Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Розовский, Одно обобщение теоремы Колмогорова о законе повторного логарифма, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 1, 134–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1716>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 12:37:10

© 1997 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КОЛМОГОРОВА
О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА¹⁾

В заметке найдены необходимые и достаточные условия выполнения закона повторного логарифма для суммы определенным образом ограниченных случайных величин в случае произвольной монотонно растущей к бесконечности нормировки. При стандартной нормирующей последовательности из полученных результатов вытекает известная теорема Колмогорова.

Ключевые слова и фразы: независимые ограниченные случайные величины, закон повторного логарифма, сходимость почти на верное.

1. Введение. Основные результаты. Пусть $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин с нулевыми средними и конечными дисперсиями σ_i^2 ($i \geq 1$). Положим

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad B_n^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2, \quad n \geq 1.$$

Согласно известной теореме А. Н. Колмогорова (см. [1]), если

$$\text{ess sup } |X_n| = o\left(\frac{b_n}{\log \log b_n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где $b_n = B_n \sqrt{2 \log \log B_n}$ растет к бесконечности вместе с n , то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{b_n} = 1 \quad \text{п.н.} \quad (2)$$

Условие (1) является точным: в случае замены « o -малого» в (1) на « O -большое» можно лишь утверждать (см. примеры в [2]–[4]), что

$$0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{b_n} < \infty \quad \text{п.н.} \quad (3)$$

или, как в [5], что

$$0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{b_n} \leq M \quad \text{п.н.,} \quad (4)$$

*Химико-фармацевтическая академия, кафедра математики, ул. проф. Попова, 14, 197376 С.-Петербург, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-01260.

где $M = 1 + (e^\nu - 1 - \nu - \nu^2/2)\nu^{-2}$ и

$$\nu = \limsup_{n \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup} |X_n| \frac{\sqrt{2 \log \log B_n}}{B_n} \quad (\nu < \infty).$$

Основной целью настоящей статьи является распространение фундаментальной теоремы Колмогорова на более общий класс нормирующих постоянных $\{b_n\}$.

Надо сказать, что имеются результаты (см. [6]–[12], например), в том или ином смысле более общие, чем те, что получены в настоящей работе, однако критерии, в них формулирующиеся, либо носят чересчур общий характер, либо слишком сложны.

Введем некоторые обозначения, необходимые для формулировки результатов. Пусть $\{b_n\}$ — положительная растущая к бесконечности последовательность. Так же, как в [6], для любого фиксированного $c > 1$ определим i_n как наибольшее целое такое, что $b_{i_n} \leq c^n$. Положим

$$Q_r(\alpha) = \sum_{n \geq r} \exp \left\{ - \frac{\alpha c^{2n}}{2(B_{i_n}^2 - B_{i_{n-r}}^2)} \right\},$$

где $\alpha > 0$, $r = 1, 2, \dots$

Теорема 1. Пусть $c > 1$ и $r \geq 1$ — целое. Если

$$\operatorname{ess\,sup} |X_n| = O\left(\frac{b_n}{\log \log b_n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (5)$$

то: а) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (S_n/b_n) < \infty$ п.н. тогда и только тогда, когда

$$Q_r(\alpha) < \infty \quad \text{при некотором } \alpha > 0; \quad (6)$$

б) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (S_n/b_n) \leq 0$ п.н. тогда и только тогда, когда

$$Q_r(\alpha) < \infty \quad \text{при любом } \alpha > 0. \quad (7)$$

Таким образом, соотношение (3) справедливо тогда и только тогда, когда удовлетворяются соотношения (6) и

$$Q_r(\beta) = \infty \quad \text{при некотором } \beta > 0. \quad (8)$$

Благодаря симметрии условия (5) величины S_n в теореме 1 можно заменить на $|S_n|$. В частности, имеет место следующий результат.

Следствие 1. Пусть $c > 1$, $r \geq 1$ и имеет место условие (5). Тогда $S_n/b_n \rightarrow 0$ п.н., если и только если выполняется соотношение (7).

Отметим, что случай $b_n = n$, $c = 2$, $r = 1$ был рассмотрен в [13].

Теорема 2. Если выполняется условие (1), то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{b_n} \leq 1 \quad (< 1) \quad \text{п.н.} \quad (9)$$

тогда и только тогда, когда $Q_r(\alpha) < \infty$ при любом $\alpha > 1$ (при некотором $\alpha < 1$), любом $c > 1$ и любом $r \geq 1$.

В частности, соотношение (2) имеет место тогда и только тогда, когда $Q(\alpha) < \infty$ ($\forall \alpha > 1 \forall c > 1 \forall r \geq 1$) и $Q_r(\beta) = \infty$ ($\forall \beta < 1 \exists c > 1 \exists r \geq 1$).

Разумеется, сказанное, как это было ранее в теореме 1, остается справедливым при замене S_n на $|S_n|$.

В заключение приведем условия, при которых соотношения типа $Q_r(\alpha) < \infty$ существенно упрощаются.

З а м е ч а н и е 1. Предположим, что b_b/B_n возрастает и либо

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{n+1}}{B_n} = \infty, \quad (10)$$

либо

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{n+1}}{B_n} < \infty, \quad (11)$$

и, кроме того,

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} \geq g\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) \quad \text{для всех достаточно больших } n, \quad (12)$$

где $g(x)$ — положительная функция такая, что $g \rightarrow \infty$ и $g(x)g(y) \geq g(xy)$ при всех $x, y \geq 1$. Тогда $Q_r(\alpha)$ в теоремах 1, 2 можно заменить на $\sum_{n \geq 1} \exp\{-\alpha b_n^2/(2\sigma_n^2)\}$ или, соответственно, на

$$\sum_{n \geq 1} \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n} \exp\left\{-\frac{\alpha b_n^2}{2B_n^2}\right\}. \quad (13)$$

Заметим, что условие (12) слабее предположения

$$\frac{b_n}{B_n^\delta} \text{ убывает при некотором } \delta > 1$$

(и совпадает с ним при $g(x) = x^\delta$).

Очевидно также, что ряд в (13) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$, если $b_n = B_n \sqrt{2 \log \log B_n}$. Следовательно, критерии для (2) и (3) в этом случае вытекают из теорем 1 и 2.

2. Вспомогательные результаты и доказательства.

Лемма 1. Пусть $Y_1, \dots, Y_n$ ($n \geq 1$) — независимые случайные величины такие, что $|Y_i| \leq C$ п.н., $EY_i^2 < \infty$, $EY_i = 0$, где $1 \leq i \leq n$, а C — некоторая положительная постоянная. Пусть, кроме того,

$$Z_n = Y_1 + \dots + Y_n, \quad D_n^2 = EZ_n^2, \\ \omega = \omega(\beta) = (2\beta^{-2}(e^\beta - 1 - \beta))^{-1/2}, \quad \beta > 0.$$

Тогда:

$$P\{Z_n \geq x\} \leq \exp\left\{-\frac{x^2}{2D_n^2\omega^2}\right\}, \quad 0 \leq x \leq \beta\omega^2 \frac{D_n^2}{C}, \quad (14a)$$

$$P\{Z_n \geq x\} \leq \exp\left\{-\frac{\beta x}{2C}\right\}, \quad x \geq \beta\omega^2 \frac{D_n^2}{C}; \quad (14b)$$

если $\beta \in (0, 10^{-2})$ и $0 < C \leq \beta^2 D_n$, то

$$P\{Z_n \geq x\} \geq \exp \left\{ -\frac{(1 + 50\beta)x^2}{2D_n^2} \right\}, \quad \beta^{-1} D_n \leq x \leq \frac{\beta D_n^2}{C}; \quad (15)$$

кроме того, при всех x

$$\left| P\{Z_n < x\} - \Phi\left(\frac{x}{D_n}\right) \right| \leq \frac{K_0 C}{|x|}, \quad (16)$$

где $\Phi(\cdot)$ — стандартная нормальная функция распределения, K_0 — абсолютная постоянная.

Заметим, что неравенства (14), (15) уточняют соответствующие неравенства Колмогорова (см. [1], а также [14, гл. 10]). Отметим также, что оценки (14) близки к известному неравенству Беннета-Хёфдинга [18], [19], а аналог неравенства (15) можно извлечь из результатов работы [20].

Доказательство. Проверим сначала соотношение (16). Используя неравномерный вариант теоремы Эссеена [15], найдем, что при некоторой абсолютной постоянной K_1

$$\begin{aligned} |P\{Z_n < x D_n\} - \Phi(x)| &\leq K_1 (1 + |x|)^{-3} D_n^{-3} \sum_{j=1}^n E|Y_j|^3 \\ &\leq K_1 C (1 + |x|)^{-3} D_n^{-1} = K_1 C |x|^{-1} (\tau + \tau^{-2})^{-1}, \end{aligned}$$

где $\tau = D_n/|x|$. Принимая во внимание то, что $\max_{\tau > 0} (\tau + \tau^{-2})^{-1} = 2^{2/3}/3$, получим соотношение (16).

Для доказательства (14) используем следующие аргументы. Положим

$$L_k(h) = E \exp\{hY_k\}, \quad h \geq 0, \quad (1 \leq k \leq n). \quad (17)$$

Применяя неравенство Чебышева, легко получим оценку

$$P\{Z_n \geq x\} \leq \exp \left\{ -hx + \sum_{k=1}^n (L_k(h) - 1) \right\}. \quad (18)$$

Пусть $h = \min(\beta/C, x/D_n^2 \omega^2)$. Функция $\omega(\beta)$ монотонно возрастает, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (L_k(h) - 1) &= \sum_{k=1}^n E(\exp\{hY_k\} - 1 - hY_k) = \frac{1}{2} h^2 \sum_{k=1}^n E \omega^2(hY_k) Y_k^2 \\ &\leq \frac{1}{2} h^2 \omega^2(hC) D_n^2 \leq \frac{1}{2} h^2 \omega^2 D_n^2. \end{aligned}$$

Отсюда и из (18) вытекают соотношения (14).

Проверка оценки (15) несколько сложнее. Положим $\eta = 10\beta$, $\bar{\gamma} = \beta\sqrt{2}$, $\delta = \beta\sqrt{1.5}$, $\gamma = 3\beta^2$ ($0 < \beta < 10^{-2}$) и выберем $h = (1 + \eta)x/D_n^2$, где $\beta^{-1} D_n \leq x \leq \beta D_n^2/C$.

Имеем (см. (17), [14, гл. 8]):

$$\mathbf{P}\{Z_n \geq x\} = \left[\prod_{k=1}^n L_k(h) \right] \int_x^\infty e^{-hy} d\mathbf{P}\{\bar{S}_n < y\}, \quad (19)$$

где $\bar{S}_n = \sum_{k=1}^n \bar{Y}_k$ и $\{\bar{Y}_k\}$ — независимые случайные величины с функциями распределения $(1/L_k(h)) \mathbf{E} \exp\{hY_k\} \mathbf{I}\{Y_k < y\}$.

Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} L_k(h) &= 1 + \frac{1}{2} h^2 \left(1 + \frac{1}{6} \theta_1\right) \mathbf{E} Y_k^2, \\ L'_k(h) &= h \left(1 + \frac{1}{2} \theta_2\right) \mathbf{E} Y_k^2, \quad L''_k(h) = (1 + \theta_3) \mathbf{E} Y_k^2, \end{aligned} \quad (20)$$

где $|\theta_i| \leq \delta e^\delta$, $i = 1, 2, 3$; кроме того,

$$|L_k(h) - 1| \leq \frac{1}{2} h^2 e^{hC} \mathbf{E} Y_k^2 \leq \frac{1}{2} \delta^2 e^\delta \quad (21)$$

(напоминаем, что $hC < \delta$ при $x \leq \beta D_n^2/C$).

Обозначим множитель в правой части (19) через A_1 , а интеграл — через A_2 . Таким образом,

$$\mathbf{P}\{Z_n \geq x\} = A_1 A_2. \quad (22)$$

Оценим A_1 снизу. В соответствии с (21), (20)

$$\begin{aligned} \log L_k(h) &\geq L_k(h) - 1 - \frac{\gamma}{2(1-\gamma)^2} |L_k(h) - 1| \\ &\geq \frac{1}{2} h^2 D_n^2 \left(1 - \frac{1}{4} \beta\right) - \frac{\gamma}{4(1-\gamma)^2} h^2 e^\delta D_n^2 \geq \frac{1}{2} h^2 D_n^2 (1 - 0.4\beta). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A_1 \geq \exp \left\{ \frac{1}{2} (1 - 0.4\beta) h^2 D_n^2 \right\}. \quad (23)$$

Далее,

$$A_2 = e^{-hx} \int_0^\infty e^{-ht} d\mathbf{P}\{\bar{S}_n < t + x\} \geq e^{-h(1+2\eta)x} (1 - P_2), \quad (24)$$

где $P_2 = \mathbf{P}\{\bar{S}_n > (1 + 2\eta)x \cup \bar{S}_n < x\}$.

Имеем

$$\mathbf{E} \bar{S}_n = \sum_{k=1}^n \left(L'_k(h) + L_k(h) \frac{1 - L_k(h)}{L_k(h)} \right) = J_1 + J_2, \quad (25)$$

причем в согласии с (20), (21)

$$J_1 = (1 + \theta_4) h D_n^2, \quad |\theta_4| \leq \frac{1}{2} \delta e^\delta < 0.7\beta; \quad J_2 \leq 0.04\beta. \quad (26)$$

Из (25), (26) следует, что $9\beta \leq (\mathbf{E}\bar{S}_n - x)/x \leq 11\beta$, и, значит, (см. также (20)) при $\beta^{-1}D_n \leq x$

$$P_2 \leq (9\beta x)^{-2} \text{Var } \bar{S}_n \leq 2(1 + \delta e^\delta) \beta^{-2} \frac{D_n^2}{81x^2} < 1 - e^{-1} \leq 1 - e^{-\beta^2 x^2 / D_n^2}.$$

Отсюда и из (22)–(24) (напоминаем, что $\beta \in (0, 10^{-2})$) легко получим оценку (15).

Лемма 1 полностью доказана.

Лемма 2. Пусть $\{U_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин, $\{a_n, n \geq 1\}$ — положительная числовая последовательность. Положим $U_0 = 0$ и $a_0 = 0$. Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{k \geq 1} \frac{U_k}{a_k} \geq 1 \right\} \leq \sum_{k \geq 0} \mathbf{P} \{U_{k+1} - U_k \geq a_{k+1} - a_k\}.$$

Доказательство леммы 2 проводится аналогично [16].
Имеем:

$$\left\{ \sup_{k \geq 1} \frac{U_k}{a_k} \geq 1 \right\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k,$$

где

$$B_0 = \{U_1 \geq a_1\}, \quad B_k = \left\{ \sup_{1 \leq m \leq k} \frac{U_m}{a_m} < 1, \frac{U_{k+1}}{a_{k+1}} \geq 1 \right\}, \quad k \geq 1.$$

При этом $B_m \cap B_k = \emptyset$, если $m \neq k$. Остается заметить, что при $k \geq 1$

$$\begin{aligned} B_k &\subset \left\{ \frac{U_k}{a_k} < 1, \frac{U_{k+1} - U_k}{a_{k+1}} + \frac{a_k}{a_{k+1}} \frac{U_k}{a_k} \geq 1 \right\} \\ &\subset \left\{ \frac{U_{k+1} - U_k}{a_{k+1}} + \frac{a_k}{a_{k+1}} \geq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть при всех достаточно больших n

$$|X_n| \leq \frac{\gamma b_n}{\log \log b_n} \quad \text{н.н.}, \quad (27)$$

где γ — некоторая положительная постоянная; $c > 1$, $r \geq 1$ — целое, $\beta \in (0, 10^{-2})$, $0 < M < \infty$ — некоторые числа. Тогда если

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{b_n} \leq M \quad \text{н.н.}, \quad (28)$$

то $Q_r(\alpha) < \infty$ при любом $\alpha > \max(2\gamma M \beta^{-1}, M^2(1 + 50\beta))$.

Доказательство. Положим

$$A_m = \{S_{i_m} - S_{i_m-r} > \overline{M} c^{\overline{m}}\}, \quad B_m = \{S_{i_m-r} > -\varepsilon c^{\overline{m}}\},$$

где $\overline{m} = mr + j$ ($0 \leq j < r$), $\overline{M} = M + 2\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Из (28) следует, что $0 = P\{S_n > \overline{M}b_n \text{ б.ч.}\} \geq P\{A_m B_m \text{ б.ч.}\}$. Далее, при помощи леммы 1 (оценка (16)) и соотношения (27) получим

$$P\{B_m\} \geq \frac{1}{2} - K_0(\gamma c^{\overline{m}} / \log \log c^{\overline{m}}) / \varepsilon c^{\overline{m}} > \frac{1}{3},$$

если m достаточно велико.

Из сказанного следует (см. [17]), что ряд $\sum_m P\{A_m\}$ сходится. Покажем, что при всех достаточно больших m

$$\left(\frac{1}{m}\right)^{1+\varepsilon} + P\{A_m\} \geq \exp\left\{-\frac{\tau c^{2\overline{m}}}{2\Delta_m^2}\right\}, \quad (29)$$

где $\Delta_m^2 = E(S_{i_{\overline{m}}} - S_{i_{\overline{m}-r}})^2$, $\tau = \max\{(1 + 50\beta)\overline{M}^2, (2 + 2\varepsilon)\overline{\gamma}\overline{M}\beta^{-1}\}$ и $\overline{\gamma} = (1 + \varepsilon)\gamma$.

Если показатель экспоненты в (29) больше, чем $(1 + \varepsilon)\log \overline{m}$, соотношение (29) выполняется. Поэтому далее будем предполагать, что

$$\frac{c^{\overline{m}}}{\sqrt{\log \overline{m}}} \leq \Delta_m \sqrt{\frac{2 + 2\varepsilon}{\tau}}. \quad (30)$$

С помощью оценки (15) леммы 1, сделав подходящие переобозначения, и имея в виду, что $|\log \log c / \log \overline{m}| < \varepsilon / (1 + \varepsilon)$, если $\overline{m}$ достаточно велико, заключаем:

$$P\{A_m\} \geq \exp\left\{-\frac{\tau c^{2\overline{m}}}{2\Delta_m^2}\right\}, \quad (31)$$

если

$$\overline{\gamma} \frac{c^{\overline{m}}}{\log \overline{m}} < \beta^2 \Delta_m, \quad c^{\overline{m}} \geq (\beta \overline{M})^{-1} \Delta_m, \quad \frac{c^{\overline{m}}}{\sqrt{\log \overline{m}}} \leq \Delta_m \sqrt{\frac{\beta}{\overline{\gamma} \overline{M}}} \quad (32)$$

(напоминаем, что $\tau \geq (1 + 50\beta)\overline{M}^2$).

Из оценки (16) леммы 1 вытекает неравенство $1 - \Phi(\overline{M}c^{\overline{m}}/\Delta_m) \leq P\{A_m\} + k_0\overline{\gamma}/\log \overline{m}$, из которого следует, что $c^{\overline{m}}/\Delta_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Справедливость второй оценки в (32), таким образом, установлена.

Первая и третья оценки в (32) следуют из (30), поскольку $\beta/(\overline{\gamma}\overline{M}) \geq (2 + 2\varepsilon)\tau^{-1}$ по выбору τ . Итак, оценка (29) доказана.

Из (29) при $j = 0, \dots, r - 1$ следует, что $Q_i(\tau) < \infty$. В свою очередь отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает утверждение леммы 3.

Лемма 4. Пусть выполняется условие (27); $c > 1$, $r > 1$ — целое, $\beta > 0$, $\alpha > 0$ — некоторые числа. Положим $M_0 = \max(\alpha\omega, 2\gamma\beta^{-1})c/(1 - c^{-r})$, где $\omega = \omega(\beta)$ определено в лемме 1. Тогда если $Q_r(\alpha^2) < \infty$, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{b_n} \leq M_0 \quad \text{н.н.} \quad (33)$$

Доказательство. Пусть (см. обозначения перед теоремой 1) $\bar{b}_j = c^n$, $i_{n-1} < j \leq i_n$, $n = 1, 2, \dots$; $\bar{M} = M_0(1 + 2\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Имеем

$$P_m(\bar{M}) = P\left\{\sup_{l \geq i_m} \frac{S_l}{\bar{b}_l} \geq \bar{M}\right\} \leq P\left\{\sup_{l \geq i_m} \frac{S_l}{\bar{b}_l} \geq \bar{M} c^{-1}\right\} \\ \leq \sum_{j=0}^{r-1} P_{m,j}(\tilde{M}), \quad (34)$$

где $\tilde{M} = \bar{M} c^{-1}$, $P_{m,j}(\tilde{M}) = P\{\sup_{k \geq 0} T_{k,j}/c^{kr+m+j} \geq \tilde{M}\}$ и

$$T_{k,j} = \max_{i_{kr+j-1+m} < l \leq i_{kr+j+m}} S_n \quad \text{для } k \geq 1, \quad T_{0,j} = S_{i_m+j}.$$

Оценим $P_{m,j}(\tilde{M})$, $0 \leq j < r$. Пусть для определенности $j = 0$. Учитывая, что $T_{k,0} \geq S_{i_{kr+m}}$ п.н., из леммы 2 получим

$$P_{m,0}(\tilde{M}) \leq P\{S_{i_m} \geq \tilde{M} c^m\} + \sum_{k \geq 1} P\left\{\max_{i_{kr-r+m} < l \leq i_{kr+m}} (S_l - S_{i_{kr-r+m}}) \geq \tilde{M} c^{kr+m}(1 - c^{-r})\right\}. \quad (35)$$

Принимая во внимание условие $Q_r(\alpha^2) < \infty$, из которого следует, что $E(S_{i_{kr+m}} - S_{i_{kr-r+m}})^2 = o(c^{kr+m})$, $kr + m \rightarrow \infty$, и неравенство Колмогорова (см. [14, гл. 3]), из (35) при всех достаточно больших m получим оценку

$$P_{m,0}(\tilde{M}) \leq P\{S_{i_m} \geq \tilde{M} c^m\} + 2 \sum_{k \geq 1} P\{S_{i_{kr+m}} - S_{i_{kr-r+m}} \geq \tilde{M} c^{kr+m}\}, \quad (36)$$

где $\widehat{M} = (1 - c^{-r}) c^{-1} M_0(1 + \varepsilon)$.

Обозначим k -ю вероятность из суммы в (36) через $\bar{P}_k(\widehat{M})$ и положим $D_k^2 = B_{i_{kr+m}}^2 - B_{i_{kr-r+m}}^2$. В соответствии с леммой 1 (оценки (14)), условием (27) и определением M_0 ,

$$\bar{P}_k(\widehat{M}) \leq \exp\left\{-\frac{\widehat{M}^2 c^{2(kr+m)}}{2\omega^2 D_k^2}\right\} + \exp\left\{-\frac{\beta \widehat{M}}{2\gamma} \log \log c^{2(kr+m)}\right\} \\ \leq \exp\left\{-\frac{(1+\varepsilon)^2 \alpha^2 c^{2(kr+m)}}{2D_k^2}\right\} + ((kr+m) \log c)^{-(1+\varepsilon)}.$$

Отсюда, из (36), (34) в силу произвольности ε следует утверждение леммы 4.

Теоремы 1 и 2 без каких-либо затруднений можно доказать с помощью лемм 3 и 4.

Установим справедливость замечания 1. Положим

$$T(\alpha) = \sum_{n \geq 1} \frac{b_{n+1} - b_n}{b_n} \exp\left\{-\frac{\alpha b_n^2}{2B_n^2}\right\}.$$

Очевидно, в силу определения $\{i_n\}$ при любых $c > 1$ и $r \geq 1$

$$\begin{aligned} 2T(\alpha) &\geq \sum_{n \geq 1} \sum_{j=i_{n-1}}^{i_n} \frac{b_{j+1} - b_j}{b_j} \exp \left\{ -\frac{\alpha b_j^2}{2B_j^2} \right\} \\ &\geq \sum_{n \geq 1} \frac{c^n - c^{n-1}}{c^n} \exp \left\{ -\frac{\alpha b_{i_n}^2}{2B_{i_n}^2} \right\} \geq (1 - c^{-1}) Q_r(\alpha). \end{aligned} \quad (37)$$

Предположим теперь, что выполняются условия (11), (12). Тогда (напомним, что $\lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = \infty$) $b_{n+1}/b_n \leq K$ при некотором $K > 1$ и всех достаточно больших n . Далее, по (12)

$$\frac{B_{i_n}}{B_{i_{n-r}}} \geq g\left(\frac{b_{i_n}}{b_{i_{n-r}}}\right) = g\left(\frac{b_{i_{n+1}}}{b_{i_{n-r}}} \frac{b_{i_n}}{b_{i_{n+1}}}\right) \geq g\left(\frac{c^n}{c^{n-r}} \frac{1}{K}\right) = g\left(\frac{c^r}{K}\right),$$

и, следовательно, при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ можно добиться справедливости неравенства $B_{i_{n-r}}^2 \leq \varepsilon B_{i_n}^2$, выбирая, скажем, $c^r \geq M_\varepsilon$. В этом случае

$$\begin{aligned} T\left(\frac{\alpha c^2}{1-\varepsilon}\right) &\leq \sum_{n \geq 1} \sum_{j>i_{n-1}}^{i_n} \frac{b_{j+1} - b_j}{b_j} \exp \left\{ -\frac{\alpha c^2}{2(1-\varepsilon)} \frac{c^{2(n-1)}}{B_{i_n}^2} \right\} \\ &\leq Kc Q_r(\alpha). \end{aligned} \quad (38)$$

Действительно, если $i_{n-1} < l \leq i_n$, то $c^{n-1} < b_l \leq c^n$ и $B_l \leq B_{i_n}$; кроме того,

$$\sum_{l>i_{n-1}}^{i_n} \frac{b_{l+1} - b_l}{b_l} \leq \frac{b_{i_n+1}}{b_{i_{n-1}+1}} \leq \frac{Kc^n}{c^{n-1}} = Kc.$$

Из (37), (38) следует одно из утверждений замечания (при доказательстве используется то, что выбор c и r в наших руках). Другое утверждение замечания доказывается проще — достаточно заметить, что при условии (10) $B_n^2 \sim \sigma_n^2$ при $n \rightarrow \infty$.

3. Дополнение. Приведенные выше леммы 3 и 4 позволяют связать величину $\limsup_{n \rightarrow \infty} (S_n/b_n)$ с параметром α в условиях типа (7), (8). В качестве примера приведем следующий результат, уточняющий как теорему Колмогорова, так и соответствующее утверждение из [5] (см. (4)).

Теорема 3. Пусть $B_n \rightarrow \infty$. Если

$$|X_n| \leq \frac{\nu B_n}{\sqrt{2 \log \log B_n}} \quad \text{н.н.,}$$

то

$$M_l \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{B_n \sqrt{2 \log \log B_n}} \leq M_u \quad \text{н.н.}$$

Здесь $M_l = (1 + 100\nu)^{-1}$, $M_u = (2\nu^{-2}(e^\nu - 1 - \nu))^{1/2}$.

Отметим, что $M_l < l < M_u$ и как M_l , так и M_u стремятся к 1 при $\nu \rightarrow 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kolmogoroff A. N.* Über das Gesetz des iterierten Logarithmus. — *Math. Ann.*, 1929, v. 101, p. 126–135.
2. *Marcinkiewicz J., Zygmund A.* Remarque sur la loi du logarithme itéré. — *Fund. Math.*, 1937, v. 29, p. 215–222.
3. *Weiss M.* On the law of the iterated logarithm. — *J. Math. Mech.*, 1959, v. 8 (1), p. 121–132.
4. *Егоров В. А.* К теореме Колмогорова о законе повторного логарифма. — *Вестник ЛГУ*, 1972, в. 13, с. 140–142.
5. *Tomkins R. J.* On the law of the iterated logarithm. — *Ann. Probab.*, 1978, v. 6, № 1, p. 162–168.
6. *Мартикайнен А. И., Петров В. В.* О необходимых и достаточных условиях для закона повторного логарифма. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1977, т. XXII, в. 1, с. 18–26; в. 2, с. 442.
7. *Tomkins R. J.* Limit theorems without moment hypotheses for sums of independent random variables. — *Ann. Probab.*, 1980, v. 8, № 2, p. 314–324.
8. *Мартикайнен А. И.* Три теоремы о верхнем пределе роста сумм независимых случайных величин. — *Вестник ЛГУ*, 1979, в. 1, с. 45–51.
9. *Мартикайнен А. И.* Экспоненциальный критерий для закона повторного логарифма. — *Записки научн. семинаров ЛОМИ*, 1979, т. 85, с. 158–168.
10. *Нагаев С. В.* О необходимых и достаточных условиях для усиленного закона больших чисел. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1972, т. XVII, в. 4, с. 609–618.
11. *Мартикайнен А. И.* О необходимых и достаточных условиях для усиленного закона больших чисел. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1979, т. XXIV, в. 4, с. 814–821.
12. *Володин Н. А., Нагаев С. В.* Замечание к усиленному закону больших чисел. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1977, т. XXII, в. 4, с. 810–813.
13. *Прохоров Ю. В.* Несколько замечаний к усиленному закону больших чисел. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1959, т. IV, в. 2, с. 204–208.
14. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
15. *Бикляис А.* Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме. — *Литов. матем. сб.*, 1966, т. 6, в. 3, с. 323–346.
16. *Розовский Л. В.* О скорости сходимости в усиленном законе больших чисел. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1981, т. XXVI, в. 1, с. 138–142.
17. *Baum L. E., Katz M., Stratton H. H.* Strong laws for ruled sums. — *Ann. Math. Statist.*, 1971, v. 42, № 2, p. 625–629.
18. *Bennet G.* Probability inequalities for sums of random variables. — *J. Amer. Statist. Assoc.*, 1962, v. 57, № 297, p. 33–45.
19. *Hoeffding W.* Probability inequalities for sums of bounded random variables. — *J. Amer. Statist. Assoc.*, 1963, v. 58, № 301, p. 33–45.
20. *Архангельский А. Н.* Нижние оценки для вероятностей больших отклонений сумм независимых случайных величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1989, т. 34, в. 4, с. 625–635.

Поступила в редакцию
28.IX.1993

Исправленный вариант
21.VI.1996