. 28–29]), если $\mu(C_\mu) = 1$ и для любого замкнутого множества C условие $\mu(C) = 1$ влечет соотношение $C_\mu \subset C$. Следующие три определения введены [19], [38] автором.

О п р е д е л е н и е 2. Набор

$$(N, a, G_2, \{P_2 \theta_k^{-1}; k = 1, \dots, N\}, G_1) \quad (1.14)$$

называется *схемой разделимых статистик* (схемой РС, для краткости), если G_2 есть наименьшая LCA-группа, порожденная множеством носителей распределений $P_2 \theta_k^{-1}$ случайных величин θ_k , $k = 1, \dots, N$, и если G_1 — наименьшая LCA-группа, порожденная носителем распределения $P_1 \xi^{-1}$ случайной величины ξ .

Набор (1.14) является основой для *классификации* [19] РС; каждая l -РС определяется соответствующей схемой РС и набором функций f_k , $k = 1, \dots, N$.

О п р е д е л е н и е 3. Схема разделимых статистик называется *симметрической*, если распределения $P_2 \theta_k^{-1}$ случайных величин θ_k , $k = 1, \dots, N$, совпадают; в противном случае схема разделимых статистик называется *несимметрической*.

О п р е д е л е н и е 4. l -разделимая статистика называется *симметрической*, если соответствующая ей схема разделимых статистик является симметрической и если все функции f_k , $k = 1, \dots, N$, совпадают; в противном случае l -разделимая статистика называется *несимметрической*.

1.4. Непрерывная версия регулярного условного распределения. Ее существование для случайной величины X при заданной случайной величине Y связано с интегральным представлением для условной х.ф. случайной величины X при заданной случайной величине Y . Для случаев, когда величины X и Y являются действительными или векторными с действительными компонентами, такое представление получено Уикселлом [47], Бартлеттом [32], Йе [48], Стэком [45], а для

общего случая, когда X и Y принимают значения в ЛСА-группах (скажем, G_1 и G_2 соответственно), — Зейбеллом [49]. Предположим, что в последнем случае выполняются условия: 1) ЛСА-группы G_1 и G_2 являются полными сепарабельными метрическими пространствами; 2) G_2 является наименьшей ЛСА-группой, порожденной носителем распределения случайной величины Y ; 3) существует не зависящая от $\gamma_1 \in G_1^*$ неотрицательная борелевская функция $\Delta \equiv \Delta(\gamma_2)$ такая, что совместная х.ф. (1.3) для всех $\gamma \equiv (\gamma_1, \gamma_2) \in G_1^* \times G_2^*$ удовлетворяет неравенству $|\varphi_{X,Y}(\gamma)| \leq \Delta(\gamma_2)$, причем $\int_{G_2^*} \Delta(\gamma_2) d\kappa_2^*(\gamma_2) < +\infty$.

В частности, из этих условий и теоремы обращения Фурье вытекает существование непрерывной в топологии $\mathcal{M}_2$ ограниченной плотности (по отношению к мере Хаара κ_2 на G_2) распределения случайной величины Y , причем для всех $y \in G_2$ она определяется формулой

$$\frac{dPY^{-1}}{d\kappa_2}(y) = C \int_{G_2^*} \varphi_{X,Y}(e_1^*, \gamma_2) \gamma_2(-y) d\kappa_2^*(\gamma_2); \quad (1.15)$$

в (1.15) e_1^* — нейтральный элемент группы G_1^* , а константа C может быть включена в меру Хаара κ_2^* . Далее, при выполнении условий 1)–3), согласно Зейбеллу ([49, теоремы 3.1 и 3.2]), для всех $y \in V_0$,

$$V_0 = \left\{ g_2 \in G_2: \frac{dPY^{-1}}{d\kappa_2}(g_2) > 0 \right\}, \quad (1.16)$$

и всех $\gamma_1 \in G_1^*$ формула

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{X|Y}(\gamma_1 | Y = y) &= \int_{G_2^*} \varphi_{X,Y}(\gamma_1, \gamma_2) \gamma_2(-y) d\kappa_2^*(\gamma_2) \\ &\times \left\{ \int_{G_2^*} \varphi_{X,Y}(e_1^*, \gamma_2) \gamma_2(-y) d\kappa_2^*(\gamma_2) \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (1.17)$$

определяет версию условной х.ф. $\varphi_{X|Y}(\cdot, \cdot)$ случайной величины X при заданной случайной величине Y , и, кроме того, функция $\hat{Q}_{X|Y}(\cdot, \cdot)$, однозначно определяемая для всех $\gamma_1 \in G_1^*$ и всех $y \in V_0$ формулой

$$\hat{\varphi}_{X|Y}(\gamma_1 | Y = y) = \int_{G_1} \gamma_1(g_1) \hat{Q}_{X|Y}(y, dg_1),$$

является непрерывной, в смысле слабой сходимости, версией регулярного условного распределения случайной величины X при заданной случайной величине Y (отметим, что в силу непрерывности плотности (1.15) множество (1.16) является открытым в топологии $\mathcal{M}_2$ и что для второго множителя, стоящего в правой части (1.17), можно воспользоваться представлением (1.15)). Этот результат доказан в [49] для случая $G_1 = G_2$; в ситуации $G_1 \neq G_2$ доказательство проводится аналогично. Заметим, что правая часть (1.17) не зависит от выбора варианта меры Хаара κ_2^* .

§ 2. Основная предельная теорема

2.1. Формулировка основного результата. Здесь, в отличие от предыдущего, мы будем иметь дело с *последовательностями* l -РС:

$$\zeta_N = \sum_{k=1}^N f_{Nk}(w_{Nk}, \dots, w_{N,k+1}), \quad N \geq 2, \quad (2.1)$$

где суммирование, как и ранее, происходит по модулю N и значение l , вообще говоря, может зависеть от N . При этом, не нарушая общности, можно считать, что при каждом $N \geq 2$ случайные величины $w_{N1}, \dots, w_{NN}$ и соответствующие им независимые случайные величины $\theta_{N1}, \dots, \theta_{NN}$ определены на не зависящих от N вероятностных пространствах $(\Omega_1, \mathfrak{S}_1, P_1)$ и $(\Omega_2, \mathfrak{S}_2, P_2)$ соответственно. Вместо обозначений V и a , упомянутых определением 1, будем употреблять V_N и a_N^0 , а вместо (1.6) и (1.10) будем пользоваться обозначениями:

$$w(N) = (w_{N1}, \dots, w_{NN}), \quad \theta(N) = (\theta_{N1}, \dots, \theta_{NN}), \quad (2.2)$$

$$\xi_N = \sum_{k=1}^N f_{Nk}(\theta_{Nk}, \dots, \theta_{N,k+1}), \quad \eta_N = \sum_{k=1}^N \theta_{Nk}. \quad (2.3)$$

Пусть при каждом $N \geq 2$ множество значений случайных величин $f_{Nk}(\theta_{Nk})$ и множество значений случайных величин θ_{Nk} , $k = 1, \dots, N$, принадлежит, соответственно, замкнутым подгруппам G_{N1} и G_{N2} подходящих LCA-групп $G_1 \equiv (G_1, +, \mathcal{U}_1)$ и $G_2 \equiv (G_2, +, \mathcal{U}_2)$. Для каждого $N \geq 2$ и $j = 1, 2$ подгруппы $G_{Nj} \equiv (G_{Nj}, +, \mathcal{U}_{Nj})$, где $\mathcal{U}_{Nj} = \mathcal{U}_j \cap G_{Nj}$, сами являются LCA-группами (см., например, предложение 4 из [21] и 1-й абзац на с. 196 в [7]). Для $j = 1, 2$ обозначим через $\mathfrak{B}_{Nj}$ наименьшую σ -алгебру, содержащую топологию $\mathcal{U}_{Nj}$, а через G_j^* и G_{Nj}^* — группы, двойственные к группам G_j и G_{Nj} соответственно. Пусть L_{Nj} — аннулятор подгруппы G_{Nj} , и пусть $p_{Nj}: G_j^* \rightarrow G_j^*/L_{Nj}$ — канонический гомоморфизм, ставящий в соответствие каждому элементу из G_j^* содержащий его класс смежности. Согласно утверждению г) пункта 1.1, для $j = 1, 2$ существуют топологические изоморфизмы $v_{Nj}: G_j^*/L_{Nj} \rightarrow G_{Nj}^*$, $N \geq 2$. Обозначим через φ_N совместную х.ф. величин ξ_N и η_N .

Теорема. *Предположим, что выполняются следующие условия, первые четыре из которых имеют место при всех $N \geq 2$:*

а) *для каждого $k = 1, \dots, N$ функции f_{Nk} являются $(\mathfrak{B}_{N1}, \mathfrak{B}_{N2}^{l+1})$ -измеримыми;*

б) *величина (2.1) является l -разделимой статистикой в смысле определения 1;*

в) *группа G_{N2} порождена носителем распределения случайной величины η_N , определяемой формулой (2.3);*

г) *LCA-группы G_1 и G_2 являются полными сепарабельными метрическими пространствами;*

д) для любых не зависящих от N элементов $\gamma_j \in G_j^*$ ($j = 1, 2$) последовательность значений $\varphi_N(v_{N1}(p_{N1}(\gamma_1)), v_{N2}(p_{N2}(\gamma_2)))$ при $N \rightarrow \infty$ сходится к значению $\varphi(\gamma)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, некоторой функции φ , непрерывной в нейтральном элементе (e_1^*, e_2^*) произведения групп $G_1^* \times G_2^*$;

е) существует неотрицательная борелевская функция Δ , определенная на G_2^* , и натуральное число $N_1 \geq 2$, такие, что при всех значениях $\gamma_j \in G_j^*$, $j = 1, 2$, выполняются неравенства

$$\left| \varphi_N(v_{N1}(p_{N1}(\gamma_1)), v_{N2}(p_{N2}(\gamma_2))) \right| \leq \Delta(\gamma_2), \quad N \geq N_1, \quad (2.4)$$

причем функция Δ является интегрируемой на G_2^* по мере Хаара κ_2^* . Тогда:

1) функция $\varphi \equiv \varphi_{\xi, \eta}$ является совместной х.ф. некоторых случайных величин ξ, η со значениями в G_1 и G_2 соответственно;

2) в асимптотике

$$N \rightarrow \infty, \quad a_N^0 \in \tilde{V}_N \rightarrow a^0 \in G_2, \quad (2.5)$$

где $\tilde{V}_N = \{g_{N2} \in G_{N2}: (dP_2\eta_N^{-1}/d\kappa_{N2})(g_{N2}) > 0\}$, и при справедливости условия

$$\frac{dP_2\eta^{-1}}{d\kappa_2}(a^0) \neq 0 \quad (2.6)$$

последовательность распределений случайной величины ζ_N слабо сходится к версии регулярного условного распределения $P_{\xi|\eta}$, непрерывной, в смысле слабой сходимости, на множестве

$$V = \left\{ v \in G_2: \frac{dP_2\eta^{-1}}{d\kappa_2} > 0 \right\} \quad (2.7)$$

и определяемой правой частью нижеследующей формулы (2.16). Здесь $dP_2\eta_N^{-1}/d\kappa_{N2}$, $dP_2\eta^{-1}/d\kappa_2$ — ограниченные и непрерывные (на $\tilde{V}_N$ и V соответственно) версии плотностей распределения случайных величин η_N, η по отношению к мерам Хаара κ_{N2}, κ_2 на G_{N2} и G_2 соответственно.

2.2. Доказательство теоремы. Доказательство проведем в несколько этапов.

1) Согласно условию г) и в силу своей замкнутости группы G_{Nj} ($N \geq 2$; $j = 1, 2$), а также их всевозможные конечные произведения, являются полными сепарабельными пространствами. Отсюда, с учетом условия а), следует, в частности, соответствующая измеримость сумм (2.1) и (2.3). При этом существуют (см. [42, с. 27, теорема 2.1]) и носители распределений, упомянутые условием в).

2) Группы непрерывных характеров G_1^* и G_2^* , а также их произведение, являются LCA-группами (согласно теоремам 10 и 13 из [21]) и топологическими пространствами со второй аксиомой счетности (из-за наличия такого свойства у топологических пространств G_1 и G_2 и в силу теоремы 57 из [23]). Последнее обстоятельство влечет, в частности,

σ -конечность мер Хаара этих групп (см. [22, утверждение 54.2]), что, в свою очередь, позволяет (см. [22, утверждение 29.9]) воспользоваться указанными ниже заменами переменных под знаком интеграла Лебега.

3) Совместная х.ф. φ_N случайных величин ξ_N и η_N определена на произведении LCA-групп $G_{N1}^* \times G_{N2}^*$, а упомянутая условием д) предельная функция φ — на произведении LCA-групп $G_1^* \times G_2^*$. Чтобы воспользоваться методом х.ф. в случае LCA-групп (см. [42, теоремы 3.1, 3.3], и [24, с. 22–23]), мы с помощью композиций $v_{Nj} \odot p_{Nj}$ ($j = 1, 2$) определили согласно условию д) х.ф. φ_N на всем пространстве $G_1^* \times G_2^*$.

Согласно одному из следствий теоремы двойственности Понтрягина (см. [21, следствие из теоремы 27]), каждый непрерывный характер $\gamma_{Nj} \in G_{Nj}^*$ является сужением на G_{Nj} некоторого непрерывного характера $\gamma_j \in G_j^*$ ($j = 1, 2$), так что имеет место соотношение:

$$\gamma_{Nj}(g_{Nj}) = \gamma_j'(g_{Nj}) \quad (2.8)$$

для всех $g_{Nj} \in G_{Nj}$ и любого характера γ_j' из смежного класса $\gamma_j + L_{Nj}$ факторгруппы G_j^*/L_{Nj} , к которому принадлежит характер γ_j . Действительно, если $\gamma_j' = \gamma_j + \lambda_{Nj}$ с $\lambda_{Nj} \in L_{Nj}$, то $\gamma_j'(g_{Nj}) = (\gamma_j + \lambda_{Nj})(g_{Nj}) = \gamma_j(g_{Nj}) + \lambda_{Nj}(g_{Nj}) = \gamma_j(g_{Nj})$, так как, согласно определению аннулятора, значение $\lambda_{Nj}(g_{Nj})$ равно нейтральному элементу группы T для всех $g_{Nj} \in G_{Nj}$ и всех $\lambda_{Nj} \in L_{Nj}$. С другой стороны, сужение на подгруппу G_{Nj} произвольного непрерывного характера является гомоморфным и непрерывным (в относительной топологии), так что каждому смежному классу B_{Nj} из факторгруппы G_j^*/L_{Nj} соответствует непрерывный характер γ_{Nj}^0 группы G_{Nj} . Это соответствие и является (см., например, теорему 27 из [21] и ее доказательство) упомянутым выше топологическим изоморфизмом v_{Nj} . Очевидно, что значения $\varphi_N(v_{N1}(p_{N1}(\gamma_1')), v_{N2}(p_{N2}(\gamma_2')))$ одинаковы для всех $\gamma' \equiv (\gamma_1', \gamma_2')$ из произведения смежных классов $B_{N1} \times B_{N2}$, где B_{Nj} — смежный класс, содержащий элемент γ_j ($j = 1, 2$).

Указанное «продолжение» х.ф. φ_N соответствует продолжению совместного распределения случайных величин ξ_N и η_N с произведения $G_{N1} \times G_{N2}$ на произведение $G_1 \times G_2$, задаваемому значением

$$P(\xi_N, \eta_N)^{-1}(B \cap G_{N1} \times G_{N2})$$

для любого борелевского множества B из $G_1 \times G_2$. Так как: а) имеет место взаимнооднозначное соответствие между мерами и х.ф., б) борелевская σ -алгебра произведения пространств $G_{N1} \times G_{N2}$ совпадает с произведением $\mathfrak{B}_{N1} \times \mathfrak{B}_{N2}$ (в силу наличия второй аксиомы счетности у пространств G_{N1}, G_{N2}), в) отображения v_{Nj} и p_{Nj} ($j = 1, 2$) непрерывны, то существует случайный вектор (ξ_N', η_N') со значениями в $G_1 \times G_2$, для которого функция со значениями $\varphi_N(v_{N1}(p_{N1}(\gamma_1)), v_{N2}(p_{N2}(\gamma_2)))$, $(\gamma_1, \gamma_2) \in G_1 \times G_2$, является х.ф. В силу условия д), наличия второй аксиомы счетности у пространств G_1, G_2 и метода х.ф. получим утверждение 1).

4) Мера Хаара κ_2^* определена на борелевских множествах пространства G_2^* , обладающего (см. этап 2)) второй аксиомой счетности; поэтому, в силу единственности, с точностью до мультипликативной константы, инвариантной меры на LCA-группе и согласно утверждению 54.2 из [22], κ_2^* является σ -конечной мерой.

Покажем, что мера $\kappa_2^* p_{N2}^{-1}$ на G_2^*/L_{N2} , индуцируемая отображением p_{N2} из меры κ_2^* на G_2^* , является мерой Хаара и, кроме того, σ -конечной мерой. Пусть B_{N2}^0 и $B_{N2} = \{B_{N2}^t, t \in M\}$ — соответственно, произвольные элемент и борелевское множество из пространства G_2^*/L_{N2} . Пусть γ_N^0 и γ_N^t — «представители» смежных классов B_{N2}^0 и B_{N2}^t соответственно, а $C_N = \{\gamma_N^t, t \in M\}$. Согласно определению операции сложения в группе G_2^*/L_{N2} имеем:

$$\begin{aligned} \kappa_2^* p_{N2}^{-1}(B_{N2} + ' B_{N2}^0) &= \kappa_2^* p_{N2}^{-1}(\{p_{N2}(\gamma_N^t), t \in M\} + ' p_{N2}(\gamma_N^0)) \\ &= \kappa_2^* p_{N2}^{-1}(\{p_{N2}(\gamma_N^t), t \in M\}) = \kappa_2^* p_{N2}^{-1}(B_{N2}), \end{aligned}$$

так как $\kappa_2^*(C_N + \gamma_N^0) = \kappa_2^*(C_N)$ в силу инвариантности меры κ_2^* . Следовательно, $\kappa_2^* p_{N2}^{-1}$ — мера Хаара на пространстве G_2^*/L_{N2} , обладающем (см. утверждение G на с. 118 в [23]) второй аксиомой счетности, и она — см. предыдущий абзац — является σ -конечной.

Так как v_{N2} — топологический изоморфизм, то для произвольных элемента γ_{N2}^0 и борелевского множества D_{N2} из G_{N2}^* с учетом предыдущего абзаца получим:

$$\begin{aligned} \kappa_2^* p_{N2}^{-1}(v_{N2}^{-1}(D_{N2} + ' \gamma_{N2}^0)) &= \kappa_2^* p_{N2}^{-1}(v_{N2}^{-1}(D_{N2}) + v_{N2}^{-1}(\gamma_{N2}^0)) \\ &= \kappa_2^* p_{N2}^{-1}(v_{N2}^{-1}(D_{N2})). \end{aligned}$$

Поэтому мера κ_{N2}^* на G_{N2}^* , индуцируемая отображением v_{N2} из меры $\kappa_2^* p_{N2}^{-1}$ на G_{N2}^*/L_{N2} , является σ -конечной мерой Хаара.

5) На основании σ -конечности мер Хаара κ_2^* , $\kappa_2^* p_{N2}^{-1}$ и $\kappa_2^* p_{N2}^{-1}(v_{N2}^{-1})$, условий (2.4) и формулы ([22, утверждение 29.9]) замены переменных под знаком интеграла Лебега при $N \geq 2$ получим:

$$\begin{aligned} \int_{G_2^*} \Delta(\gamma_2) d\kappa_2^*(\gamma_2) &\geq \int_{G_2^*} |\varphi_N(\gamma_{N1}, v_{N2}(p_{N2}(\gamma_2)))| d\kappa_2^*(\gamma_2) \\ &= \int_{G_2^*/L_{N2}} |\varphi_N(\gamma_{N1}, v_{N2}(y))| d\kappa_2^* p_{N2}^{-1}(y) \\ &= \int_{G_{N2}^*} |\varphi_N(\gamma_{N1}, \gamma_{N2})| d\kappa_{N2}^*(\gamma_{N2}). \end{aligned}$$

Тем самым, х.ф. φ_N абсолютно интегрируема по мере Хаара κ_{N2}^* , что, в частности, влечет существование (ограниченной) непрерывной версии $dP_2 \eta_N^{-1} / d\kappa_{N2}$ плотности распределения случайной величины η_N (и, следовательно, открытость в топологии $\mathcal{U}_{N2}$ множества $\tilde{V}_N$). Воспользовавшись результатом Зейбелла (формулы (1.15), (1.17)), получим, что

значение условной х.ф. $\tilde{\varphi}_{\xi_N|\eta_N}(\cdot | a_N^0)$, соответствующей непрерывной в смысле слабой сходимости версии $\hat{P}_{\xi_N|\eta_N}(\cdot | v_N)$, $v_N \in \tilde{V}_N$, регулярного условного распределения ξ_N при условии η_N , определяется при всех $\gamma_{N1} \in G_{N1}^*$ формулой:

$$\tilde{\varphi}_{\xi_N|\eta_N}(\gamma_{N1} | a_N^0) = \int_{G_{N2}^*} \varphi_N(\gamma_{N1}, \gamma_{N2}) \gamma_{N2}(-a_N^0) d\kappa_{N2}^*(\gamma_{N2}) \times \left\{ \int_{G_{N2}^*} \varphi_N(e_{N1}^*, \gamma_{N2}) \gamma_{N2}(-a_N^0) d\kappa_{N2}^*(\gamma_{N2}) \right\}^{-1}, \quad (2.9)$$

причем знаменатель в (2.9) представляется в виде

$$\frac{dP_2 \eta_N^{-1}}{d\kappa_{N2}}(a_N^0) = \int_{G_{N2}^*} \varphi_N(e_{N1}^*, \gamma_{N2}) \gamma_{N2}(-a_N^0) d\kappa_{N2}^*(\gamma_{N2}). \quad (2.10)$$

б) Докажем, что, начиная со значения $N \equiv N_1$, существует (открытая) окрестность V_N' , содержащая точку a_N^0 и в каждой точке v_N которой совпадают значения $\hat{P}_{\xi_N|\eta_N}(\cdot | v_N)$ и $\hat{Q}_{\xi_N|\eta_N}(v_N | \cdot)$ версий регулярного условного распределения случайной величины ξ_N при заданной случайной величине η_N . Первая версия определяется согласно (2.9) и непрерывна в точках $v_N \in \tilde{V}_N$, а вторая — согласно формуле (1.12) — индуцируется версией $\hat{Q}_{\theta(N)|\eta_N}(\cdot | \cdot)$ регулярного условного распределения, непрерывной, в смысле слабой сходимости, по первому аргументу в (открытой) окрестности $\tilde{V}_N$. Множество $V_N' = \tilde{V}_N \cap V_N$ является непустым открытым множеством, содержащим точку a_N^0 . Пусть при фиксированном значении $N \geq N_1$ точки $v_N, v_N(1), \dots, v_N(m), \dots$ принадлежат V_N' и $v_N(m) \rightarrow v_N$ при $m \rightarrow \infty$. Согласно свойству непрерывности рассматриваемых версий при $m \rightarrow \infty$ имеем:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\xi_N|\eta_N}(\cdot | v_N(m)) &\Rightarrow \hat{P}_{\xi_N|\eta_N}(\cdot | v_N), \\ \hat{Q}_{\xi_N|\eta_N}(v_N(m), \cdot) &\Rightarrow \hat{Q}_{\xi_N|\eta_N}(v_N, \cdot). \end{aligned}$$

Отсюда по теореме (см. [24], [43]) о непрерывном соответствии между распределениями и х.ф. для соответствующих версий условных х.ф. при каждом не зависящем от m значении $\gamma_{N1} \in G_{N1}^*$ получим соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\xi_N|\eta_N}(\gamma_{N1} | v_N(m)) &\rightarrow \tilde{\varphi}_{\xi_N|\eta_N}(\gamma_{N1} | v_N), \quad m \rightarrow \infty, \\ \hat{\varphi}_{\xi_N|\eta_N}(\gamma_{N1} | v_N(m)) &\rightarrow \hat{\varphi}_{\xi_N|\eta_N}(\gamma_{N1} | v_N), \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

означающие непрерывность в окрестности V_N' функций $\tilde{\varphi}_{\xi_N|\eta_N}(\gamma_{N1} | \cdot)$, $\hat{\varphi}_{\xi_N|\eta_N}(\gamma_{N1} | \cdot)$ при каждом фиксированном значении $\gamma_{N1} \in G_{N1}^*$. Предположим, что для некоторых значений $\gamma_{N1}^0 \in G_{N1}^*$ и $v_N^0 \in V_N'$ величина

$$\varepsilon_N(\gamma_{N1}^0, v_N^0) \equiv \left| \tilde{\varphi}_{\xi_N|\eta_N}(\gamma_{N1}^0 | v_N^0) - \hat{\varphi}_{\xi_N|\eta_N}(\gamma_{N1}^0 | v_N^0) \right|$$

положительна. Так как G_{N2} является локально компактным хаусдорфовым пространством, то (теорема на с. 196 в [7]) семейство замкнутых компактных окрестностей произвольной точки образует — наряду с семейством открытых окрестностей — базу системы всех ее окрестностей.

В силу непрерывности на открытом множестве V'_N функций $\epsilon_N(\gamma_{N1}^0, \cdot)$ и $(dP_2\eta_N^{-1}/d\kappa_{N2})(\cdot)$ найдутся замкнутые компактные множества K'_N и K''_N соответственно, содержащие точку v_N , и такие, что значения указанных функций на соответствующем компакте не меньше положительного числа δ . Множество $K = K'_N \cap K''_N$ является (замкнутой компактной) окрестностью точки v_N , так что найдется множество V_N^0 из базы открытых окрестностей этой точки, содержащееся в K . Мера Хаара непустого открытого множества положительна ([22, утверждение 54.2, свойство (ii)]), и, следовательно,

$$P_2\eta_N^{-1}(V_N^0) = \int_{V_N^0} \frac{dP_2\eta_N^{-1}}{d\kappa_{N2}}(v_N) d\kappa_{N2}(v_N) \geq \delta \kappa_{N2}(V_N^0) > 0.$$

Последнее неравенство противоречит тому, что две версии условной х.ф. могут отличаться лишь на множестве $P_2\eta_N^{-1}$ -меры нуль. Тем самым, в окрестности V_N^0 совпадают рассматриваемые версии условной х.ф. (а значит, и соответствующего условного распределения). Следовательно, с учетом (1.13) при $N \geq N_1$ получаем

$$P_1\zeta_N^{-1}(\cdot) = \hat{P}_{\xi_N|\eta_N}(\cdot | a_N^0), \quad (2.11)$$

причем правой части этого равенства соответствует х.ф. (2.9).

7) Для завершения доказательства остается вычислить предельное значение правой части (2.9). Воспользовавшись упомянутыми выше заменами переменных под знаком интеграла Лебега и положив $\gamma_{N1} \equiv v_{N1}(p_{N1}(\gamma_1))$ для всех значений γ_1 из смежного класса $v_{N1}^{-1}(\gamma_{N1})$, получим:

$$\begin{aligned} & \int_{G_{N2}^*} \varphi_N(\gamma_{N1}, \gamma_{N2}) \gamma_{N2}(-a_N^0) d\kappa_{N2}^*(\gamma_{N2}) \\ &= \int_{G_2^*} \varphi_N(v_{N1}(p_{N1}(\gamma_1)), v_{N2}(p_{N2}(\gamma_2))) \\ & \quad \times (v_{N2} \odot p_{N2} \odot \gamma_2)(-a_N^0) d\kappa_2^*(\gamma_2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Согласно (2.8) величина $(v_{N2} \odot p_{N2} \odot \gamma_2)(-a_N^0)$ равна $\gamma_2(-a_N^0)$ и постоянна на смежных классах факторгруппы G_2^*/L_{N2} , так что в силу непрерывности γ_2 и условия (2.5) имеем:

$$(v_{N2} \odot p_{N2} \odot \gamma_2)(-a_N^0) \longrightarrow \gamma_2(-a^0) \quad \text{при } N \rightarrow \infty \quad (2.13)$$

для каждого фиксированного $\gamma_2 \in G_2^*$. Учитывая условия д) и е) и применяя теорему Лебега (утверждение 29.12 из [22]) о мажорируемой сходимости, из (2.12) и (2.13) для каждого фиксированного значения $\gamma_1 \in G_1^*$ получим:

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{G_{N2}^*} \varphi_N(\gamma_{N1}, \gamma_{N2}) \gamma_{N2}(-a_N^0) d\kappa_{N2}^*(\gamma_{N2}) \\ &= \int_{G_2^*} \varphi(\gamma_1, \gamma_2) \gamma_2(-a^0) d\kappa_2^*(\gamma_2). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Полагая в (2.14) $\gamma_1 = e_1^*$ и замечая, что $v_{N1}(p_{N1}(e_1^*)) = e_{N1}^*$ для всех $N \geq 2$, при $N \rightarrow \infty$ выводим:

$$\begin{aligned} & \int_{G_{N2}^*} \varphi_N(e_{N1}^*, \gamma_{N2}) \gamma_{N2}(-a_N^0) d\kappa_{N2}^*(\gamma_{N2}) \\ & \rightarrow \int_{G_2^*} \varphi(e_1^*, \gamma_2) \gamma_2(-a^0) d\kappa_2^*(\gamma_2). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Из условия е) вытекает абсолютная мажорируемость (равномерно по $\gamma_1 \in G_1^*$) по второму аргументу функции $\varphi(\cdot, \cdot)$ функцией Δ . Это, прежде всего, влечет существование (см. формулу (1.15)) ограниченной непрерывной (на множестве (2.24)) версии $dP_2 \eta^{-1}/d\kappa_2$ плотности распределения случайной величины η по отношению к мере Хаара κ_2 . Поэтому согласно формуле (2.10) и условию (2.6), начиная с некоторого значения $N \equiv N_2 \geq N_1$, знаменатель правой части формулы (2.9) отличен от нуля. Учитывая формулы (2.14) и (2.15), из (2.9) для каждого фиксированного значения $\gamma_1 \in G_1^*$ получим:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}_{\xi_N|\eta_N}(\gamma_1 | a_N^0) &= \int_{G_2^*} \varphi(\gamma_1, \gamma_2) \gamma_2(-a^0) d\kappa_2^*(\gamma_2) \\ &\times \left\{ \int_{G_2^*} \varphi(e_1^*, \gamma_2) \gamma_2(-a^0) d\kappa_2^*(\gamma_2) \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Согласно результату Зейбелла (см. пункт 1.4), правая часть формулы (2.16) определяет — с учетом утверждения 1) теоремы — версию $P_{\xi|\eta}$ регулярного условного распределения, непрерывную (в смысле слабой сходимости) при всех $a^0 \in V$. Утверждение 2) теоремы следует из формул (2.11) и (2.16).

З а м е ч а н и е. В работах [17], [18] автора намечены доказательства утверждений теоремы для частного случая:

$$G_{Nj} \leq G_{N+1,j}; \quad N = 2, 3, \dots \quad (j = 1, 2). \quad (2.17)$$

§ 3. Некоторые применения

3.1. Сходимость условных распределений. По существу, доказательство теоремы не использует представление случайных величин ξ_N и η_N в форме сумм. Вариант (с ограничениями (2.17)) следующего утверждения приведен в работах [16], [17].

Следствие 1. *Предположим, что случайные величины ξ_N и η_N не обязательно имеют аддитивную форму (2.3), но выполняются условия в)–е) теоремы § 2. Тогда имеет место утверждение 1) этой теоремы и в асимптотике (2.5) при справедливости условия (2.6) последовательность $\hat{P}_{\xi_N|\eta_N}(\cdot | a_N^0)$, $N \geq 2$, определяемая правой частью (2.9), слабо сходится к значению $\hat{P}_{\xi|\eta}(\cdot | a^0)$ версии $\hat{P}_{\xi|\eta}(\cdot | \cdot)$ регулярного условного распределения, непрерывной (в смысле слабой сходимости)*

по второму аргументу на множестве (2.7) и определяемой правой частью формулы (2.16).

Доказательство следует из доказательства теоремы.

Применительно к действительным (или векторным с действительными компонентами) случайным суммам ξ_N и η_N с $l = 0$, в наших обозначениях, задача сходимости условных распределений рассматривалась Парзенем [44], Стэком [45], Д. М. Чибисовым [33], Михелем [40], Хольстом [37] и другими авторами; при этом всегда, исключая работы [13], [15], [17] автора, отдельно изучались случаи абсолютно непрерывных (по мере Лебега) и решетчатых распределений, и, как правило, в качестве предельного распределения рассматривалось нормальное. Полученный Стэком [45, теорема 2.1] результат о предельном законе общего вида носит «дескриптивный» характер и не дает явной формулы для предельного распределения.

Представление случайных величин ξ_N и η_N в виде сумм позволяет воспользоваться результатами о предельных законах: а) для m -зависимых случайных величин — при $l > 0$ (см. [5, с. 469], и [1, § 20]) и б) для независимых случайных величин — при $l = 0$ (см. [2], [30], [46]) — в случае действительных ξ_N , η_N , и [42], [43] — в случае LCA-значных ξ_N , η_N). Важным классом предельных распределений сумм независимых случайных величин являются безгранично делимые распределения.

3.2. Безгранично делимые распределения на LCA-группах и предельные распределения разделимых статистик. Пусть $G = (G, +, \mathcal{U})$ — сепарабельная метрическая абелева группа, $\mathfrak{B}$ — наименьшая σ -алгебра, содержащая топологию $\mathcal{U}$, и $M(G)$ — множество всех вероятностных мер, определенных на пространстве $(G, \mathfrak{B})$. *Сверткой* двух мер $\mu, \nu \in M(G)$ называется функция $\mu * \nu$ (или $\nu * \mu$), определяемая для всех $B \in \mathfrak{B}$ формулой:

$$(\mu * \nu)(B) = \int_G \mu(B - x) d\nu(x) = \int_G \nu(B - x) d\mu(x) = (\nu * \mu)(B).$$

Корректность определения свертки доказывается стандартным образом (см., например, [22, формулу (36.1)], и [24, с. 8]) с использованием указанного выше наличия второй аксиомы счетности для G . Если δ_g — мера, сосредоточенная в точке $g \in G$, то очевидно, что $(\mu * \delta_g)(B) = (\delta_g * \mu)(B) = \mu(B - g)$ для всех $B \in \mathfrak{B}$. Мера $\mu \in M(G)$ называется *идемпотентной*, если $\mu * \mu = \mu$. Пусть X и Y — независимые случайные величины, принимающие значения в G и имеющие распределения μ_X и μ_Y соответственно. Тогда (см. [24, с. 8–10]) сумма $Z = X + Y$ является случайной величиной и $\mu_Z = \mu_X * \mu_Y$. Везде далее G — LCA-группа. Распределение $\mu \in M(G)$ называется [42, с. 77, определение 4.1] *безгранично делимым*, если для каждого натурального n существуют распределение $\mu_n \in M(G)$ и элемент $g_n \in G$, такие, что μ является сверткой n распределений μ_n и распределения, сосредоточенного в g_n . Наличие в

этом определении (в отличие от классического, когда $G = R^a \times Z^b$ с целыми неотрицательными степенями a и b , сумма которых не меньше 1) элемента g_n связано с отсутствием, вообще говоря, «делимости» элементов группы G . Характеристическая функция $\hat{\mu}$ безгранично делимого распределения μ равна 0 тогда и только тогда (см. [42, с. 78, теорема 4.2]), когда μ представляется в виде свертки какого-либо распределения с невырожденным идемпотентным распределением (в таких случаях говорят, что μ имеет идемпотентный делитель). Для компактной подгруппы $H \subseteq G$ мера Хаара κ является конечной (так что ее можно нормализовать) и безгранично делимой; кроме того, $\hat{\kappa}(\gamma) = 1$, если γ принадлежит аннулятору H , и $\hat{\kappa}(\gamma) = 0$ — в противном случае. Следовательно, если распределение $\mu \in M(G)$ — безгранично делимо, то $\mu = \lambda * \nu$, где λ — нормализованная мера Хаара некоторой компактной подгруппы в G и ν — безгранично делимое распределение без идемпотентных делителей.

Рассмотрим примеры безгранично делимых распределений. Пусть F — произвольная вполне конечная мера на G . Распределение $e(F)$, ассоциированное с F , определяется (см. [43, определение 4.2]) формулой:

$$e(F) = \exp \left\{ -F(G) \right\} \left[1 + F + \frac{F^2}{2!} + \cdots + \frac{F^n}{n!} + \cdots \right], \quad (3.1)$$

где 1 — мера единичной массы, сосредоточенная в нейтральном элементе e группы G , и F^n — n -кратная свертка меры F . Характеристическая функция меры (3.1) для всех $\gamma \in G^*$ определяется формулой:

$$\hat{e}(F)(\gamma) = \exp \left\{ \int_G [\gamma(g) - 1] dF(g) \right\}. \quad (3.2)$$

Отсюда вытекает, что для любых двух вполне конечных мер F_1 и F_2 $e(F_1) * e(F_2) = e(F_1 + F_2)$, что, в частности, для каждого натурального n влечет равенство: $e(F) = [e(F/n)]^n$. Следовательно, $e(F)$ является безгранично делимым распределением; распределения типа (3.2) иногда называются *обобщенными распределениями Пуассона*.

Распределение μ на LCA-группе G называется (см. [43, определение 6.1]) *гауссовским в смысле Партасарати* или *P-гауссовским* (или просто *гауссовским*), если μ — безгранично делимо и при любой факторизации: $\mu = e(F) * \alpha$, распределение α безгранично делимо и мера F сосредоточена в нейтральном элементе e группы G . Это определение совпадает с классическим определением нормального закона, когда $G = R^n$ с любым натуральным n . Характеристическая функция $\hat{\mu}$ P-гауссовского закона на LCA-группе G для каждого $\gamma \in G^*$ определяется формулой:

$$\hat{\mu}(\gamma) = \gamma(g_0) \exp \left\{ -\varphi(\gamma) \right\}, \quad (3.3)$$

где g_0 — некоторый фиксированный элемент G и φ — неотрицательная непрерывная функция, удовлетворяющая для всех $\gamma_1, \gamma_2 \in G^*$ равенству

$$\varphi(\gamma_1 + \gamma_2) + \varphi(\gamma_1 - \gamma_2) = 2[\varphi(\gamma_1) + \varphi(\gamma_2)];$$

(если $\gamma(g_0) = 1$, то соответствующее гауссовское распределение называется *симметричным*). Среди других обобщений нормального распределения на ЛСА-группы наиболее известно (см., например, [29, 5.3]) *гауссовское распределение в смысле Бернштейна* (для краткости, *В-гауссовское распределение*); в отличие от В-гауссовского, Р-гауссовское распределение не имеет идемпотентных делителей (соотношения между Р- и В-гауссовскими мерами приводятся в [29, 5.3], и в [27]).

Распределение $\mu \in M(G)$ называется [28] *распределением Коши*, если х.ф. $\hat{\mu}$ для каждого $\gamma \in G^*$ определяется формулой:

$$\hat{\mu}(\gamma) = \gamma(g_0) \exp \left\{ -(\varphi(\gamma))^{1/2} \right\}, \quad (3.4)$$

где g_0 — некоторый элемент из G и функция φ такого же вида, как в (3.3). Для каждого натурального n х.ф. (3.4) удовлетворяет соотношению: $\hat{\mu}(n\gamma) = (\hat{\mu}(\gamma))^n$, так что распределение Коши является безгранично делимым.

На декартовом произведении пространств $G \times G^*$ существует (см. [43, с. 119–120]) действительная функция g , обладающая свойствами:

- 1) g — непрерывная функция;
- 2) $\sup_{g \in G} \sup_{\gamma \in K} |g(g, \gamma)| < +\infty$ для каждого компактного множества $K \subset G^*$;
- 3) $g(g, \gamma_1 + \gamma_2) = g(g, \gamma_1) + g(g, \gamma_2)$ для каждого $g \in G$ и всех $\gamma_1, \gamma_2 \in G^*$ и $g(-g, \gamma) = -g(g, \gamma)$ для всех $g \in G$ и всех $\gamma \in G^*$;
- 4) для любого компактного множества $K \subset G^*$ существует окрестность V_K нейтрального элемента e группы G , такая, что $\gamma(g) = \exp\{ig(g, \gamma)\}$ для всех $g \in G$ и всех $\gamma \in K$;

5) если g стремится к e , то g стремится к нулю равномерно по всем $\gamma \in K$ для любого компактного множества $K \subset G^*$. Функция g называется (см. [29, определение 5.1.7]) *локальным скалярным произведением* или *центрирующей функцией*. Примеры функции g приведены в [42, с. 87–88], и в [24, с. 26].

Для х.ф. $\hat{\mu}$ безгранично делимого распределения μ имеет место (см. [42, теорема 7.1, и следствие 7.1]) аналог канонического представления Леви–Хинчина [30], [2]:

$$\hat{\mu}(\gamma) = \gamma(g_0) \hat{\lambda}(\gamma) \exp \left\{ \int_G [\gamma(g) - 1 - ig(g, \gamma)] dF(g) - \varphi(g) \right\} \quad (3.5)$$

для всех $\gamma \in G^*$. В формуле (3.5) g_0 — некоторый фиксированный элемент группы G , φ и g — упомянутые выше функции; λ — нормализованная мера Хаара компактной подгруппы (возможно тривиальной) группы G ; F — σ -конечная мера на $\mathfrak{B}$ с конечной «массой» вне любой окрестности нейтрального элемента e группы G , удовлетворяющая для всех $\gamma \in G^*$ соотношению $\int_G [1 - \operatorname{Re} \gamma(g)] dF(g) < +\infty$.

При справедливости (3.5) говорят (см. [42, с. 109]), что мера μ имеет представление (g, F, φ) . Это представление не является единственным, если мера μ имеет нетривиальный идемпотентный делитель (так как для

любой меры ν , сосредоточенной на носителе λ , имеем: $\lambda * \nu = \lambda$). Пусть (g', F', φ') и (g'', F'', φ'') — два представления одного и того же безгранично делимого распределения μ без идемпотентных делителей. Тогда (см. [42, теорема 8.1]) $\varphi' = \varphi''$ и знаковая мера $F' - F''$ тождественно равна нулю на дополнении аннулятора компоненты нейтрального элемента e^* группы G^* . Этот аннулятор является (см. [42, с. 111, замечание 1]) наименьшей замкнутой подгруппой, содержащей все компактные подгруппы группы G , или, что эквивалентно, он является группой всех компактных элементов в G^* . Указанное обстоятельство отражает роль компактных подгрупп группы G (или, что эквивалентно, роль несвязности двойственной группы G^*) в неединственности представления (2.10). Представление (2.10) безгранично делимого распределения без идемпотентных делителей является (см. [42, с. 112]) единственным тогда и только тогда, когда каждый элемент любой компактной подгруппы группы G представляет собой элемент порядка 2.

Предположим, что G — вполне несвязная группа и безгранично делимое распределение $\mu \in M(G)$. Для такой группы функция g тождественно равна нулю и, кроме того (см. [42, с. 109, замечание 1]), функция φ также тождественно равна нулю; в этом случае вместо (3.5) для всех $\gamma \in G^*$ имеем:

$$\hat{\mu}(\gamma) = \gamma(g_0) \hat{\lambda}(\gamma) \exp \left\{ \int_G [\gamma(g) - 1] dF(g) \right\}. \quad (3.6)$$

Представление (3.6) справедливо, в частности, и для конечной группы G — для нее топология $\mathcal{U}$ дискретна.

Пусть теперь $G = \mathbb{R}^n$. Тогда х.ф. $\hat{\mu}$ безгранично делимого распределения μ допускает (см., например, [46]) представление:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(t) = \exp \left\{ ia't - \frac{1}{2} t' \Sigma t \right. \\ \left. + \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left[it'x - 1 - \frac{it'x}{1 + x'x} \right] dF(x) \right\}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $t, a, x \in \mathbb{R}^n$ — вектор-столбцы, Σ — неотрицательная матрица n -го порядка и F — σ -конечная мера на $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$ такая, что при $|x| = (x'x)^{1/2}$

$$\int_{|x| < 1} |x|^2 dF(x) < +\infty, \quad \int_{|x| \geq 1} dF(x) < +\infty.$$

Отметим, что представление (3.7) для каждого безгранично делимого распределения является единственным (в силу отсутствия на $\mathbb{R}^n$ нетривиальных компактных подгрупп).

Пусть $\{\mu_{n1}, \dots, \mu_{nk_n}\}$, $n > 1$, — последовательность серий независимых в каждой серии распределений $\mu_{nk} \in M(G)$ и пусть

$$k_n \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Предположим, что для этой последовательности имеет место условие

равномерной асимптотической малости (см. [42, определение 5.1]):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq k \leq k_n} \mu_{nk}(U^c) = 0, \quad (3.9)$$

где U^c — дополнение произвольной не зависящей от n окрестности U нейтрального элемента $e \in G$. Эквивалентное определение в терминах х.ф. $\hat{\mu}_{nk}$, соответствующей мере μ_{nk} , имеет вид (см. [42, с. 82]):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq k \leq k_n} \sup_{\gamma \in K} |\hat{\mu}_{nk}(\gamma) - 1| = 0 \quad (3.10)$$

для каждого компактного множества $K \subseteq G^*$. Справедливо (см. [42, теорема 5.1]) следующее обобщение результата А. Я. Хинчина [30], [2]: если выполняются условия (3.8), (3.9) и

$$\mu_n \equiv \mu_{n1} * \dots * \mu_{nk_n} \equiv \prod_{k=1}^{k_n} \mu_{nk} \Rightarrow \mu, \quad (3.11)$$

то μ — безгранично делимое распределение; обратно, если в (3.11) μ — безгранично делимое распределение, то существует [24, с. 27] входящая в (3.11) последовательность серий $\{\mu_{nk}\}$, удовлетворяющая условию равномерной асимптотической малости.

Имеет место (см. [42, следствие 9.2] и [24, теорема 4.11]) следующее обобщение центральной предельной теоремы. Пусть выполняются условия (3.8), (3.9) и (3.11), причем распределение μ не имеет идемпотентных делителей. Распределение μ является Р-гауссовским тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mu_{nk}(U^c) = 0$ для любой окрестности U элемента $e \in G$.

Пусть G — компактная сепарабельная метрическая (возможно, не-коммутативная) группа. Согласно Б. М. Клоссу [8] (см. также с. 19–20 в [24]) группа G обладает свойством (K), если, какова бы ни была последовательность распределений $\{\mu_n \in M(G)\}$, существует такая последовательность элементов $\{g_n \in G\}$, что последовательность $\{\mu_1 * \dots * \mu_n * \delta_{g_n}\}$ имеет слабый предел при $n \rightarrow \infty$. Справедлив принадлежащий Б. М. Клоссу (см. также теорему 3.4 из [24]) *общий принцип стодимости*: любая компактная группа, удовлетворяющая первой аксиоме счетности, обладает свойством (K); если LCA-группа обладает свойством (K), то она компактна.

З а м е ч а н и е. Чтобы выполнялось предположение д) теоремы, мы должны, вообще говоря, от случайных величин ξ_N и η_N перейти к случайным величинам $\xi_N^0 = v_N^{(1)}(\xi_N)$, $\eta_N^0 = v_N^{(2)}(\eta_N)$; $N \geq 2$, где $v_N^{(j)}: G_j \rightarrow G_j$ ($j = 1, 2$) — некоторые топологические автоморфизмы; при этом условие: $\eta_N = a_N$ меняется на условие: $\eta_N^0 = a_N^0$. В случае: $G_j = \mathbb{R}^{b_j} \times \mathbb{Z}^{c_j}$; $b_j + c_j \geq 1$ ($j = 1, 2$), преобразования $v_N^{(j)}$; $j = 1, 2$, представляют собой определенные (см., например, работы [2], [5], [30], [46]) нормировки, с помощью которых распределения случайных величин ξ_N и η_N концентрируются (с ростом N) около начала координат. Если же

$G_j, j = 1, 2$, — компактные LCA-группы, то, согласно предыдущему абзацу, любую «нарастающую» последовательность сумм независимых случайных величин со значениями в таких группах можно «сдвинуть» с помощью соответствующей последовательности $\{g_N^{(j)} \in G_j, N \geq 2\}$ неслучайных элементов, в результате чего преобразованная последовательность будет иметь предельное распределение (при этом $a_N^0 = a_N - g_N^{(2)}, N \geq 2$). Если, в частности, суммируются одинаково распределенные случайные величины, то предельное распределение суммы является мерой Хаара некоторой подгруппы, определяемой по носителю распределения слагаемых. Например, если S — группа вращений окружности (S топологически изоморфна T), то распределение суммы случайных величин слабо сходится к равномерному распределению на окружности, за исключением того случая, когда значениями слагаемых могут быть, с вероятностью 1, только вершины вписанного в указанную окружность многоугольника — это результат П. Леви (см. ссылку [10] к библиографии работы [24]). Случай «элементарных» LCA-групп (см. п. 1.1): $G_j = \mathbb{R}^{b_j} \times \mathbb{Z}^{c_j} \times \mathbb{T}^{d_j} \times F_j; j = 1, 2$, является комбинацией рассмотренных выше случаев (отметим, что, согласно теореме А. Н. Тихонова (см. [7, с. 192]), произведение компактных групп остается компактной — в топологии произведения — группой).

В ситуации же общих LCA-групп важную роль играет «сведение» к суммированию «равномерно асимптотически малых» случайных величин (см. формулы (3.9) и (3.10)).

Следствие 2. *Предположим, что: а) в формуле (2.1) $l = 0$ при всех $N \geq 2$; б) выполняются условия теоремы; в) имеет место условие (3.10), в котором $n = k_n = N, \gamma = (\gamma_1, \gamma_2), K$ — компактное множество из $G_1^* \times G_2^*$, величина $\hat{\mu}_{nk}(\gamma)$ заменяется на $\varphi_N(v_{N1}(p_{N1}(\gamma_1)), v_{N2}(p_{N2}(\gamma_2)))$. Тогда справедливы утверждения теоремы с предельной характеристической функцией φ , определяемой формулой вида (3.5) с заменами G на $G_1 \times G_2$ и G^* на $G_1^* \times G_2^*$.*

Доказательство. Согласно предположению д), утверждению 1) теоремы и теореме о непрерывном взаимно однозначном соответствии между распределениями и х.ф., совместное распределение случайных величин ξ_N и η_N слабо сходится к распределению с х.ф. φ . В силу теоремы 5.2 из [43] (см. также теорему 4.4 из [24] и теорему 5.2 из [42]) условие в) гарантирует безграничную делимость х.ф. φ , что в свою очередь, влечет (см. [43, §§ 7, 8]) для φ представление вида (3.5) с указанными выше замечаниями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
2. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм незави-

- симых случайных величин. М.: Гостехиздат, 1949, 264 с.
3. Гнеденко Б. В., Кудлаев Э. М. О случайных величинах, обусловленных суммами независимых случайных величин. — Вестник МГУ, сер. матем. и мех., 1995, № 1, с. 23–31.
 4. Желобенко Д. П., Штерн А. И. Представления групп Ли. М.: Наука, 1983, 360 с.
 5. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные случайные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
 6. Иванов В. А., Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Дискретные задачи теории вероятностей. — Итоги науки и техники, сер. Теория вероятн. Матем. статист. Теорет. киберн., 1984, т. 23, с. 3–60.
 7. Келли Дж. Общая топология. М.: Наука, 1981, 383 с.
 8. Клоос Б. М. Предельные распределения на бикompактных абелевых группах. — Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. VI, в. 3, с. 392–421.
 9. Колчин В. Ф. Один класс предельных теорем для условных распределений. — Литов. матем. сб., 1968, т. 8, № 1, с. 53–63.
 10. Колчин В. Ф. Случайные отображения. М.: Наука, 1984, 206 с.
 11. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976, 223 с.
 12. Кудлаев Э. М. Асимптотическая нормальность статистик некоторых классов критериев согласия и однородности. — Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 3, с. 534–537.
 13. Кудлаев Э. М. О предельных условных распределениях сумм случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. XXIX, № 4, с. 743–752.
 14. Кудлаев Э. М. Предельные теоремы для одного класса разделимых статистик. — Теория вероятн. и ее примен., 1985 т. XXX, № 1, с. 170–174.
 15. Кудлаев Э. М. Об условиях слабой сходимости распределений разделимых статистик. — Матем. заметки, 1986, т. 40, № 6, с. 762–769.
 16. Кудлаев Э. М. О сходимости условных распределений случайных элементов со значениями в локально компактных абелевых группах. — В сб.: Вероятностные задачи дискретной математики. М.: Изд-во Московского ин-та электронного машиностр., 1987, с. 73–80.
 17. Кудлаев Э. М. Разделимые статистики. — Итоги науки и техники, сер. Теория вероятн. Матем. статист. Теорет. киберн., 1988, т. 27, с. 97–149.
 18. Кудлаев Э. М. О суммировании некоторых зависимых случайных величин со значениями в локально компактных абелевых группах. — Изв. вузов, сер. матем., 1989, № 2, с. 41–46.
 19. Кудлаев Э. М. Классификация разделимых статистик. — В сб.: Вероятностные процессы и их приложения. М.: Изд-во Московского ин-та электронного машиностр., 1989, с. 101–114.
 20. Кудлаев Э. М. О слабой сходимости распределений разделимых статистик. — Тезисы докл. Второй Всероссийской школы-коллоквиума по стохастическим методам (Йошкар-Ола, 18–23 декабря 1995 г.). М.: ТВП, 1995, с. 83–84.
 21. Моррис С. Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп. М.: Мир, 1980, 103 с.
 22. Пармасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры. М.: Мир, 1983.
 23. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1984, 520 с.
 24. Сазонов В. В., Тутубалин В. Н. Распределения вероятностей на топологических группах. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. XI, в. 1, с. 3–56.
 25. Севастьянов Б. А. Сходимость к гауссовскому и пуассоновскому процессам распределения числа «пустых ящиков» в классической задаче о дробинках. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. XII, в. 1, с. 144–154.
 26. Севастьянов Б. А. Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. XVII, в. 4, с. 733–738.

27. Фельдман Г. М. Гауссовские распределения в смысле Бернштейна на группах. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. XXXI, в. 1, с. 47–58.
28. Фельдман Г. М. Распределение Коши на абелевых группах и его характеристизация. Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 4, с. 711–743.
29. Хейер Х. Вероятностные меры на локально компактных группах. М.: Мир, 1981, 701 с.
30. Хинчин А. Я. Предельные законы для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: ОНТИ, 1938, 116 с.
31. Barbour A. D., Holst L. Some applications of the Stein–Chen method for proving Poisson convergence. — Adv. Appl. Probab., 1989 v. 21, № 1, p. 74–91.
32. Bartlett M. S. The characteristic function of a conditional statistic. — J. London Math. Soc., 1938, v. 13, p. 62–67.
33. Chibisov D. M. On the normal approximation for certain class of statistics. — In: Proc. of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability Theory, v. 1, Los Angeles: Univ. of California Press, 1972, p. 153–174.
34. Darling D. A. On a class problems related to the random division of an interval. — Ann. Math. Statist., 1953, v. 24, № 2, p. 239–253.
35. Hall P. Limit theorems for sums of general functions of spacings. — Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1984, v. 96, p. 517–532.
36. Holst L. Two conditional limit theorems with applications. — Ann. Statist., 1979, v. 7, № 3, p. 551–557.
37. Holst L. Some conditional limit theorems in exponential families. — Ann. Probab., 1981, v. 9, № 5, p. 818–830.
38. Kudlaev E. M. On an existence theorem for decomposable statistics. — Вероятностные методы дискретной математики. Moscow/Utrecht: ТБИ/VSP, 1994, p. 271–286.
39. Le Cam L. Une théorème sur la division d’une intervalle par des points pres au hasard. — Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 1958, v. 7, № 3–4, p. 7–16.
40. Michel R. Asymptotic expansions for conditional distributions. — J. Multivariate Anal., 1979, v. 9, № 3, p. 393–400.
41. Morris C. Central limit theorems for multinomial sums. — Ann. Statist., 1975, v. 3, № 1, p. 165–188.
42. Parthasarathy K. R. Probability Measures on Metric Spaces. New York: Academic Press, 1967.
43. Parthasarathy K. R., Ranga Rao R., Varadhan S. R. S. Probability distributions on locally compact abelian groups. — Illinois J. Math., 1963, v. 7, № 2, p. 337–369.
44. Parzen E. On uniform convergence of families of sequences of random variables. — Univ. Calif. Publ. Statist., 1954, v. 2, p. 23–54.
45. Steck G. P. Limit theorems for conditional distributions. — Univ. Calif. Publ. Statist., 1957, v. 2, № 12, p. 237–284.
46. Takano K. Central convergence criterion in the multidimensional case. — Ann. Inst. Statist. Math., 1956, v. 7, № 2, p. 95–102.
47. Wicksell S. P. On correlation functions of type III. — Biometrika, 1933, v. 25, № 1, p. 121–133.
48. Yeh J. Inversion of conditional expectations. — Pacific J. Math., 1974, v. 52, № 2, p. 631–640.
49. Zabell S. Continuous versions of regular conditional distributions. — Ann. Probab., 1979, v. 7, № 1, p. 159–165.

Поступила в редакцию
11.IX.1996