Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ивницкий, Об инвариантности стационарных вероятностей состояний замкнутой звездообразной сети массового обслуживания при зависимости вероятностей перехода от ее состояния, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 1, 179–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1719>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 15:03:09

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 1997 г.

ИВНИЦКИЙ В. А.*

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ
СТАЦИОНАРНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
СОСТОЯНИЙ ЗАМКНУТОЙ ЗВЕЗДООБРАЗНОЙ
СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
ПРИ ЗАВИСИМОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРЕХОДА
ОТ ЕЕ СОСТОЯНИЯ

Для замкнутой звездообразной сети массового обслуживания с произвольными распределениями длительностей обслуживания в системах массового обслуживания (СМО) в узлах сети при некотором ограничении на вид зависимости вероятностей перехода требований из центральной СМО в остальные и достаточном числе каналов обслуживания в каждой СМО, чтобы очереди не возникали, устанавливается независимость стационарных вероятностей состояний от функционального вида распределений длительностей обслуживания при их фиксированных математических ожиданиях.

Ключевые слова и фразы: центральная система массового обслуживания, периферийные системы массового обслуживания, замкнутая звездообразная сеть массового обслуживания, произвольные распределения длительностей обслуживания, независимость стационарных вероятностей состояний сети.

Рассматривается замкнутая звездообразная сеть массового обслуживания с произвольными распределениями длительностей обслуживания в системах массового обслуживания (СМО) в узлах сети и зависимостью вероятностей перехода требований из выделенной (центральной) СМО в остальные СМО от состояний этих СМО. В каждой СМО достаточно каналов обслуживания, чтобы очереди не возникали. Для этой сети при некотором ограничении на вид зависимости вероятностей перехода требований из центральной СМО в остальные устанавливается независимость стационарных вероятностей ее состояний от функционального вида распределений длительностей обслуживания при их фиксированных математических ожиданиях.

Установлению условий независимости стационарных вероятностей состояний сетей массового обслуживания от функционального вида распределений длительностей обслуживания посвящены работы [1]–[4]. Однако в них вероятности перехода требований из одной СМО в другую не зависят от состояний этих СМО. Представляет значительный интерес нахождение условий инвариантности для более общего случая зависимости вероятностей перехода требований из одной СМО в другую от состояний этих СМО. В настоящей работе такие условия устанавливаются для замкнутых звездообразных сетей массового обслуживания, являющихся достаточно адекватными математическими моделями функционирования многих вычислительных систем, в частности, мультипрограммных вычислительных систем [5], вычислительных центров коллективного пользования и т.п.

*Всероссийский научно-исследовательский институт железнодорожного транспорта, ул. 3-я Мытищинская, д. 10, 129851, ГСП, Москва, И-626, Россия.

1. Постановка задачи. Имеется замкнутая сеть массового обслуживания (обозначим ее СеМО), состоящая из центральной СМО, имеющей номер 0, и m периферийных СМО, перенумерованных числами от 1 до m . Каждая периферийная СМО непосредственно связана только с центральной СМО, в то время как центральная СМО связана со всеми периферийными СМО. Такая сеть называется звездообразной [6]. Число обслуживаемых требований постоянно и равно N . Требование, поступающее в любую СМО, сразу начинает обслуживаться, т.е. число каналов обслуживания в каждой СМО достаточно, чтобы очереди не возникали, для этого оно должно быть равно N . Величина работы по обслуживанию требования в i -й СМО η_i имеет произвольное распределение $H_i(x)$ с математическим ожиданием $\tau_i < \infty$, все η_i независимы, $i = 0, 1, \dots, m$. Если в i -й СМО находится l требований, то обслуживание каждого требования ведется со скоростью $\alpha_i(l)$ [7]. Скорость обслуживания требований в СМО постоянна в тех интервалах времени, в которых постоянно число требований в СМО. При изменении числа требований в СМО меняется соответственно и скорость их обслуживания. После окончания обслуживания требования в j -й СМО, $j = 1, \dots, m$, оно мгновенно попадает в центральную СМО. После окончания обслуживания требования в центральной СМО оно мгновенно попадает в i -ю СМО, $i = 1, \dots, m$, с вероятностью

$$P_i(k_0, k_i) = \frac{f_i(k_i)}{f_0(k_0)},$$

где $f_i(k_i)$, $i = 1, \dots, m$, и $f_0(k_0)$ — вещественные функции, удовлетворяющие условию нормировки

$$\sum_{i=1}^m f_i(k_i) = f_0\left(N - \sum_{i=1}^m k_i\right),$$

и $0 \leq f_i(k_i)/f_0(k_0) \leq 1$, k_0, k_i — количества требований в 0-й и i -й СМО соответственно, $i = 1, \dots, m$, в момент $t - 0$.

Пусть $\nu(t)$ — вектор $\{\nu_0(t), \nu_1(t), \dots, \nu_m(t)\}$, где $\nu_i(t)$ — число требований в i -й СМО в момент t , и

$$P(k_0, \dots, k_m) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\nu_0(t) = k_0, \dots, \nu_m(t) = k_m\}.$$

Нужно определить $P(k_0, \dots, k_m)$.

2. Определение характеристик сети массового обслуживания. Найдем сначала возможный аналитический вид вероятностей перехода $P_i(k_0, k_i)$. Справедлива следующая лемма.

Лемма. Из задания вероятностей перехода $P_i(k_0, k_i)$ в виде

$$P_i(k_0, k_i) = \frac{f_i(k_i)}{f_0(k_0)}, \quad (1)$$

где $f_i(k_i)$, $i = 1, \dots, m$, и $f_0(k_0)$ — вещественные функции, удовлетворяющие условию

$$0 \leq \frac{f_i(k_i)}{f_0(k_0)} \leq 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

и условию нормировки

$$\sum_{i=1}^m f_i(k_i) = f_0\left(N - \sum_{i=1}^m k_i\right), \quad (3)$$

следует, что $P_i(k_0, k_i)$ имеет следующий аналитический вид:

$$P_i(k_0, k_i) = \frac{a k_i + b_i}{a \sum_{i=1}^m k_i + \sum_{i=1}^m b_i} = \frac{a k_i + b_i}{a(N - k_0) + \sum_{i=1}^m b_i}, \quad (4)$$

где

$$\operatorname{sgn}(b_1 | b_1 \neq 0) = \dots = \operatorname{sgn}(b_m | b_m \neq 0) \quad (5)$$

и либо

$$\operatorname{sgn}(a | a \neq 0) = \operatorname{sgn}(b_1 | b_1 \neq 0) = \dots = \operatorname{sgn}(b_m | b_m \neq 0), \quad (6)$$

либо

$$|a|(N-1) \leq \min_{1 \leq i \leq m} |b_i|, \text{ если знаки у } a \text{ и } b_1, \dots, b_m \text{ различны,} \quad (7)$$

и наоборот.

Доказательство прямого утверждения леммы приведено в [8], обратное утверждение леммы следует из элементарных соображений.

Перейдем теперь к установлению аналитического вида стационарных вероятностей состояний рассматриваемой СМО. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Стационарное распределение вероятностей состояний замкнутой звездообразной сети массового обслуживания $P(k_0, k_1, \dots, k_m)$ инвариантно по отношению к функциональному виду распределений количества работы по обслуживанию требований, зависит только от их математических ожиданий и дается следующими формулами:

$$P(k_0, k_1, \dots, k_m) = \frac{\tau_0^{k_0}}{k_0!} \prod_{l=1}^{k_0} \frac{a(N-l) + \sum_{i=1}^m b_i}{\alpha_0(l)} \prod_{i=1}^m \frac{\tau_i^{k_i}}{k_i!} \times \prod_{l=1}^{k_i} \frac{a(l-l) + b_i}{\alpha_i(l)} P(0, \dots, 0) \quad \text{для} \quad \sum_{i=0}^m k_i = N, \quad (8)$$

где $\operatorname{sgn}(b_1 | b_1 \neq 0) = \dots = \operatorname{sgn}(b_m | b_m \neq 0)$ и либо $\operatorname{sgn}(a | a \neq 0) = \operatorname{sgn}(b_1 | b_1 \neq 0) = \dots = \operatorname{sgn}(b_m | b_m \neq 0)$, либо $|a|(N-1) \leq \min_{1 \leq i \leq m} |b_i|$, если знаки у a и $b_1, \dots, b_m$ различны,

$$P(0, \dots, 0) = \left[\sum_{k_0+k_1+\dots+k_m=N} \frac{\tau_0^{k_0}}{k_0!} \prod_{l=1}^{k_0} \frac{a(N-l) + \sum_{i=1}^m b_i}{\alpha_0(l)} \times \prod_{i=1}^m \frac{\tau_i^{k_i}}{k_i!} \prod_{l=1}^{k_i} \frac{a(l-l) + b_i}{\alpha_i(l)} \right]^{-1}. \quad (9)$$

Доказательство. Введем случайный процесс

$$\zeta(t) = \{ \nu_0(t), \nu_1(t), \dots, \nu_m(t); \xi_{il}(t), 1 \leq l \leq \nu_i(t), i = 0, 1, \dots, m \},$$

где $\xi_{il}(t)$ — величина работы, которую необходимо выполнить для окончания обслуживания требования с номером l после момента t в i -й СМО. Номер требования l определяется следующим образом. Пусть в момент $t = 0$ в i -й СМО имеется $\nu_i(0)$ требований. Их можно перенумеровать числами от 1 до $\nu_i(0)$. Если требование с номером l (в этой нумерации) уходит из СМО, то осуществляется перенумеровка оставшихся требований. Требования с номерами с 1 по $l-1$ включительно сохраняют свои номера, а номера последующих требований (начиная с номера $l+1$) уменьшаются на 1. Если в i -ю СМО с k_i требованиями поступило еще одно требование, то оно с вероятностью $[k_i+1]^{-1}$ принимает номер l , $1 \leq l \leq k_i+1$, при этом требования с номерами $1, \dots, l-1$ сохраняют свои номера, а у требований с номерами $l, \dots, k_i$ величина номера увеличивается на 1.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_{k_0, \dots, k_m}(x_{01}, \dots, x_{0k_0}, x_{11}, \dots, x_{1k_1}, x_{m1}, \dots, x_{mk_m}) \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\nu_0(t) = k_0, \nu_1(t) = k_1, \dots, \nu_m(t) = k_m, \\ \xi_{il}(t) < x_{il}, 1 \leq l \leq k_i, 0 \leq i \leq m\}, \\ P(k_0, k_1, \dots, k_m) = \varphi_{k_0, \dots, k_m}(\infty, \dots, \infty). \end{aligned}$$

Для функций $\varphi_{k_0, \dots, k_m}(x_{01}, \dots, x_{0k_0}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mk_m})$ имеет место следующая система дифференциальных уравнений в частных производных (обоснование ее аналогично [7, с. 383–387]):

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{k_0} \alpha(k_0) \left(\frac{\partial \varphi_{k_0, \dots, k_m}(x_{01}, \dots, x_{mk_m})}{\partial x_{0l}} \right. \\ \left. - \frac{\partial \varphi_{k_0, \dots, k_m}(x_{01}, \dots, x_{0, l-1}, 0, x_{0, l+1}, \dots, x_{mk_m})}{\partial x_{0l}} \right) \\ + \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{k_i} \alpha_i(k_i) \left(\frac{\partial \varphi_{k_0, \dots, k_m}(x_{01}, \dots, x_{mk_m})}{\partial x_{il}} \right. \\ \left. - \frac{\partial \varphi_{k_0, \dots, k_m}(x_{01}, \dots, x_{i, l-1}, 0, x_{i, l+1}, \dots, x_{mk_m})}{\partial x_{il}} \right) \\ + \sum_{i=1}^m \sum_{d=1}^{k_i} \frac{k_0 + 1}{k_i} \frac{f_i(k_i - 1)}{f_0(k_0 + 1)} \alpha_0(k_0 + 1) H_i(x_{id}) \\ \times \frac{\partial}{\partial x_{0, k_0+1}} \varphi_{k_0+1, \dots, k_{i-1}, k_i-1, k_{i+1}, \dots, k_m}(x_{01}, \dots, \\ x_{0k_0}, 0, x_{11}, \dots, x_{i, k_i-1}, x_{i+1, 1}, \dots, x_{mk_m}) \\ + \sum_{i=1}^m \sum_{d=1}^{k_0} \frac{k_i + 1}{k_0} \alpha_i(k_i + 1) H_0(x_{0d}) \\ \times \frac{\partial}{\partial x_{i, k_i+1}} \varphi_{k_0-1, \dots, k_{i-1}, k_i+1, k_{i+1}, \dots, k_m}(x_{01}, \dots, x_{0k_0-1}, \\ x_{11}, \dots, x_{i, k_i}, 0, x_{i+1, 1}, \dots, x_{mk_m}) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^m k_i = N.$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что системе уравнений (10) удовлетворяет (почти всюду) неотрицательное абсолютно непрерывное решение вида

$$\begin{aligned} \varphi_{k_0, k_1, \dots, k_m}(x_{01}, \dots, x_{mk_m}) = \prod_{i=1}^m \prod_{d=1}^{k_i} \frac{1}{\tau_i} \int_0^{x_{id}} (1 - H_i(u)) du \\ \times \frac{\tau_0^{k_0}}{k_0!} \prod_{l=1}^{k_0} \frac{f_0(l)}{\alpha_0(l)} \prod_{i=1}^m \frac{\tau_i^{k_i}}{k_i!} \prod_{l=1}^{k_i} \frac{f_i(l-1)}{\alpha_i(l)} P(0, \dots, 0) \end{aligned} \quad (11)$$

для $\sum_{i=0}^m k_i = N$. Далее учитывая, что $P(k_0, k_1, \dots, k_m) = \varphi_{k_0, \dots, k_m}(\infty, \dots, \infty)$,

находим формулу для $P(k_0, k_1, \dots, k_m)$:

$$P(k_0, k_1, \dots, k_m) = \frac{\tau_0^{k_0}}{k_0!} \prod_{l=1}^{k_0} \frac{f_0(l)}{\alpha_0(l)} \prod_{i=1}^m \frac{\tau_i^{k_i}}{k_i!} \prod_{l=1}^{k_i} \frac{f_i(l-1)}{\alpha_i(l)} P(0, \dots, 0), \quad (12)$$

и определяем $P(0, \dots, 0)$ из условия нормировки $\sum_{k_0+\dots+k_m=N} P(k_0, \dots, k_m) = 1$:

$$P(0, \dots, 0) = \left[\sum_{k_0+\dots+k_m=N} \frac{\tau_0^{k_0}}{k_0!} \prod_{l=1}^{k_0} \frac{f_0(l)}{\alpha_0(l)} \prod_{i=1}^m \frac{\tau_i^{k_i}}{k_i!} \prod_{l=1}^{k_i} \frac{f_i(l-1)}{\alpha_i(l)} \right]^{-1}. \quad (13)$$

Подставляя в (12) и (13) результаты леммы, а именно, (4) и условия (5)–(7), получаем утверждение теоремы.

В качестве примера реальной системы, имеющей указанную выше звездообразную структуру, можно привести многопроцессорный вычислительный комплекс. Здесь в качестве заявок выступают решаемые задачи, в качестве центральной СМО выступает центральный процессор, осуществляющий основные вычислительные операции, а в качестве периферийных СМО выступают периферийные процессоры, осуществляющие загрузку новыми данными из файлов памяти для последующего выполнения основных вычислительных операций на центральном процессоре для решаемой задачи. Так как потребные новые данные могут находиться в разных файлах и загружаться соответственно разными периферийными процессорами, то после обслуживания в центральном процессоре существуют разные возможности для направления заявки на периферийные процессоры и эти возможности должны учитывать и длины очередей заявок к периферийным процессорам. Оптимизация соответствующих вероятностей перехода с центрального на периферийные процессоры $P_i(k_0, k_i)$ позволяет увеличить производительность вычислительного комплекса. Здесь находятся стационарные распределения вероятностей состояний, которые будут входить в целевую функцию или в ограничения этой оптимальной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивницкий В. А. Об условии инвариантности стационарных вероятностей для сетей массового обслуживания. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. XXVII, в. 1, с. 188–192.
2. Ивницкий В. А. Об условии независимости стационарных вероятностей состояний разомкнутой сети однолинейных систем с потерями от вида распределений длительностей обслуживания. — Изв. АН СССР, сер. Техн. кибернет., 1981, т. 19, № 4, с. 136–140.
3. Ивницкий В. А. Об условии инвариантности стационарных вероятностей состояний для сетей однолинейных систем массового обслуживания. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. XXXIV, в. 3, с. 576–580.
4. Ивницкий В. А. Об инвариантности стационарных распределений вероятностей состояний многолинейной системы обслуживания конечного числа различных источников требований при абсолютном приоритете поступающего требования. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 2, с. 407–410.
5. Ивницкий В. А. Сети массового обслуживания и их применение в ЭВМ (обзор). — Зарубежная радиоэлектроника, 1977, № 7, с. 33–70.
6. Андронов А. М., Федюшкина Г. Г. Анализ и оптимизация звездообразной экспоненциальной замкнутой сети массового обслуживания с изменяющимися вероятностями переходов заявок между узлами. — Автоматика и вычислительная техника, 1987, № 6, с. 38–43.

7. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1966, 432 с.
8. Ивницкий В. А. О стационарных вероятностях состояний замкнутой звездообразной экспоненциальной сети массового обслуживания при зависимости вероятностей перехода от ее состояния. — Автоматика и вычислительная техника, 1994, № 6, с. 29–37.

Поступила в редакцию
11.V.1994

© 1997 г.

МИХАЙЛОВ В. Г.*

О ПУАССОНОВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ПУСТЫХ ЯЧЕЕК В НЕОДНОРОДНОЙ СХЕМЕ РАЗМЕЩЕНИЯ¹⁾

Исследуется неоднородная (т.е. допускающая различия в законах размещения частиц) полиномиальная схема размещения частиц по ячейкам. Получены явные оценки точности пуассоновской аппроксимации для распределения числа пустых ячеек в произвольно заданном подмножестве ячеек. В доказательстве основной теоремы используется комбинация метода Чена–Стейна с методом одного вероятностного пространства, изложенная в монографии А. Д. Варбура, Л. Холста и С. Янсона «Пуассоновская аппроксимация» [4].

Ключевые слова и фразы: случайные размещения, неоднородная схема, число пустых ячеек, пуассоновская аппроксимация, метод Чена–Стейна.

Рассмотрим неоднородную схему размещения частиц по ячейкам, определяемую следующим образом. Имеются N ячеек, занумерованных числами от 1 до N , в которые независимо бросают n частиц, причем i -й частице ($i = 1, \dots, n$) отвечает свой набор вероятностей $p_{i1}, \dots, p_{iN}$ попадания частицы в ячейки. Разумеется, эти наборы вероятностей могут и совпадать. Если все они одинаковы ($p_{1k} = \dots = p_{nk} = p_k$, $k = 1, \dots, N$), то мы получаем обычную полиномиальную схему размещения частиц по ячейкам. При $p_{ik} = 1/N$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, N$, получаем равновероятную полиномиальную схему. (По поводу терминологии теории случайных размещений отсылаем к монографии [1].) Неоднородная полиномиальная схема (далее называем ее просто неоднородной) является естественным обобщением полиномиальной схемы. Она возникает в задачах о проверке свойств статистической однородности последовательностей случайных и псевдослучайных чисел. Ясно, что при не слишком больших различиях в законах размещения отдельных частиц она должна обладать многими свойствами полиномиальной схемы. В связи с этим возникает задача описания областей допустимых различий законов размещения, в пределах которых сохраняются те или иные свойства однородной полиномиальной схемы. При исследовании неоднородных схем удается использовать некоторые из традиционных для теории случайных размещений методов: метод моментов, метод одного вероятностного пространства, аппроксимацию разделимых статистик суммами случайных величин с малым числом

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Вавилова, 42, 117966 Москва, ГСП-1, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 96-01-00531.