Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Богачев, М. Рёкнер, С. В. Шапошников, Оценки плотностей стационарных распределений и переходных вероятностей диффузионных процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 2, 240–270

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp172>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 09:39:50

© 2007 г.

БОГАЧЁВ В. И.*, РЁКНЕР М.*;
ШАПОШНИКОВ С. В.***ОЦЕНКИ ПЛОТНОСТЕЙ СТАЦИОНАРНЫХ
РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ДИФFUЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ¹⁾

Получены нижние оценки решений эллиптических и параболических уравнений второго порядка на всем пространстве. Метод основан на изучении зависимости постоянной в неравенстве Харнака от коэффициентов уравнения. В качестве применения получены нижние оценки плотностей стационарных распределений и переходных вероятностей диффузионных процессов с неограниченными коэффициентами сноса.

Ключевые слова и фразы: неравенство Харнака, переходная вероятность, стационарное распределение, нижние оценки решений параболических уравнений.

1. Введение. Цель этой работы состоит в том, чтобы получить оценки снизу для плотностей стационарных распределений и переходных вероятностей диффузионных процессов с неограниченными (возможно, быстро растущими) коэффициентами сноса. Для этого будут получены нижние оценки плотностей решений эллиптических и параболических уравнений вида

$$\mathcal{L}^* \mu = 0 \quad (1.1)$$

для борелевских мер μ на $\mathbf{R}^d$ или на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ соответственно. Здесь $\mathcal{L}$ — эллиптический или параболический оператор второго порядка вида

$$\mathcal{L}\varphi(x) := \partial_{x_i}(a^{ij}(x)\partial_{x_j}\varphi(x)) + b^i(x)\partial_{x_i}\varphi(x)$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: sfb1@mathematic.uni-bielefeld.de.

** Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, D-33501 Bielefeld, Germany; Department of Mathematics, Purdue University, 150 N. University St., West Lafayette, IN 47907-2067, USA.

*** Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке проектами РФФИ 04-01-00748, 05-01-02941-JF и 06-01-39003, НИИ 1758.2003.1, DFG 436 RUS 113/343/0(R), INTAS 03-51-5018, SFB 701 при университете Билефельда и ARC_Discovery_Grant DP0663153.

или

$$\mathcal{L}\varphi(x, t) := \partial_t \varphi(x, t) + \partial_{x_i}(a^{ij}(x, t) \partial_{x_j} \varphi(x, t)) + b^i(x, t) \partial_{x_i} \varphi(x, t),$$

где ведется суммирование по повторяющимся индексам, а интерпретация нашего уравнения состоит в следующем. Положим $A = (a^{ij})_{i,j \leq d}$, $b = (b^i)_{i \leq d}$.

Будем говорить, что борелевская мера μ на $\mathbf{R}^d$ удовлетворяет слабому эллиптическому уравнению (1.1), если функции a^{ij} и b^i интегрируемы на каждом компактном множестве в $\mathbf{R}^d$ относительно меры μ и для каждого $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ имеем равенство

$$\int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{L}\varphi d\mu = 0,$$

понимаемое одним из следующих двух способов.

(I) Имеем $a^{ij} \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbf{R}^d)$, функции a^{ij} , $\partial_{x_i} a^{ij}$ и b^i борелевски измеримы и локально интегрируемы относительно $|\mu|$, причем выполнено равенство

$$\int_{\mathbf{R}^d} [a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi + \partial_{x_i} a^{ij} \partial_{x_j} \varphi + b^j \partial_{x_j} \varphi] d\mu = 0. \quad (1.2)$$

(II) Мера μ обладает плотностью ϱ из класса $W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbf{R}^d)$ такой, что функции $a^{ij} \partial_{x_i} \varrho$ и $b^i \varrho$ локально интегрируемы по Лебегу, причем выполнено равенство

$$\int_{\mathbf{R}^d} [-a^{ij} \partial_{x_i} \varrho \partial_{x_j} \varphi + b^i \partial_{x_i} \varphi \varrho] dx = 0. \quad (1.3)$$

Разумеется, если коэффициенты a^{ij} являются локально соболевскими, а функции $\partial_{x_i}(a^{ij} \varrho)$ локально интегрируемы, то (1.3) можно записать как (1.2).

Аналогичным образом, борелевская мера μ на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ удовлетворяет слабому параболическому уравнению (1.1), если функции a^{ij} и b^i интегрируемы на каждом компактном множестве в $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ относительно μ , причем для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$ имеем равенство

$$\int_{\mathbf{R}^d \times (0, 1)} \mathcal{L}\varphi d\mu = 0,$$

понимаемое одним из следующих двух способов.

(I) Для всякого отрезка $J \subset (0, 1)$ и всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$ функции a^{ij} принадлежат классу $\mathbf{H}^{1,1}(U \times J)$, функции a^{ij} , $\partial_{x_i} a^{ij}$ и b^i борелевски измеримы и локально интегрируемы относительно $|\mu|$, причем выполнено равенство

$$\int_{\mathbf{R}^d \times (0, 1)} [\partial_t \varphi + a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi + \partial_{x_i} a^{ij} \partial_{x_j} \varphi + b^j \partial_{x_j} \varphi] d\mu = 0. \quad (1.4)$$

(II) Для всякого отрезка $J \subset (0, 1)$ и всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$ ограничение меры μ на $U \times J$ имеет плотность ϱ из класса $\mathbf{H}^{1,1}(U \times J)$ такую,

что функции $a^{ij} \partial_{x_i} \varrho$ и $b^i \varrho$ локально интегрируемы по Лебегу, причем выполнено равенство

$$\int_{\mathbf{R}^d \times (0,1)} [\partial_t \varphi \varrho - a^{ij} \partial_{x_i} \varrho \partial_{x_j} \varphi + b^i \partial_{x_i} \varphi \varrho] dx dt = 0. \quad (1.5)$$

Ниже мы всегда указываем, какой именно случай рассматривается, посредством ссылок на (1.2) и (1.4) в случае (I) и на (1.3) и (1.5) в случае (II). В этой работе мы предполагаем, что матрицы $A(x) = (a^{ij}(x))_{i,j \leq d}$ и $A(x, t) = (a^{ij}(x, t))_{i,j \leq d}$ симметричны и строго положительны, что гарантирует абсолютную непрерывность меры μ в случае (I). Поэтому всюду ниже мы рассматриваем меры μ , представленные в виде $\mu(dt dx) = \mu_t(dx) dt$ посредством семейства борелевских мер $(\mu_t)_{t \in (0,1)}$ на $\mathbf{R}^d$. В этом случае (1.1) можно записать как равенство

$$\int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{L} \varphi(x, t) \mu_t(dx) dt = 0,$$

понимаемое одним из двух описанных выше способов. Следует отметить, что альтернативное предположение в случае (II), что μ имеет локально соболевскую плотность, автоматически выполнено, если в случае (I) в эллиптической ситуации мы имеем $a^{ij} \in W_{\text{loc}}^{p,1}(\mathbf{R}^d)$ и $b^i \in L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R}^d)$ с некоторым $p > d$ и функция $\det A$ локально отделена от нуля. Имеется похожее достаточное условие в параболическом случае. По этой причине в п. 2 мы рассматриваем решения, обладающие локально соболевскими плотностями, и не делаем предположений относительно регулярности A ; однако в п. 3, где речь идет о приложениях к переходным вероятностям, мы накладываем подходящие условия локальной соболевской регулярности A , чтобы гарантировать, что все решения удовлетворяют предположениям из п. 2.

Будем говорить, что мера $\mu = \mu_t dt$ удовлетворяет начальному условию $\mu_0 = \nu$ при $t = 0$, если ν — борелевская мера на $\mathbf{R}^d$ и

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^d} \zeta(x) \mu_t(dx) = \int_{\mathbf{R}^d} \zeta(x) \nu(dx) \quad (1.6)$$

для всех $\zeta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$.

В последнее десятилетие описанные уравнения привлекли значительное внимание; в работах [1]–[12] можно найти различные комментарии и обзор основных результатов, некоторые из которых будут упомянуты ниже. Основным отличием полученных в этой работе оценок от известных ранее является то, что не предполагается ограниченности или какой-либо коэрцитивности или диссипативности коэффициента сноса b . Например, в эллиптическом случае получена оценка

$$\varrho(x) \geq C_1 \exp(-C_2 |x|^\beta)$$

в предположении, что коэффициент диффузии A равномерно ограничен вместе с A^{-1} , а функция $|b(x)|$ имеет мажоранту $C(1 + |x|^\beta)$. Эта оценка

заметно усиливает недавний важный результат работы [12], в которой накладываются значительно более сильные ограничения на коэффициенты (в частности, требуется двукратная дифференцируемость b и трехкратная дифференцируемость A). Для параболического уравнения получена аналогичная, но несколько более слабая оценка

$$\varrho(x, t) \geq \exp\left\{-K_t(1 + |x|^{2\beta} + |x|^2)\right\},$$

где функция $t \mapsto K_t$ локально ограничена на $(0, 1)$. Вместе с оценками сверху такого же вида, полученными в [10] и [11], это дает достаточно точное описание характера убывания решений на бесконечности. Доказательства основаны на предварительном исследовании зависимости постоянных в неравенстве Харнака от коэффициентов уравнения. В качестве применения даны простые достаточные условия для включения $|\nabla \varrho / \varrho|$ в $L^p(\mu)$ в эллиптическом случае, что усиливает важный результат работы [12]. Наконец, еще один результат нашей работы дает широкие достаточные условия существования конечной энтропии решения параболического уравнения для вероятностных мер во всякий момент времени $t_0 > 0$ с произвольным начальным распределением. Этот результат важен для использования полученных в нашей работе [10] оценок решений, поскольку в них существенно существование энтропии решения в тот момент, начиная с которого оценивается решение.

Отметим, что указанные уравнения в дивергентной форме возникают как уравнения для стационарных распределений и переходных вероятностей диффузионных процессов, задаваемых стохастическими дифференциальными уравнениями в форме Стратоновича. Для стохастического дифференциального уравнения в форме Ито

$$d\xi_t = A_0(\xi_t) dw_t + \frac{1}{2} b(\xi_t) dt$$

аналогичные уравнения записываются с недивергентным оператором

$$Lu := a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + b^i \partial_{x_i} u,$$

где $A = A_0 A_0^T$. Мы рассматриваем операторы дивергентного вида, что упрощает некоторые формулировки, но приводим соответствующие аналоги для недивергентных операторов.

Для произвольной области $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ через $W^{q,1}(\Omega)$ обозначим соболевское пространство функций, принадлежащих $L^q(\Omega)$ вместе с их обобщенными частными производными первого порядка. Это пространство наделяется стандартной нормой

$$\|f\|_{W^{q,1}(\Omega)} := \|f\|_{q,1} = \|f\|_{L^q(\Omega)} + \|\nabla f\|_{L^q(\Omega)},$$

где $\|\cdot\|_{L^q(\Omega)} := \|\cdot\|_q$ обозначает $L^q(\Omega)$ -норму скалярных или векторных функций. Через $C^{0,\delta}(\Omega)$ обозначим пространство всех функций (возможно, векторных или матричных) на Ω , являющихся гёльдеровыми

порядка δ . Для матричнозначного отображения A на Ω положим

$$\|A\|_{C^{0,\delta}} := \sup_{x \in \Omega} \|A(x)\| + \sup_{x, y \in \Omega} \frac{\|A(x) - A(y)\|}{|x - y|^\delta}.$$

Пусть $J \subset (0, 1)$ — интервал, тогда $\|\cdot\|_{q, \Omega \times J}$ обозначает $L^q(\Omega \times J)$ -норму скалярных или векторных функций. Наконец, $\mathbf{H}^{q,1}(\Omega \times J)$ обозначает пространство всех измеримых функций f на $\Omega \times J$ с конечной нормой

$$\|f\|_{\mathbf{H}^{q,1}(\Omega \times J)} := \left(\int_J (\|f(\cdot, t)\|_{W^{q,1}(\Omega)})^q dt \right)^{1/q}.$$

Для упрощения обозначений градиент функции u на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ относительно аргумента из $\mathbf{R}^d$ обозначается $\nabla u := \nabla_x u = (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_d} u)$. Через $U(x, R) \subset \mathbf{R}^d$ обозначаем открытый шар радиуса R с центром в точке x . Пусть $|\Omega|$ — объем Ω .

2. Исследование постоянных в неравенстве Харнака. В

этом пункте мы исследуем зависимость постоянной в неравенстве Харнака для эллиптических и параболических уравнений от коэффициентов уравнения. Начнем с эллиптического случая. Сначала мы напомним известные априорные оценки решений эллиптических уравнений, которые будут использоваться для доказательства p -интегрируемости логарифмического градиента меры μ .

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^d$, функции $h^1, \dots, h^d$ локально интегрируемы в Ω , $x \mapsto A(x) = (a^{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq d}$ — измеримое локально ограниченное на Ω матричнозначное отображение, причем матрицы $A(x) = (a^{ij}(x))$ симметричны и положительны. Будем говорить, что функция u из класса $W^{q,1}(\Omega)$, где $q > 1$, является решением уравнения

$$\partial_{x_i} (a^{ij} \partial_{x_j} u + h^i) = 0 \quad (2.1)$$

в Ω , если для любой функции $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ выполнено равенство

$$\int_{\Omega} [(a^{ij} \partial_{x_j} u + h^i) \partial_{x_i} \varphi] dx = 0.$$

Следующая теорема является уточнением частного случая более общего результата, который был сформулирован Ч.Б. Морри в его книге [13, с. 156] не вполне корректным образом: с $\Omega' = \Omega$, что неверно, например, для уравнения Лапласа на круге. Доказательство оценки Морри с исследованием зависимости константы от коэффициентов было дано в [14], где допущена такая же неточность, как и в книге Морри. Фактически рассуждения из [14] дают приведенную ниже оценку, а оценка с $\Omega = \Omega'$ возможна лишь для решений с нулевым граничным условием на области с достаточно регулярной границей. Отметим, что в имеющихся применениях теоремы Морри используется

именно доказываемое ниже верное утверждение, хотя в ряде работ оно формулируется с указанной неточностью (см., например, [3] и [6]). По этой причине мы приведем доказательство второго утверждения следующей теоремы, которое не используется в этой работе (в п. 3 будет использовано лишь хорошо известное первое утверждение с $b = 0$).

Теорема 2.1. *Предположим, что $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ — ограниченная область, $A \in C^{0,\delta}(\Omega)$, где $\delta > 0$, причем существует такое число $\alpha > 0$, что $A(x) \geq \alpha \text{Id}$ для всех $x \in \Omega$. Пусть $h^i \in L^q(\Omega)$, где $q > d$. Если функция u из $W^{q,1}(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (2.1) на Ω , то для всякой области Ω' с замыканием в Ω выполняется оценка*

$$\|u\|_{W^{q,1}(\Omega')} \leq C(\|u\|_{L^q(\Omega)} + \|h\|_{L^q(\Omega)}), \quad h := (h^1, \dots, h^d),$$

где число C зависит только от $d, q, \alpha, \Omega, \Omega'$ и $\|A\|_{C^{0,\delta}}$.

Более того, если $u \in W^{q,1}(\Omega)$ и $\partial_{x_i}(a^{ij}\partial_{x_j}u - b^i u + h^i) = 0$ в том же смысле, что и выше, причем $b^i \in L^q(\Omega)$, то выполнена более сильная оценка

$$\|u\|_{W^{q,1}(\Omega')} \leq C(\|u\|_{L^1(\Omega)} + \|h\|_{L^q(\Omega)}),$$

где C зависит только от $d, q, \alpha, \Omega, \Omega', \|A\|_{C^{0,\delta}}$ и $\|b^i\|_{L^q(\Omega)}$.

Доказательство. Первое утверждение хорошо известно (см., например, [13, гл. 5]). Мы займемся более сильным вторым. Можно считать, что A удовлетворяет нашим условиям на всем $\mathbf{R}^d$. Известно (см. [15], [16] или [17]; в последних двух работах условие на A заметно ослаблено), что при $q > 1$ и достаточно большом $\lambda = \lambda(d, q, \alpha, \|A\|_{C^{0,\delta}}) > 0$ найдется такое число $N = N(d, q, \alpha, \|A\|_{C^{0,\delta}}) > 1$, что для всякой функции $w \in W^{q,1}(\mathbf{R}^d)$ с компактным носителем функция $\mathcal{A}w := \partial_{x_i}(a^{ij}\partial_{x_j}w) - \lambda w$ удовлетворяет неравенству

$$\|w\|_{W^{q,1}(\mathbf{R}^d)} \leq N\|\mathcal{A}w\|_{W^{q,-1}(\mathbf{R}^d)}.$$

При $q > d$ по теореме вложения Соболева имеется такое число $C(d, q) > 1$, что

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \leq C(d, q) r^{1-d/q} \|\nabla w\|_{L^q(\mathbf{R}^d)} \leq C(d, q) r^{1-d/q} \|w\|_{W^{q,1}(\mathbf{R}^d)}$$

для всякой функции $w \in W^{q,1}(\mathbf{R}^d)$ с носителем в шаре радиуса $r \leq 1$. Выберем шар $U = U(a, r)$ объема менее 1 с замыканием в Ω и таким радиусом r , что

$$C(d, q)^q r^{q-d} \int_{\Omega} |b(x)|^q dx \leq (8N)^{-q}, \quad \lambda C(d, q) r^{1-d/q} \leq (8N)^{-1}.$$

Пусть $\zeta \in C_0^\infty(U)$, $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta(x) > 0$ внутри U , $\zeta(x) = 1$ на шаре $U(a, r/2)$, причем

$$J(s) := \sup_x |\nabla \zeta(x)| \zeta(x)^{-s} + \sup_{i,j,x} |\partial_{x_i} \partial_{x_j} \zeta(x)| \zeta(x)^{-s} < \infty, \quad 0 < s < 1.$$

Эти условия легко обеспечить, взяв $\zeta(x) = \psi(|x|/r)$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(y) = 0$ при $|y| \geq 1$, $\psi(y) > 0$ при $|y| < 1$, $\psi(y) = 1$ при $|y| \leq \frac{1}{2}$ и $\psi(y) = \exp[(y^2 - 1)^{-1}]$ вблизи точек -1 и 1 . Пусть $M_0 := \sup_x \|A(x)\|$. Функция $w = \zeta u$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{A}w = -\zeta \partial_{x_i} h^i - \lambda w + \partial_{x_i} (a^{ij} u \partial_{x_j} \zeta + \zeta b^i u) - b^i u \partial_{x_i} \zeta + a^{ij} \partial_{x_i} \zeta \partial_{x_j} u.$$

Нам достаточно оценить норму правой части в $W^{q,-1}(U)$ через указанные в теореме параметры, ибо затем с помощью конечного гладкого разбиения единицы получится нужная оценка. Норму первого слагаемого оценивается через $L^q(U)$ -норму h с коэффициентом, зависящим от ζ . В силу нашего выбора U имеем

$$\begin{aligned} \|\lambda w\|_{W^{q,-1}} &\leq \lambda \|w\|_q \leq \lambda C(d, q) r^{1-d/q} \|w\|_{q,1} \leq \frac{1}{8N} \|w\|_{q,1}, \\ \|a^{ij} u \partial_{x_j} \zeta + \zeta b^i u\|_q &\leq M_0 \|u \partial_{x_j} \zeta\|_q + \|\zeta u\|_\infty \|b\|_q \\ &\leq M_0 \|u \partial_{x_j} \zeta\|_q + C(d, q) r^{1-d/q} \|w\|_{q,1} \|b\|_q \\ &\leq M_0 \|u \partial_{x_j} \zeta\|_q + \frac{1}{8N} \|w\|_{q,1}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \|u \partial_{x_j} \zeta\|_q &= \|\zeta^{1-1/q} u \zeta^{-1+1/q} \partial_{x_j} \zeta\|_q \leq J(1 - q^{-1}) \left(\int_U |u|^q \zeta^{q-1} dx \right)^{1/q} \\ &\leq J(1 - q^{-1}) \|\zeta u\|_\infty^{1-1/q} \|u\|_{L^1(U)}^{1/q} \\ &\leq J(1 - q^{-1}) C(d, q)^{1-1/q} \|\zeta u\|_{q,1}^{1-1/q} \|u\|_{L^1(U)}^{1/q}. \end{aligned}$$

Правую часть оценим по неравенству Юнга $x^{1-1/q} y^{1/q} \leq \varepsilon x + \varepsilon^{1-q} y$ с достаточно малым ε и получим оценку $\|a^{ij} u \partial_{x_j} \zeta + \zeta b^i u\|_q \leq (4N)^{-1} \|\zeta u\|_{q,1} + C \|u\|_{L^1(U)}$, где C выражается через N , M_0 , $C(d, q)$, $J(1 - 1/q)$. По теореме вложения Соболева существует такое $C_1 = C_1(d, q)$, что

$$\|b^i u \partial_{x_i} \zeta\|_{W^{q,-1}(U)} \leq C_1(d, q) \|b^i u \partial_{x_i} \zeta\|_{qd/(d+q)} \leq C_1(d, q) \|b^i\|_d \|u \partial_{x_i} \zeta\|_q.$$

Как и выше, правая часть оценивается через $(8N)^{-1} \|w\|_{q,1} + C_2 \|u\|_{L^1(U)}$, где C_2 зависит от d , q , M_0 , N , ζ , $\|b^i\|_{L^d(U)}$. Итак, приходим к оценке

$$\|\mathcal{A}w\|_{W^{q,-1}(U)} \leq \frac{1}{2N} \|w\|_{W^{q,1}(U)} + C \left[\|\nabla u\|_{L^{dq/(d+q)}(U)} + \|u\|_{L^1(U)} + \|h\|_{L^q(U)} \right],$$

что в итоге даст нужную оценку, если мы сможем оценить L^s -норму ∇u , где $s = dq/(d+q)$, на шаре через L^1 -норму u и L^q -норму h на большем шаре. Отличие от исходной задачи состоит в том, что теперь $s < d$. С помощью разбиения единицы достаточно оценивать $\|\nabla(\zeta u)\|_s$ для тех же ζ , что и выше. Для $s = 2$ оценка получается стандартным способом: умножим уравнение на $\zeta^2 u$ и проинтегрируем. Это даст равенство

$$\begin{aligned} \int_U \left[a^{ij} \zeta^2 \partial_{x_i} u \partial_{x_j} u + 2a^{ij} u \zeta \partial_{x_i} \zeta \partial_{x_j} u - b^i \zeta^2 u \partial_{x_i} u \right. \\ \left. - 2b^i u^2 \zeta \partial_{x_i} \zeta + h^i \zeta^2 \partial_{x_i} u + 2h^i u \zeta \partial_{x_i} \zeta \right] dx = 0. \end{aligned}$$

Обозначим через I интеграл от $\zeta^2 |\nabla u|^2$. Из оценки $A \geq \alpha \text{Id}$ и неравенства Коши–Буняковского находим

$$\alpha I \leq I^{1/2} [2M_0 \|u \nabla \zeta\|_2 + \|\zeta u b\|_2 + \|\zeta h\|_2] + \|\zeta u b\|_2^2 + 2\|u \nabla \zeta\|_2^2 + \|\zeta h\|_2^2.$$

Пусть $d > 2$ (случай $d \leq 2$ проще). Пусть $l = 4(d+2)^{-1}$. Ввиду вложения $W^{2,1}(U) \subset L^{2d/(d-2)}(U)$ имеем

$$\begin{aligned} \|u \nabla \zeta\|_2 &\leq J \left(1 - \frac{l}{2}\right) \left(\int_U |\zeta u|^{2-l} |u|^l dx\right)^{1/2} \leq J \left(1 - \frac{l}{2}\right) \|u\|_{L^1(U)}^{l/2} \|\zeta u\|_{L^{2d/(d-2)}(U)}^{(2-l)/2} \\ &\leq C(d, l, \varepsilon) \|u\|_{L^1(U)} + \varepsilon \|\zeta u\|_{2,1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\zeta u b\|_2 &\leq \|b\|_{L^q(U)} \|\zeta u\|_{2d/(d-2)} \leq C(d) \|b\|_{L^q(U)} \|\zeta u\|_{2,1} \\ &\leq C(d) |U|^{(q-d)/q} \|b\|_{L^q(U)} \|\zeta u\|_{2,1}. \end{aligned}$$

Уменьшив r , получим $C(d) |U|^{(q-d)/q} \|b\|_{L^q(U)} \leq \alpha^{1/2}/2$. Выбрав ε достаточно малым, приходим к оценке $\|\zeta u\|_{2,1} \leq C[\|h\|_2 + \|u\|_{L^1(U)}]$, где C зависит от $d, q, \zeta, \alpha, M_0, \|b\|_q$. Несколько итераций с помощью теоремы вложения позволяют перейти от $s = 2$ к $s = dq/(d+q)$. В самом деле, если при некотором $s \in [2, d)$ есть оценка $\|\zeta u\|_{W^{s,1}(U)} \leq C[\|u\|_{L^1(U)} + \|h\|_{L^q(U)}]$, то через правую часть оценивается $\|\zeta u\|_{sd/(d-s)}$. В меньшем шаре это дает $\|w\|_{t,1} \leq N \|\mathcal{A}w\|_{W^{t,-1}} \leq C'[\|u\|_{L^1(U)} + \|h\|_{L^q(U)}]$, где

$$t = \frac{qds}{qd - qs + ds} \geq \theta s \quad \text{и} \quad \theta = \left(1 - \frac{s}{d} + \frac{s}{q}\right)^{-1} \geq \left(1 - \frac{1}{d} + \frac{1}{q}\right)^{-1} > 1,$$

поскольку $\|ub\|_t \leq \|b\|_q \|u\|_{sd/(d-s)}$, $\|u\|_t \leq \|u\|_{sd/(d-s)}$ и $\|\nabla u\|_{W^{t,-1}} \leq C(t, d) \|\nabla u\|_{td/(t+d)} \leq C(t, d) \|\nabla u\|_s$ ввиду соотношения $td/(t+d) = qs/(q+s) < s$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. Если $\Omega = U(z, R)$, где $R < 1$, то при $\lambda < 1$ в первом утверждении теоремы 2.1 выполняется оценка

$$\|u\|_{W^{q,1}(U(z,\lambda R))} \leq R^{-1} C(\|u\|_{L^q(U(z,R))} + R \|h\|_{L^q(U(z,R))}),$$

где $C = C(d, q, \alpha, \|A\|_{C^{0,s}}, \lambda)$.

Доказательство. Сделаем замену координат $x = z + Ry$. Функция $v(y) = u(z + Ry)$ удовлетворяет в $U(0, 1)$ уравнению

$$\partial_{y_j} (a^{ij}(z + Ry) \partial_{y_i} v(y) + R h^i(z + Ry)) = 0.$$

По условию матрица A гёльдерова, и можно считать, что постоянная Гёльдера не изменилась, так как $R < 1$. Тогда для функции v имеет место оценка

$$\|v\|_{W^{q,1}(U(0,\lambda))} \leq C(d, q, \alpha, \|A\|_{C^{0,s}}, \lambda) (\|v\|_{L^q(U(0,1))} + R \|h\|_{L^q(U(0,1))}).$$

Сделав обратную замену координат и учтя, что $R < 1$, получим

$$\begin{aligned} \|v\|_{W^{q,1}(U(0,\lambda))} &= R^{-d/q} \|u\|_{L^q(U(z,\lambda R))} + R^{1-d/q} \|\nabla u\|_{L^q(U(z,\lambda R))} \\ &\geq R^{1-d/q} \|u\|_{W^{q,1}(U(z,\lambda R))}. \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^q(U(0,1))} + R\|h\|_{L^q(U(0,1))} &= R^{-d/q}\|u\|_{L^q(U(z,R))} + R^{1-d/q}\|h\|_{L^q(U(z,R))} \\ &= R^{-d/q}(\|u\|_{L^q(U(z,R))} + R\|h\|_{L^q(U(z,R))}).\end{aligned}$$

На основании этих оценок получаем

$$\|u\|_{W^{q,1}(U(z,\lambda R))} \leq C(d, q, \alpha, \|A\|_{C^{0,\delta}}, \lambda) R^{-1}(\|u\|_{L^q(U(z,R))} + R\|h\|_{L^q(U(z,R))}),$$

что и требовалось. Следствие доказано.

Далее будем предполагать, что существуют такие постоянные $\gamma \geq 0$ и $\alpha > 0$, что

$$\sum_{i,j} |a^{ij}(x)|^2 \leq \gamma^2 \quad \text{и} \quad A(x) \geq \alpha \text{Id} \quad \text{для всех } x \in \Omega. \quad (2.2)$$

Пусть отображение $b: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$ измеримо и

$$\sup_{x \in \Omega} |b(x)| \leq B < \infty.$$

Предположим, что неотрицательная функция $u \in W^{2,1}(\Omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{x_i}(a^{ij}\partial_{x_j}u - b^i u) = 0, \quad (2.3)$$

т.е. для всякой функции $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ выполнено равенство

$$\int_{\Omega} \partial_{x_i} \varphi (a^{ij} \partial_{x_j} u - b^i u) dx = 0. \quad (2.4)$$

При указанных условиях функция u имеет локально гёльдерову версию, в частности, эта версия локально ограничена на Ω (см. [19, теорема 8.22]).

Для всякой интегрируемой на Ω функции v положим

$$v_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v dx.$$

В нашем исследовании постоянных в неравенстве Харнака для решений уравнения (2.3) придется воспроизвести основные этапы доказательства теоремы 8.18 в [19]. Отметим, что в замечании к теореме 8.20 из [19] указана нужная нам зависимость константы от коэффициентов уравнения, но без обоснования. Поскольку для дальнейшего важен точный вид этой зависимости, мы даем полное обоснование.

Справедлива следующая лемма (см. [19, лемма 7.21]).

Лемма 2.1. Пусть Ω — выпуклая область, и пусть $v \in W^{1,1}(\Omega)$. Предположим, что существует такая постоянная K , что для каждого шара $U(x_0, R)$ выполнено следующее неравенство:

$$\int_{\Omega \cap U(x_0, R)} |\nabla v| dx \leq K R^{d-1}.$$

Тогда найдутся такие положительные постоянные σ_0 и C , зависящие лишь от d , что

$$\int_{\Omega} \exp\left(\frac{\sigma}{K} |v - v_{\Omega}|\right) dx \leq C(\text{diam } \Omega)^d,$$

где $\sigma = \sigma_0 |\Omega| (\text{diam } \Omega)^{-d}$ и $\text{diam } \Omega = \sup_{x, y \in \Omega} |x - y|$.

Теорема 2.2. Пусть $\theta = 1 + 4\delta$, где $0 < \delta \leq 3$. Если $U(y, \theta R) \subset \Omega$, то выполнено следующее неравенство для непрерывной версии функции u :

$$\sup_{x \in U(y, R)} u(x) \leq C \inf_{x \in U(y, R)} u(x), \quad (2.5)$$

где

$$C = \exp\{c(d) \delta^{-1} (\gamma \alpha^{-1} + B \alpha^{-1} R)\},$$

причем число $c(d)$ зависит лишь от d .

Доказательство. Можно считать, что $d \geq 3$. Случай $d \leq 2$ сводится к случаю $d = 3$, если считать u функцией на $\mathbf{R}^3$ и положить $b^3 = 0$, $a^{33} = 1$, $a^{32} = a^{23} = a^{31} = a^{13} = 0$.

1. Пусть $R = 1$, $y = 0$. Пусть $\eta \in C_0^1(\Omega)$ и $u_{\varepsilon} = u + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Пусть $\beta \in (-\infty, +\infty)$. Легко видеть, что (2.4) остается в силе и для $\varphi = \eta^2 u_{\varepsilon}^{\beta}$, откуда получаем

$$\begin{aligned} \beta \int_{\Omega} (A \nabla u, \nabla u_{\varepsilon}) u_{\varepsilon}^{\beta-1} \eta^2 dx &= -2 \int_{\Omega} (A \nabla u, \nabla \eta) u_{\varepsilon}^{\beta} \eta dx \\ &\quad + \beta \int_{\Omega} (ub, \nabla u_{\varepsilon}) u_{\varepsilon}^{\beta-1} \eta^2 dx + 2 \int_{\Omega} (ub, \nabla \eta) u_{\varepsilon}^{\beta} \eta dx. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши и принимая во внимание наши предположения относительно коэффициентов, получаем

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}| u_{\varepsilon}^{\beta-1} \eta^2 dx \leq C \int_{\Omega} (\eta + |\nabla \eta|)^2 u_{\varepsilon}^{\beta+1} dx, \quad (2.6)$$

где

$$C = 4 \left(\left(\frac{\gamma}{|\beta| \alpha} + \frac{B}{\alpha} \right)^2 + \frac{B}{|\beta| \alpha} \right).$$

Так как $\alpha \leq \gamma$, то имеем

$$C \leq 8 \left(\frac{\gamma}{|\beta| \alpha} + \frac{B}{\alpha} \right)^2.$$

Поэтому будем использовать оценку (2.6) с $C = 8(\gamma |\beta|^{-1} \alpha^{-1} + B \alpha^{-1})^2$.

Пусть $w = u_{\varepsilon}^{(\beta+1)/2}$ при $\beta \neq -1$ и $w = \ln u_{\varepsilon}$ при $\beta = -1$. Если $\beta = -1$, то имеем

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 \eta^2 dx \leq C_1 \int_{\Omega} (\eta + |\nabla \eta|)^2 dx, \quad (2.7)$$

где

$$C_1 = 8 \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{B}{\alpha} \right)^2.$$

Если $\beta \neq -1$, то

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 \eta^2 dx \leq C_2 \int_{\Omega} (\eta + |\nabla \eta|)^2 w^2 dx, \quad (2.8)$$

где

$$C_2 = 2(\beta + 1)^2 \left(\frac{\gamma}{|\beta|\alpha} + \frac{B}{\alpha} \right)^2.$$

2. Положим

$$F(p, r) = \left(\int_{U(0, r)} u_{\varepsilon}^p dx \right)^{1/p}, \quad p \neq 0.$$

Мы найдем числа $p_0 = p_0(d, \delta, \alpha, \gamma, B) > 0$ и $C_3 = C_3(d, \delta, \alpha, \gamma, B) > 0$, такие, что

$$F(p_0, 1 + 3\delta) \leq C_3 F(-p_0, 1 + 3\delta).$$

Пусть $r \leq 1$, $U_{r+\delta r}$ — произвольный шар радиуса $r + \delta r$, содержащийся в $U(0, \theta)$, и пусть U_r — шар радиуса r с тем же центром, что и $U_{r+\delta r}$. Возьмем такую гладкую функцию η , что $\eta(x) = 1$ при $x \in U_r$, $\eta(x) = 0$ при $x \notin U_{r+\delta r}$, причем $0 \leq \eta \leq 1$ и $|\nabla \eta| \leq 2(\delta r)^{-1}$. Согласно оценке (2.7) с $\beta = -1$, получаем

$$\int_{U_r} |\nabla w| dx \leq (2r)^{d/2} \left(\int_{U_r} |\nabla w|^2 dx \right)^{1/2} \leq K_0(d) \delta^{-1} C_1^{1/2} r^{d-1}.$$

По лемме 2.1 существуют такие числа $C(d)$ и $K(d)$, зависящие только от d , что выполняется следующее неравенство:

$$\int_{U(0, 1+3\delta)} \exp(p_0 |w - w_{U(0, 1+3\delta)}|) dx \leq K(d), \quad p_0 = C(d) \delta C_1^{-1/2}.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{U(0, 1+3\delta)} e^{p_0 w} dx \int_{U(0, 1+3\delta)} e^{-p_0 w} dx \\ & \leq \int_{U(0, 1+3\delta)} e^{p_0 w - w_{U(0, 1+3\delta)}} dx \int_{U(0, 1+3\delta)} e^{w_{U(0, 1+3\delta)} - p_0 w} dx \leq K(d)^2. \end{aligned}$$

Вспоминая, что $w = \ln u_{\varepsilon}$, получаем оценку

$$F(p_0, 1 + 3\delta) \leq C_3 F(-p_0, 1 + 3\delta),$$

где

$$C_3 = K(d)^{2/p_0} = \exp(c_1(d) \delta^{-1} \alpha^{-1} (\gamma + B)),$$

а число $c_1(d)$ зависит только от d .

3. Известно, что

$$\begin{aligned} F(+\infty, 1) &:= \sup_{U(0, 1)} u_{\varepsilon} = \lim_{p \rightarrow +\infty} F(p, 1), \\ F(-\infty, 1) &:= \inf_{U(0, 1)} u_{\varepsilon} = \lim_{p \rightarrow -\infty} F(p, 1). \end{aligned}$$

Мы найдем числа $C_4 = C_4(d, \delta, \alpha, \gamma, B) > 0$ и $C_5 = C_5(d, \delta, \alpha, \gamma, B) > 0$ такие, что

$$F(+\infty, 1) \leq C_4 F(p_0, 1 + 3\delta) \leq C_3 F(-p_0, 1 + 3\delta) \leq C_5 F(-\infty, 1).$$

По неравенству треугольника имеем

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla(\eta w)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_{\Omega} |\eta \nabla w|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega} |w \nabla \eta|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Согласно оценке (2.8) с $\beta \neq -1$, получаем

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla(\eta w)|^2 dx \right)^{1/2} \leq 2(C_2 + 1)^{1/2} \left(\int_{\Omega} (\eta + |\nabla \eta|)^2 w^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2.9)$$

Пусть гладкая функция η такова, что $\eta(x) = 1$ при $|x| \leq r_1$, $\eta(x) = 0$ при $|x| \geq r_2$, где $1 < r_1 < r_2 \leq 1 + 3\delta$, причем $0 \leq \eta \leq 1$ и $|\nabla \eta| \leq 2/(r_2 - r_1)$. По теореме вложения Соболева неравенство (2.9) дает оценку

$$\left(\int_{U(0, r_1)} w^{2d/(d-2)} dx \right)^{(d-2)/(2d)} \leq \frac{C_0(d)(C_2 + 1)^{1/2}}{r_2 - r_1} \left(\int_{U(0, r_2)} w^2 dx \right)^{1/2},$$

где число $C_0(d)$ зависит только от d . Пусть $\beta + 1 > 0$. Так как $w = u_{\epsilon}^{(\beta+1)/2}$, то мы имеем

$$F\left(\frac{d}{d-2}(\beta + 1), r_1\right) \leq \left(\frac{C_0(d)(C_2 + 1)^{1/2}}{r_2 - r_1}\right)^{2/(\beta+1)} F(\beta + 1, r_2).$$

Положим $q = d/(d-2) > 1$. Мы будем применять полученную оценку к числам r_1 и r_2 вида $r_1 = r_m = 1 + \delta 2^{-m}$, $r_2 = r_{m-1} = 1 + \delta 2^{-m+1}$, причем будем брать в качестве $\beta + 1$ числа $q^m p$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, а число p задано равенством

$$p = d(d-1)^{-1}((d-2)d^{-1})^k,$$

в котором k — такое целое число, что

$$\frac{\ln p_0 - \ln d + \ln(d-1)}{\ln(d-2) - \ln d} < k < \frac{\ln p_0 - \ln d + \ln(d-1)}{\ln(d-2) - \ln d} + 2.$$

Заметим, что

$$(d-2)^2 d^{-2} p_0 < p < p_0.$$

Кроме того, для всех неотрицательных целых чисел m имеет место оценка

$$|q^m p - 1| = |d(d-1)^{-1}(1 - 2d^{-1})^{k-m} - 1| \geq (d-1)^{-1},$$

которая очевидна из рассмотрения случаев $k \geq m$ и $k < m$. Из этой оценки следует, что $C_2 \leq 2(d-1)^2(\beta+1)^2 \alpha^{-2}(\gamma+B)^2$, откуда ввиду соотношения $p < p_0$ мы получаем неравенство

$$C_2 \leq 2(d-1)^2 q^{2m} p_0^2 \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{B}{\alpha} \right)^2 = 2\delta^2 C(d)^2 (d-1)^2 q^{2m}.$$

Итак, приходим к соотношению

$$F(q^{m+1}p, r_m) \leq (Q(d) \delta^2)^{2m/(q^m p)} F(q^m p, r_{m-1}),$$

где число $Q(d)$ зависит только от d . Это соотношение дает оценку

$$F(q^m p, r_m) \leq (Q(d) \delta^2)^{S/p} F(p, 1 + \delta), \quad S := S(d) := 2 \sum_{m=1}^{\infty} m q^{-m}.$$

По неравенству Гёльдера имеем $F(p, 1 + \delta) \leq \exp(c_2(d)/p_0) F(p_0, 1 + 3\delta)$. Наконец, получаем неравенство $F(+\infty, 1) \leq C_4 F(p_0, 1 + 3\delta)$, где

$$C_4 = \exp\{c_3(d) \delta^{-1} \alpha^{-1} (\gamma + B)\}.$$

Если $\beta + 1 < 0$, таким же образом имеем

$$F(\beta + 1, r_2) \leq \left(\frac{C_0(d)(C_2 + 1)^{1/2}}{r_2 - r_1} \right)^{2/|\beta+1|} F\left(\frac{d}{d-2} (\beta + 1), r_1 \right).$$

Повторяя предыдущее рассуждение, получаем оценку

$$F(-p_0, 1 + 3\delta) \leq C_5 F(-\infty, 1), \quad C_5 = \exp\{c_4(d) \delta^{-1} \alpha^{-1} (\gamma + B)\}.$$

Вместе с нашими предыдущими оценками это дает (2.5) для u_ε вместо u с постоянной требуемого вида, не зависящей от ε , в случае $R = 1$, $y = 0$. Полагая $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем нужную оценку и для u . Случай $R \neq 1$ сводится к рассмотренному случаю заменой переменных $x = y + Rz$. Функция $v(z) = u(y + zR)$ удовлетворяет уравнению $\partial_{z_i}(a^{ij} \partial_{z_j} v - R b^i v) = 0$. Поэтому B надо заменить на BR , а постоянные γ и α оставить без изменения. Теорема доказана.

Следует отметить, что в задаче 8.3 на с. 206 в [19] ошибочно утверждается, что в случае, когда матрица A симметрична (как мы и предполагаем), постоянная может быть уточнена следующим образом: $C = \exp(c(d)(\gamma/\alpha + (B/\alpha)R)^{1/2})$. Однако это неверно в случае, когда $A = \text{Id}$ и $b(x) = -x$, поскольку решение является гауссовским и не может оцениваться снизу через $C_1 \exp(-C_2|x|)$.

З а м е ч а н и е 2.1. В случае, когда наш эллиптический оператор записан в недивергентной форме $L = a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} + b^i \partial_{x_i}$, причем A локально липшицево, такая же нижняя оценка справедлива, если заменить b^i на $b^i - \partial_{x_j} a^{ij}$.

Теперь рассмотрим неравенство Харнака для параболического уравнения. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^d$, $Q = \Omega \times (0, 1)$, $A = (a^{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ — измеримое матричнозначное отображение на Q , $a^{ij} = a^{ji}$, причем существуют такие постоянные $\gamma \geq 0$ и $\alpha > 0$, что

$$\sum_{i,j} |a^{ij}(x, t)|^2 \leq \gamma^2 \quad \text{и} \quad A(x, t) \geq \alpha \text{Id} \quad \text{для всех } (x, t) \in Q. \quad (2.10)$$

Кроме того, пусть $b: Q \rightarrow \mathbf{R}^d$ — измеримое векторное поле и

$$\sup_{(x,t) \in Q} |b(x, t)| \leq B < \infty.$$

Предположим, что неотрицательная функция $u \in \mathbf{H}^{2,1}(Q)$ является решением уравнения

$$\partial_t u = \partial_{x_i}(a^{ij}\partial_{x_j}u - b^i u), \quad (2.11)$$

т.е. для всякой функции $\varphi \in C_0^1(Q)$ выполнено равенство

$$\iint_Q [-\partial_t \varphi u + \partial_{x_i} \varphi (a^{ij}\partial_{x_j}u - b^i u)] dx dt = 0.$$

Из общей теории параболических уравнений (см., например, [18, гл. 3, теорема 8.1 в § 8 и теорема 10.1 в § 10]) следует, что при наших предположениях всякое решение u имеет локально гёльдерову версию.

Зафиксируем точку $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega \times (0, 1]$. Пусть $R(\bar{x}, r)$ — открытый куб с центром в точке $\bar{x}$ и длиной ребра r . Положим

$$Q(r) = R(\bar{x}, r) \times (\bar{t} - r^2, \bar{t}), \quad Q^*(r) = R(\bar{x}, r) \times (\bar{t} - 8r^2, \bar{t} - 7r^2).$$

Имеет место следующая классическая теорема (см. теорему 3 в [20], усиливающую результат из [21]).

Теорема 2.3. Пусть $Q(3r) \subset Q$. Тогда для непрерывной версии функции u , удовлетворяющей уравнению (2.11), имеем

$$\sup_{(x,t) \in Q^*(r)} u(x,t) \leq C \inf_{(x,t) \in Q(r)} u(x,t),$$

где число $C = C(d, \alpha, \gamma, Br)$ зависит лишь от d, α, γ и Br .

Как и в эллиптическом случае, мы интересуемся более точным видом зависимости C от указанных параметров.

Пусть $Q' = \Omega' \times J'$, где $\Omega' \subset \Omega$ открыто и $J' \subset [0, 1]$ — некоторый интервал. Если $p, q > 1$, то положим

$$\|f\|_{p,q,Q'} := \left(\int_{J'} \left(\int_{\Omega'} |f(x,t)|^p dx \right)^{q/p} dt \right)^{1/q}.$$

Если $q = \infty$, то положим

$$\|f\|_{p,\infty,Q'} := \sup_{J'} \|f(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega')}.$$

Пусть $L^{2,\infty}(Q')$ обозначает пространство всех таких измеримых функций f на Q' , что $\|f\|_{2,\infty,Q'} < \infty$. Доказательство следующей леммы можно найти в [18, гл. 2, § 3].

Лемма 2.2. Пусть $d > 2$. Для всякой функции $v \in \mathbf{H}^{2,1}(Q') \cap L^{2,\infty}(Q')$ такой, что при почти всех $t \in J'$ функция $x \mapsto v(x, t)$ имеет компактный носитель в Ω' , имеет место неравенство

$$\|v\|_{p,q,Q'} \leq c(d, p) (\|\nabla v\|_{L^2(Q')} + \|v\|_{2,\infty,Q'}),$$

где $2 \leq q$, $2 \leq p \leq 2d/(d-2)$ и $1/q + d/(2p) = d/4$.

З а м е ч а н и е 2.2. Выделим важный частный случай этой леммы, который будет использован ниже. Если $p = q = 2(d + 2)/d$, то неравенство выше приобретает вид

$$\|u\|_{L^{2(d+2)/d}(Q')} \leq C(\|\nabla u\|_{L^2(Q')} + \|u\|_{2,\infty,Q'}),$$

где C зависит только от d .

Положим $u_\varepsilon = u + \varepsilon$ при $\varepsilon > 0$ и

$$\mathcal{H} = \begin{cases} \frac{1}{\beta + 1} u_\varepsilon^{\beta+1}, & \beta \neq -1, \\ \ln u_\varepsilon, & \beta = -1. \end{cases}$$

Лемма 2.3. Пусть $\eta \in C_0^1(Q)$. Для почти всех $\tau_1, \tau_2 \in (0, 1)$ имеем

$$\begin{aligned} & \text{sign } \beta \left(\int_{\Omega} [\eta(x, \tau_2)^2 \mathcal{H}(x, \tau_2) - \eta(x, \tau_1)^2 \mathcal{H}(x, \tau_1)] dx \right. \\ & \quad \left. + \frac{\alpha\beta}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} \eta^2 u_\varepsilon^{\beta-1} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx dt \right) \\ & \leq C(\alpha, \gamma, \beta) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} (|\nabla \eta| + \eta)^2 u_\varepsilon^{\beta+1} dx dt + 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} \eta |\partial_t \eta| |\mathcal{H}| dx dt, \end{aligned}$$

где

$$C(\alpha, \gamma, \beta) = \frac{8}{\alpha|\beta|} (|\beta|B + \gamma)^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно повторить рассуждения из разделов 2 и 9 в [20], где надо положить $f = g = h = 0$ и учесть, что $\gamma \geq \alpha$.

Пусть, как и выше, точка $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega \times (0, 1]$ фиксирована и $R(r) := R(\bar{x}, r)$ — открытый куб с длиной ребра r и центром в точке $\bar{x}$. Пусть $D := R(\frac{1}{2}) \times (0, 1)$, и пусть $Q^+(l)$ и $Q^-(l)$ — прямоугольники, содержащиеся в D и полученные из $R(\frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{2})$ и $R(\frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}, 1)$ соответственно посредством преобразований вида

$$t \mapsto l^2 t + c_1, \quad x \mapsto lx + c_2$$

с некоторыми числами c_1, c_2, l . Положим $\psi(w) = \sqrt{w}$ при $w > 0$ и $\psi(w) = 0$ при $w \leq 0$.

Лемма 2.4. Пусть $D \subset Q$. Для всех $Q^+(l), Q^-(l)$ имеем

$$\iint_{Q^-(l)} \iint_{Q^+(l)} \psi \left(\ln \frac{u_\varepsilon(y, s)}{u_\varepsilon(x, t)} \right) dy ds dx dt \leq B_0 l^{2d+4},$$

где

$$\begin{aligned} B_0 &:= C(d)(1 + \alpha^{-1} + \alpha^{-1/2}(B + \gamma)) \\ &\leq B_1 := C(d)(1 + \alpha^{-1} + (\alpha^{-1/2} + \alpha^{-1})(B + \gamma)). \end{aligned}$$

Доказательство. Подробное доказательство дано в разделе 6 работы [20]. Для полного соответствия достаточно заметить, что указанная там постоянная C_6 в нашем случае имеет вид $C_6 = 4C(\alpha, \gamma) = 32\alpha^{-1}(B + \gamma)^2$.

Пусть $D^- = R(\frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{4})$ и $D^+ = R(\frac{1}{2}) \times (\frac{3}{4}, 1)$. Тогда лемма 2.4 и хорошо известная лемма Мозера [21] дают следующее утверждение.

Следствие 2.2. Пусть $D \subset Q$. Тогда выполнено следующее неравенство:

$$\iint_{D^-} u_\varepsilon^{\lambda/B_1^2} dy ds \iint_{D^+} u_\varepsilon^{-\lambda/B_1^2} dx dt \leq K,$$

где B_1 — постоянная из леммы 2.4, а числа $\lambda = \lambda(d)$ и $K = K(d)$ зависят только от d .

Теорема 2.4. Пусть $Q(3r) \subset Q$. Тогда для непрерывной версии функции и выполнено следующее неравенство:

$$\sup_{(x,t) \in Q^*(r)} u(x, t) \leq C \inf_{(x,t) \in Q(r)} u(x, t),$$

где

$$C := C(d, \alpha, \gamma, B, r) := \exp\{c(d)[1 + \alpha^{-1} + (\alpha^{-1/2} + \alpha^{-1})(Br + \gamma)]^2\}.$$

Доказательство. Будем следовать доказательству теоремы 3 в [20].

1. Пусть $\bar{x} = 0$, $\bar{t} = 1$, $r = \frac{1}{3}$ и $Q(3r) = R(1) \times (0, 1) \subset Q$. Как и выше, положим $u_\varepsilon = u + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Достаточно получить оценку

$$\sup_{(x,t) \in Q^*(\frac{1}{3})} u_\varepsilon(x, t) \leq C \inf_{(x,t) \in Q(\frac{1}{3})} u_\varepsilon(x, t), \quad C = C\left(d, \alpha, \gamma, B, \frac{1}{3}\right).$$

Если $\frac{1}{3} \leq s \leq \frac{1}{2}$, то положим $S(s) = R(s) \times ((1-s)/6, (1+s)/6)$. Пусть l и l' — такие два числа, что $\frac{1}{3} < l' < l < \frac{1}{2}$, и пусть гладкая функция η такова, что $\eta(x, t) = 1$ при $(x, t) \in S(l')$, $\eta(x, t) = 0$ вне $S(l)$ и

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad |\nabla \eta| \leq 2(l - l')^{-1}, \quad |\partial_t \eta| \leq 6(l - l')^{-1}.$$

Пусть $\beta > -1$ и $v = u_\varepsilon^{(\beta+1)/2}$. Согласно лемме 2.3, имеем

$$\|\eta \nabla v\|_{L^2(S(l))}^2 \leq C_1 \|v\|_{L^2(S(l))}^2, \quad \|\eta v\|_{2,\infty}^2 \leq C_2 \|v\|_{L^2(S(l))}^2,$$

где

$$C_1 = C(d) \frac{(\beta+1)^2}{(l-l')^2} \left(\frac{B}{\alpha} + \frac{\gamma}{|\beta|\alpha} \right)^2, \quad C_2 = \frac{\alpha|\beta|C_1}{(\beta+1)}.$$

Применяя замечание 2.2, получаем

$$\|v\|_{L^{2(d+2)/4}(S(l'))} \leq (C_3 + 1)^{1/2} \|v\|_{L^2(S(l))},$$

где

$$C_3 = C(d) \frac{(\beta+1)(\beta+1+\alpha|\beta|)}{(l-l')^2} \left(\frac{B}{\alpha} + \frac{\gamma}{|\beta|\alpha} \right)^2.$$

Как и в эллиптическом случае, если $p > 0$, то положим

$$F(p, l) = \left(\iint_{S(l)} u_\varepsilon^p dx dt \right)^{1/p}.$$

Мы доказали, что если $\beta + 1 > 0$ и $q = (d+2)/d$, то выполнено следующее неравенство:

$$F(q(\beta + 1), l') \leq (C_3 + 1)^{1/(\beta+1)} F(\beta + 1, l). \quad (2.12)$$

Положим $l = l_m = 3^{-1}(1 + 2^{-m-1})$, $l' = l'_m = 3^{-1}(1 + 2^{-m-2})$ и $p_0 = \lambda/B_1^2$, где λ — постоянная из следствия 2.2, а число B_1 определено в лемме 2.4. Существует такое число p , удовлетворяющее условию $(d/(d+2))^2 p_0 < p < p_0$, что для некоторой постоянной $C(d) > 1$, зависящей только от размерности d , при всех m мы имеем

$$\begin{aligned} C_3 &\leq C(d) \frac{q^{2m} p_0^2 (1 + \alpha)}{(l - l')^2} \left(\frac{B}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} \right)^2 \leq C(d) \frac{q^{2m} p_0^2 B_1^2}{(l - l')^2} \\ &\leq C(d) \lambda^2 B_1^{-2} (2q)^{2m} \leq C(d) \lambda^2 (2q)^{2m}. \end{aligned}$$

Следовательно, применяя неравенство (2.12) с $\beta + 1 = pq^m$, получаем оценку

$$F(q^{m+1}p, l'_m) \leq (C(d) \lambda^2 q + 1)^{2m/(pq^m)} F(q^m p, l_m).$$

Итак, имеем

$$F(q^m p, r_m) \leq (C(d) \lambda^2 (q + 1))^{2p^{-1}\Theta} F\left(p, \frac{1}{2}\right), \quad \Theta := \Theta(d) := \sum_{m=1}^{\infty} m q^{-m}.$$

Пусть $|S(\frac{1}{2})|$ обозначает $(d+1)$ -мерный объем $S(\frac{1}{2})$. По неравенству Гёльдера

$$F\left(p, \frac{1}{2}\right) \leq \left| S\left(\frac{1}{2}\right) \right|^{1/p-1/p_0} F\left(p_0, \frac{1}{2}\right).$$

Значит, для некоторого числа $c(d)$, зависящего только от d , получаем

$$F\left(+\infty, \frac{1}{3}\right) \leq C_4 F\left(p_0, \frac{1}{2}\right), \quad C_4 = (3 \cdot 2^{d+1})^{B_1^2/\lambda} = \exp\{c(d)B_1^2\}.$$

2. Пусть $Q(l) = R(l) \times (1 - l^2, 1)$, если $\frac{1}{3} \leq l \leq \frac{1}{2}$. При $p < 0$ положим

$$F(p, l) = \left(\iint_{Q(l)} u_\varepsilon^p dx dt \right)^{1/p}.$$

Аналогично этапу 1 при $\beta + 1 < 0$ имеем

$$F(\beta + 1, l) \leq (C_3 + 1)^{1/|\beta+1|} F(q(\beta + 1), l').$$

Повторив предыдущее рассуждение, получаем

$$F\left(-p_0, \frac{1}{2}\right) \leq C_5 F\left(-\infty, \frac{1}{3}\right), \quad C_5 = \exp\{c(d)B_1^2\}.$$

3. Заметим, что $S(\frac{1}{2}) \subset D^-$ и $Q(\frac{1}{2}) \subset D^+$. Согласно следствию 2.2, имеем

$$F\left(p_0, \frac{1}{2}\right) \leq C_6 F\left(-p_0, \frac{1}{2}\right), \quad C_6 = \exp\{c(d)B_1^2\}.$$

На основании установленных неравенств получаем требуемую оценку для u_ε вместо u с постоянной, не зависящей от ε . Полагая $\varepsilon \rightarrow 0$, приходим к такой же оценке для u . Общий случай, когда $r \neq 1$ и $(\bar{x}, \bar{t}) \neq (0, 1)$, сводится к рассмотренному случаю заменой переменных $(x, t) \rightarrow ((x - \bar{x})/r, 1 + (t - \bar{t})/r^2)$. Теорема доказана.

Наш следующий результат уточняет полученную оценку по отношению к зависимости от r . Его преимущество по сравнению с предыдущей теоремой состоит в том, что теперь B^2 входит в оценку без множителя r .

Теорема 2.5. Пусть $U(z_0, \theta r) \subset \Omega$ для некоторых чисел $\theta > 1$ и $r > 0$. Тогда при $0 < s < t < 1$ и $x, y \in U(z_0, r)$ для непрерывной версии u выполнено следующее неравенство:

$$u(y, s) \leq u(x, t) \exp\left\{K\left(\frac{|x - y|^2}{t - s} + (B + 1)^2 \frac{t - s}{\delta^2} + 1\right)\right\},$$

где $\delta = \min\{(\theta - 1)r, \sqrt{s}\}$, а число K зависит только от d, α и γ следующим образом:

$$K := c(d)|1 + \alpha^{-1} + (\alpha^{-1} + \alpha^{-1/2})\gamma|^2,$$

причем $c(d)$ зависит только от d .

Доказательство. Зафиксируем $x \in U(z_0, r)$ и $y \in U(z_0, r)$. Пусть

$$q_0 = \frac{\delta}{9d(B + 1)}.$$

Тогда $\delta < 1$, $q_0 B \leq 1$ и при $z \in U(z_0, r)$ имеем $R(z, 3q_0) \subset U(z_0, \theta r) \subset \Omega$. Действительно, для всякого $z_1 \in R(z, 3q_0)$ имеем

$$|z_1 - z_0| \leq |z_1 - z| + |z - z_0| \leq 3dq_0 + r \leq \theta r.$$

Заметим, что при $s < \tau < t$ выполнено неравенство $\tau - 9q_0^2 \geq s - 9q_0^2 \geq 0$, т.е. $(\tau - 9q_0^2, \tau) \subset [0, 1]$. Следовательно, $Q(3q_0) = R(z, 3q_0) \times (\tau - 9q_0^2, \tau) \subset Q$.

Пусть $x_n = y + n(x - y)/N$ и $t_n = s + n(t - s)/N$, где $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Тогда $y = x_0$, $s = t_0$, $x = x_N$, $t = t_N$ и

$$|x_n - x_{n-1}| = \frac{|x - y|}{N}, \quad |t_n - t_{n-1}| = \frac{t - s}{N}.$$

Положим

$$q = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q_0^2} + \frac{56}{t - s} + \frac{256|x - y|^2}{(t - s)^2} \right)^{-1/2}.$$

Тогда

$$q \leq \min \left\{ q_0, \sqrt{\frac{t-s}{56}}, \frac{t-s}{16|x-y|} \right\}.$$

Пусть

$$N = \left[\frac{t-s}{8q^2} \right] + 1,$$

где $[r]$ обозначает целую часть r . Заметим, что при таком выборе N выполняются следующие неравенства:

$$\frac{2|x-y|}{q} \leq \frac{t-s}{8q^2} \leq N, \quad \frac{t-s}{7q^2} - \frac{t-s}{8q^2} = \frac{t-s}{56q^2} \geq 1.$$

Отсюда сразу получаем

$$|x_n - x_{n-1}| = \frac{|x-y|}{N} \leq \frac{q}{2} \leq \frac{q_0}{2}.$$

Так как N — наименьшее натуральное число, большее $(t-s)/(8q^2)$, и

$$\frac{t-s}{7q^2} - \frac{t-s}{8q^2} \geq 1, \quad \text{то} \quad \frac{t-s}{8q^2} \leq N \leq \frac{t-s}{7q^2}.$$

Следовательно,

$$7q^2 \leq \frac{t-s}{N} \leq 8q^2.$$

Учитывая, что $x_{n-1} \in R(x_n, q)$, $7q^2 \leq t_n - t_{n-1} \leq 8q^2$ и

$$R(x_n, 3q) \times (t_n - 9q^2, t_n) \subset R(x_n, 3q_0) \times (t_n - 9q_0^2, t_n) \subset Q,$$

применим теорему 2.4 с $r = q$ и получим

$$u(x_{n-1}, t_{n-1}) \leq \sup_{(z, \tau) \in Q^*(q)} u(z, \tau) \leq C_0 \inf_{(z, \tau) \in Q(q)} u(z, \tau) \leq C_0 u(x_n, t_n),$$

где

$$Q^*(q) = R(x_n, q) \times (t_n - 8q^2, t_n - 7q^2), \quad Q(q) = R(x_n, q) \times (t_n - q^2, t_n),$$

$$C_0 := \exp \left(c(d) |1 + \alpha^{-1} + (\alpha^{-1} + \alpha^{-1/2}) \gamma|^2 \right).$$

В самом деле, мы имеем $qB \leq q_0B \leq 1$. Получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$u(x_{n-1}, t_{n-1}) \leq C_0 u(x_n, t_n), \quad 0 \leq n \leq N.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$u(y, s) = u(x_0, t_0) \leq C_0^N u(x_N, t_N) = C_0^N u(x, t).$$

Подставляя указанное выше значение N , получаем

$$u(x, s) \leq u(y, t) \exp \left\{ K_0 \left(\frac{t-s}{8q^2} + 1 \right) \right\},$$

где $K_0 = \ln C_0$. Окончательно приходим к оценке

$$u(y, s) \leq u(x, t) \exp \left\{ K \left(\frac{|x - y|^2}{t - s} + (B + 1)^2 \frac{t - s}{\delta^2} + 1 \right) \right\},$$

где $K = K(d, \alpha, \gamma)$ имеет нужный вид и $\delta = \min\{(\theta - 1)r, \sqrt{s}\}$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.3. В случае, когда наш параболический оператор записан в недивергентной форме $L = \partial_t + a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} + b^i \partial_{x_i}$, причем отображения $x \mapsto A(x, t)$ локально липшицевы равномерно по t , такая же нижняя оценка справедлива, если заменить b^i на $b^i - \partial_{x_j} a^{ij}$.

3. Нижние оценки плотностей. Здесь мы получим поточечные оценки снизу для плотностей мер, удовлетворяющих слабым эллиптическим и параболическим уравнениям. Для этого будут использованы полученные выше результаты о постоянных в неравенстве Харнака. Дополнительно в эллиптическом случае мы получим достаточные условия для включения $\nabla \ln \varrho \in L^p(\mu)$ для всех $p > 1$, что усиливает аналогичные результаты, полученные в [12].

Интересно сравнить полученные здесь нижние оценки с верхними оценками из работ [10] и [11], которые мы напомним для удобства читателя. Предположим, что вероятностная мера μ с плотностью ϱ удовлетворяет уравнению (1.1) в смысле (1.2), т.е. в случае (I), причем отображения A и A^{-1} равномерно ограничены, $a^{ij} = a^{ji}$ равномерно липшицевы и при некотором $p > d$ имеет место включение $|b| \in L^p(\mu)$ (тогда μ удовлетворяет также уравнению (1.3)). Пусть дана положительная функция $\Phi \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbf{R}^d)$. Тогда для выполнения оценки

$$\varrho(x) \leq C \Phi(x)^{-1}$$

достаточны следующие условия: $\Phi, |\nabla \Phi|^p \in L^1(\mu)$ (см. [11, теорема 3.1]). Например, если отображение A равномерно ограничено, равномерно обратимо и равномерно липшицево, то для оценки

$$\varrho(x) \leq C \exp(-\kappa |x|^\beta) \quad (3.1)$$

с некоторыми $C > 0$, $\beta > 0$ и $\kappa > 0$ достаточно следующих условий:

$$\exp(M|x|^\beta) \in L^1(\mu), \quad |b(x)| \leq C_0 + C_1 \exp(M_0|x|^\beta), \quad 0 \leq M_0 < d^{-1}M. \quad (3.2)$$

Из всех перечисленных условий лишь одно — включение $\exp(M|x|^\beta) \in L^1(\mu)$ — не выражено явно через A и b . Чтобы обеспечить и это условие в терминах коэффициентов, достаточно иметь следующую оценку:

$$(b(x), x) \leq c_0 - c_1 |x|^\beta, \quad c_1 > M\beta \sup_x \|A(x)\|. \quad (3.3)$$

Это вытекает из рассмотрения функции Ляпунова $V(x) = \exp(M|x|^\beta)$ при $|x| \geq 1$ (ср. [3], [11]). Поскольку $(A(x)x, x) \leq |x|^2 \sup_y \|A(y)\|$, вне

единичного шара имеем

$$\begin{aligned} LV(x) &= M\beta V(x) \left[M\beta |x|^{2\beta-4} (A(x)x, x) + |x|^{\beta-2} \operatorname{Trace} A(x) \right. \\ &\quad \left. + (\beta-2)|x|^{\beta-4} (A(x)x, x) + |x|^{\beta-2} (b(x), x) \right] \\ &\leq c_2 - c_3 |x|^{\beta-2} V(x) \end{aligned} \quad (3.4)$$

при некоторых $c_2, c_3 > 0$. Отсюда следует, что функция $(|x|+1)^{\beta-2} V(x)$ интегрируема относительно μ . Если $\beta \geq 2$, то получаем $V \in L^1(\mu)$; если $\beta < 2$, то делаем то же самое с $\exp(M'|x|^\beta)$, где $M' > M$ таково, что $c_1 > M'\beta \sup_x \|A(x)\|$. Тогда μ -интегрируемость $(|x|+1)^{\beta-2} \exp(M'|x|^\beta)$ дает μ -интегрируемость $\exp(M|x|^\beta)$.

Мы получим похожие, хотя и не в точности такого же порядка, оценки снизу; скажем, вместо κ в неравенстве (3.1) будет некоторая другая постоянная в оценке снизу (но показатель β не изменится).

В следующей теореме мы предполагаем, что неотрицательная локально ограниченная мера μ на $\mathbf{R}^d$ обладает плотностью ϱ , причем $\varrho \in W^{2,1}(U)$ для всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$. Пусть мера μ удовлетворяет уравнению (1.1) на $\mathbf{R}^d$ в смысле (1.3), т.е. в случае (II), где

$$\mathcal{L} = \partial_{x_i} (a^{ij} \partial_{x_j}) + b^i \partial_{x_i},$$

матричнозначное отображение $A = (a^{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ измеримо, функции $\|A(x)\|$ и $\|A(x)^{-1}\|$ локально ограничены, $a^{ij} = a^{ji}$, а коэффициент $b = (b^i)_{i \leq d}$ — измеримое локально ограниченное векторное поле. Напомним, что, согласно доказанному в [6], в случае, когда $a^{ij} \in W_{\text{loc}}^{p,1}(\mathbf{R}^d)$ и $b^i \in L_{\text{loc}}^p(\mathbf{R}^d)$ с некоторым $p > d$ и $A(x)^{-1}$ локально ограничено, всякое решение (1.1) в смысле (1.2) автоматически имеет плотность в $W_{\text{loc}}^{p,1}(\mathbf{R}^d)$, поэтому удовлетворяет также (1.3).

Пусть V — непрерывная возрастающая функция на $[0, \infty)$ и $V(0) > 0$.

Теорема 3.1. Пусть $|b(x)| \leq V(|x|/\theta)$, где $\theta > 1$, и пусть $\alpha(r) := \sup_{|x| \leq r} \|A(x)^{-1}\|$, $\gamma(r) := \sup_{|x| \leq r} \|A(x)\|$. Тогда существует такое положительное число $K = K(d)$, зависящее только от d , что непрерывная версия функции ϱ удовлетворяет неравенству

$$\varrho(x) \geq \varrho(0) \exp\{-K(d)(\theta-1)^{-1} \alpha(\theta|x|)^{-1} (\gamma(\theta|x|) + V(|x|)|x|)\}.$$

В частности, если $\|A(x)\| \leq \gamma$ и $\|A(x)^{-1}\| \leq \alpha$, то существует такое положительное число $K = K(d, \alpha, \gamma, \theta)$, что непрерывная версия функции ϱ удовлетворяет неравенству

$$\varrho(x) \geq \varrho(0) \exp\{-K(1 + V(|x|)|x|)\}.$$

Доказательство. Зафиксируем x и рассмотрим шар $U(0, \theta|x|)$. Теорема 2.2 дает нужную оценку, ибо $\sup_{z \in U(0, \theta|x|)} |b(z)| \leq V(|x|)$.

Пример 3.1. Предположим, что условие (2.2) выполнено с $\Omega = \mathbf{R}^d$. Если для некоторых чисел $c_1, c_2 > 0$ при почти всех x выполнена оценка

$$|b(x)| \leq c_1|x|^\beta + c_2,$$

то существует такая постоянная K , что справедливо неравенство

$$\varrho(x) \geq \varrho(0) \exp\{-K(1 + |x|^{\beta+1})\}.$$

Если

$$\sup_{x,i,j} [\|A(x)\| + \|A(x)^{-1}\| + |\nabla a^{ij}(x)|] < \infty,$$

$$|b(x)| \leq c_1|x|^\beta + c_2, \quad \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{-\beta-1}(b(x), x) < 0,$$

то на основании доказанного получаем двусторонние оценки

$$\exp\{-K_1(1 + |x|^{\beta+1})\} \leq \varrho(x) \leq \exp\{-K_2(1 + |x|^{\beta+1})\}.$$

Верхняя оценка следует из (3.1), если выбрать $M > 0$ в (3.2), (3.3) достаточно малым. Например, если $A = \text{Id}$ и $b^i(x) = x_i$, то мера с плотностью $\varrho(x) = \exp(-|x|^2/2)$ является решением. Полученные выше результаты дают оценку

$$\exp(-K_1(1 + |x|^2)) \leq \varrho(x) \leq \exp(-K_2(1 + |x|^2))$$

с некоторыми числами $K_1, K_2 > 0$, что достаточно правильно отражает характер убывания на бесконечности, хотя и не дает точной асимптотики.

Следует отметить, что условие $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{-\beta-1}(b(x), x) < 0$ нужно лишь для того, чтобы обеспечить интегрируемость $\exp(M|x|^\beta)$, и может быть заменено последней.

С помощью полученных оценок можно указать эффективно проверяемые условия принадлежности к $L^p(\mu)$ логарифмического градиента $\nabla \varrho/\varrho$ меры μ . В случае $p = 2$ простые достаточные условия получены в работах [1], [2]. Первый общий результат для $p > 2$ недавно установлен в работе [12]. Найденное ниже условие усиливает этот результат, поскольку мы не требуем дифференцируемости коэффициента сноса и используем меньшую регулярность коэффициента диффузии (в работе [12] предполагается, что $a^{ij} \in C^3(\mathbf{R}^d)$ и $b \in C^2(\mathbf{R}^d)$). Ослабление условий на коэффициенты стало возможным из-за того, что здесь, в отличие от [12], не используются методы теории нелинейных уравнений. Пусть $L^p(\mu)$ — пространство всех измеримых функций, которые интегрируемы в степени p относительно меры μ с непрерывной положительной плотностью на $\mathbf{R}^d$, и пусть $W^{p,1}(\mu)$ — соболевское пространство функций, которые принадлежат пространству $L^p(\mu)$ вместе с их обобщенными частными производными первого порядка.

В следующей теореме и ее следствиях мы предположим, что μ — вероятностная мера на $\mathbf{R}^d$, удовлетворяющая эллиптическому уравнению (1.1) в смысле (1.2), т.е. мы имеем дело со случаем (I), $a^{ij} = a^{ji}$.

Теорема 3.2. Пусть $a^{ij} \in C^{0,\delta}(\mathbf{R}^d) \cap W_{\text{loc}}^{p_0,1}(\mathbf{R}^d)$, $\alpha \text{Id} \leq A \leq \gamma \text{Id}$, где $p_0 > d$ и $\alpha, \gamma, \delta > 0$, причем $\lim_{r \rightarrow 0} \sup_x \|\partial_x a^{ij}\|_{L^d(U(x,r))} = 0$ (последнее выполнено, если A липшицево). Пусть положительная функция $\Phi \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbf{R}^1)$ возрастает на $[0, +\infty)$, причем $\Phi(N+1) \leq C\Phi(N)^{1+\varepsilon}$ при некоторых $C, \varepsilon > 0$ и функции $\Phi(|x|)$ и $\Phi'(|x|)^{p_1}$ с некоторым $p_1 > d$ интегрируемы по мере μ на $\mathbf{R}^d$. Предположим также, что даны числа $C_0 > 0$, $\theta > 1$, $p > 1$ и $\gamma \in [0, 1/d)$, для которых

$$|b(x)| \leq C_0 \Phi(|x| - \theta)^\gamma, \quad |\nabla a^{ij}(x)|^d \leq C_0 \Phi(|x|),$$

$$\sum_{N=1}^{\infty} N^{d-1} \Phi(N)^{-q} < \infty, \quad \text{где } q := 1 - \gamma(p + \varepsilon d) > 0.$$

Тогда μ имеет плотность ϱ , для которой $\ln \varrho \in W^{p,1}(\mu)$.

Доказательство. Можно считать, что $\theta \leq 3$. Согласно [6], при указанных условиях μ имеет положительную непрерывную плотность $\varrho \in W_{\text{loc}}^{p_0,1}(\mathbf{R}^d)$. По теореме 3.1 работы [11] при наших предположениях, обеспечивающих все условия этой теоремы, плотность ϱ оценивается следующим образом:

$$\varrho(x) \leq C_1 \Phi(|x|)^{-1}.$$

Так как ряд из $N^{d-1} \Phi(N)^{-q}$ сходится, то $\Phi(|x|)^{-q} \in L^1(\mathbf{R}^d)$, откуда $\varrho^q \in L^1(\mathbf{R}^d)$ и $\ln \varrho \in L^p(\mu)$, ибо $0 < q < 1$ и ϱ ограничена. При фиксированном $x \in \mathbf{R}^d$ имеем

$$B := \sup_{z \in U(x, \theta)} |b(z)| \leq C_0 \sup_{z \in U(x, \theta)} \Phi(|z| - \theta)^\gamma \leq C_0 \Phi(|x|)^\gamma.$$

Пусть $0 < r < \min\{1/B, 1\}$. Тогда $rB < 1$. Поэтому по теореме 2.2 существует такая постоянная $K = K(\alpha, \gamma, d, \theta, \delta)$, что для всякого $y \in U(x, \theta^{1/2}r)$ выполнены неравенства

$$K^{-1} \varrho(x) \leq \varrho(y) \leq K \varrho(x). \quad (3.5)$$

Оценим следующий интеграл:

$$I := \int_{U(x,r)} \frac{|\nabla \varrho(y)|^p}{\varrho(y)^{p-1}} dy.$$

Согласно неравенству (3.5), имеем

$$I \leq \varrho(x)^{1-p} K^{p-1} \int_{U(x,r)} |\nabla \varrho(y)|^p dy. \quad (3.6)$$

Кроме того, справедлива оценка

$$\int_{U(x, \theta^{1/2}r)} |b|^p \varrho^p dy \leq B^p \int_{U(x, \theta^{1/2}r)} \varrho^p dy.$$

При $p > d$ следствие 2.1 с $h^i = b^i \varrho$ и неравенство (3.5) дают оценку

$$\begin{aligned} \int_{U(x,r)} |\nabla \varrho(y)|^p dy &\leq C_2 r^{-p} \int_{U(x, \theta^{1/2} r)} [1 + |b(y)|^p] \varrho(y)^p dy \\ &\leq C_2 r^{-p} (1 + r^p B^p) \|\varrho\|_{L^p(U(x, \theta^{1/2} r))}^p \\ &\leq C'_2 r^{d-p} (1 + r^p B^p) K^p \varrho(x)^p, \end{aligned}$$

где числа C_2 и C'_2 не зависят от x и r . Такая же оценка верна при $p \leq d$. В самом деле, так как она верна для $p_0 > d$, то неравенство Гёльдера и элементарно проверяемое неравенство $(1 + t^{p_0})^p \leq (1 + t^p)^{p_0}$ дают

$$\begin{aligned} \|\nabla \varrho\|_{L^p(U(x,r))}^p &\leq \|\nabla \varrho\|_{L^{p_0}(U(x,r))}^{p/p_0} C(d) r^{d(p_0-p)/p_0} \\ &\leq C_3 r^{(d-p_0)p/p_0} r^{d(p_0-p)/p_0} (1 + r^p B^p) \varrho(x)^p \\ &= C_3 r^{d-p} (1 + r^p B^p) \varrho(x)^p, \end{aligned}$$

где число C_3 не зависит от r и x . Следовательно, из (3.6) находим

$$I \leq C_4 r^{d-p} (1 + r^p B^p) \varrho(x) \leq 2C_4 r^{d-p} \varrho(x),$$

где число C_4 не зависит от x и r . Возьмем $r = (2C_0)^{-1} \Phi(|x|)^{-\gamma}$, что возможно благодаря указанной выше оценке на B . Ввиду приведенной в начале доказательства оценки для ϱ , выполнено неравенство

$$\int_{U(x,r)} \frac{|\nabla \varrho(y)|^p}{\varrho(y)^{p-1}} dy \leq C_5 \Phi(|x|)^{\gamma p - \gamma d - 1},$$

где C_5 не зависит от x и r . Положим $Q_N = U(0, N+1) \setminus U(0, N)$, $N > 1$. Индукцией по d легко показать, что есть такая постоянная C_6 , зависящая лишь от d , что Q_N можно покрыть шарами $U(x, r)$ радиуса $r = (2C_0)^{-1} \Phi(N+1)^{-\gamma}$, общее число которых не превосходит $C_6 C_0^d N^{d-1} \Phi(N+1)^{d\gamma}$. Из доказанного выше получаем

$$I_N := \int_{Q_N} \frac{|\nabla \varrho(y)|^p}{\varrho(y)^{p-1}} dy \leq C_5 C_6 C_0^d N^{d-1} \Phi(N+1)^{d\gamma} \Phi(N)^{\gamma p - \gamma d - 1}.$$

Поскольку $\Phi(N+1) \leq C \Phi(N)^{1+\varepsilon}$, то справедливо неравенство

$$N^{d-1} \Phi(N+1)^{d\gamma} \Phi(N)^{\gamma p - \gamma d - 1} \leq C N^{d-1} \Phi^{-q}.$$

Значит, $\sum_{N=1}^{\infty} I_N < \infty$. Следовательно, $|\nabla \ln \varrho|^p \varrho \in L^1(\mathbf{R}^d)$. Теорема доказана.

Следствие 3.1. Пусть $a^{ij} \in C^{0,\delta}(\mathbf{R}^d) \cap W_{\text{loc}}^{p_0,1}(\mathbf{R}^d)$, $\alpha \text{Id} \leq A \leq \gamma \text{Id}$, где $\alpha, \gamma, \delta > 0$ и $p_0 > d > 1$, причем $\lim_{r \rightarrow 0} \sup_x \|\partial_{x_i} a^{ij}\|_{L^d(U(x,r))} = 0$. Пусть $p > 1$. Предположим, что при некоторых $M > 0$ и $\beta > 0$ функция $\exp(M|x|^\beta)$ интегрируема по мере μ на $\mathbf{R}^d$, причем

$$|b(x)| \leq C_0 \exp\{\kappa|x|^\beta\}, \quad |\nabla a^{ij}(x)| \leq C_0 \exp\{\kappa|x|^\beta\},$$

где $0 < \kappa d \max(p, d) < M$. Тогда $\ln \varrho \in W^{p,1}(\mu)$. В частности, если для всякого $\kappa > 0$ найдется такое число $C(\kappa)$, что

$$|b(x)| + |\nabla a^{ij}(x)| \leq C(\kappa) \exp\{\kappa|x|^\beta\},$$

то $\ln \varrho \in W^{p,1}(\mu)$ для всех $p \in [1, +\infty)$.

Доказательство. Найдется такое достаточно малое число $\varepsilon_0 > 0$, что для $\gamma := \max(p, d)^{-1} - \varepsilon_0$ получим $\gamma > 0$ и $\kappa\gamma^{-1} < Md^{-1}$. Возьмем в качестве Φ функцию $\Phi(r) = \exp(M_0|r|^\beta)$, где M_0 выбрано в $(\kappa\gamma^{-1}, Md^{-1})$. Поскольку $p\gamma < 1$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $q = 1 - \gamma(p + \varepsilon d) > 0$. Положим $\theta = 2$. Заметим, что

$$\exp(\kappa r^\beta) \leq C_1 \exp(\gamma M_0|r - 2|^\beta),$$

ибо $\kappa < \gamma M_0$. Поэтому $|b(x)| \leq C_0 C_1 \Phi(|x| - 2)^\gamma$. Ясно также, что при некотором $p_1 > d$ функция $\Phi'(|x|)^{p_1}$ интегрируема относительно μ , ибо $M_0 d < M$. Как легко видеть, выполнены и остальные условия теоремы 3.2. Следствие доказано.

Аналогично доказывается следующее утверждение (берем $\Phi(r) = r^\beta + 1$).

Следствие 3.2. Пусть $a^{ij} \in C^{0,\delta}(\mathbf{R}^d) \cap W_{\text{loc}}^{p_0,1}(\mathbf{R}^d)$, $\alpha \text{Id} \leq A \leq \gamma \text{Id}$, где $\alpha, \gamma, \delta > 0$ и $p_0 > d > 1$, причем $\lim_{r \rightarrow 0} \sup_x \|\partial_{x_i} a^{ij}\|_{L^q(U(x,r))} = 0$. Пусть $p > 1$. Предположим, что при некотором $\beta > d$ функция $|x|^{\beta d}$ интегрируема по мере μ на $\mathbf{R}^d$, причем

$$|b(x)| \leq C_0 + C_0|x|^{\beta\gamma}, \quad |\nabla a^{ij}(x)| \leq C_0 + C_0|x|^{\beta/d},$$

где $0 < \gamma < d^{-1}$, $\gamma < 1 - d\beta^{-1}$. Тогда $\ln \varrho \in W^{p,1}(\mu)$ при $p \in [1, (\beta - d)\beta^{-1}\gamma^{-1})$.

Перейдем к параболическому уравнению. Как и в эллиптическом случае, напомним некоторые верхние оценки. Пусть вероятностная мера μ на $\mathbf{R}^d \times [0, 1]$ удовлетворяет параболическому уравнению (1.1) в смысле (1.4) с начальным условием $\mu_0 = \varrho(\cdot, 0) dx$ (см. (1.6)), причем отображения A и A^{-1} равномерно ограничены, отображения $x \mapsto A(x, t)$ равномерно липшицевы с некоторой общей постоянной, $a^{ij} = a^{ji}$, $|b| \in L^\beta(\mu)$ при некотором $\beta > d + 2$ и $\sup_{t \in (0,1)} \|b(\cdot, t)\|_{L^q(\mu_t)} < \infty$. Предположим, что дана такая функция $\Phi \geq c > 0$ на $\mathbf{R}^d$ с локально ограниченными производными второго порядка, что $\varrho(x, 0) \leq C\Phi(x)^{-1}$, $\Phi \in L^1(\mu_0)$ и

$$\Phi^{1+\varepsilon}, \quad |L\Phi|^{\beta/2}\Phi^{1-\beta/2}, \quad |A\nabla\Phi|^{\beta}\Phi^{1-\beta} \in L^1(\mu),$$

$$\sup_{t \in [0,1]} \int_{\mathbf{R}^d} \Phi(x) \varrho(x, t) dx < \infty$$

с некоторым $\varepsilon > 0$. Тогда, согласно теореме 3.3 работы [10], которую можно использовать, перейдя к недивергентной форме нашего уравнения, для всякого $\tau < 1$ найдется такое число C_τ , что

$$\varrho(x, t) \leq C_\tau \Phi(x)^{-1} \quad \text{для почти всех } (x, t) \in \mathbf{R}^d \times [0, \tau].$$

Например, пусть A и A^{-1} равномерно ограничены, A равномерно липшицево по x , причем функция $\exp(K|x|^r) \varrho(x, 0)$ ограничена и интегрируема по $\mathbf{R}^d$ для некоторого $r > 0$. Предположим также, что

$$|b| \in L^\beta(\mu), \quad \exp((2K + \varepsilon)|x|^r) \in L^1(\mu),$$

$$\sup_{t \in (0,1)} \int_{\mathbf{R}^d} \exp(K|x|^r) \varrho(x, t) dx < \infty, \quad \sup_{t \in (0,1)} \|b(\cdot, t)\|_{L^d(\mu_t)} < \infty \quad (3.7)$$

для некоторых $\beta > d + 2$ и $\varepsilon > 0$. Тогда для всякого $\tau < 1$ найдется такое число $C(\tau) > 0$, что

$$\varrho(x, t) \leq C(\tau) \exp(-K|x|^r), \quad (x, t) \in \mathbf{R}^d \times [0, \tau].$$

Чтобы обеспечить (3.7) в терминах A и b , достаточно иметь интегрируемость $\exp(K'|x|^r) \varrho(x, 0)$ с некоторым $K' > \max(2K, C_2(d + 2))$ и следующие оценки:

$$\sup_t |b(x, t)| \leq C_1 \exp(C_2|x|^r) \quad \text{и} \quad \sup_t (b(x, t), x) \leq C_3 - C_4|x|^\tau$$

для некоторых $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ с

$$2Kr \sup_{t,x} \|A(x, t)\| < C_4 \quad \text{и} \quad C_2(d + 2)r \sup_{t,x} \|A(x, t)\| < C_4.$$

Это проверяется с помощью функции Ляпунова V такой, что $V(x) = \exp(M|x|^r)$ при $|x| \geq 1$ и M выбрано так, что $\max(2K, C_2(d + 2)) < M < K'$, $Mr \sup_{t,x} \|A(x, t)\| < C_4$. Из (3.4) следует, что функция LV ограничена сверху некоторой постоянной K_0 , что согласно лемме 2.2 в [22] дает оценку

$$\int_{\mathbf{R}^d} V(x) \mu_t(dx) \leq K_0 t + \int_{\mathbf{R}^d} V(x) \varrho(x, 0) dx.$$

Как мы сейчас увидим, имеются похожие нижние оценки; однако различие между верхними и нижними оценками более значительно, чем в эллиптическом случае.

Пусть измеримое матричнозначное отображение $A = (a^{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ удовлетворяет условию (2.10) с $\Omega = \mathbf{R}^d$, $a^{ij} = a^{ji}$, и пусть b — измеримое векторное поле на множестве $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$.

Пусть V — непрерывная возрастающая функция на $[0, \infty)$ и $V(0) > 0$.

Теорема 3.3. Пусть $\sup_{t \in (0,1)} |b(x, t)| \leq V(|x|/\theta)$ для почти всех $x \in \mathbf{R}^d$, где $\theta > 1$. Пусть

$$\alpha(r) := \sup_{t \in (0,1), |x| \leq r} \|A(x, t)^{-1}\|, \quad \gamma(r) := \sup_{t \in (0,1), |x| \leq r} \|A(x, t)\|.$$

Предположим, что μ — неотрицательная мера с плотностью ϱ на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ такой, что

$$\varrho \in \mathbf{H}^{2,1}(U \times J) \quad (3.8)$$

для всякого шара $U \subset \mathbf{R}^d$ и всякого отрезка J в $(0, 1)$. Предположим, что μ удовлетворяет уравнению (1.1) в смысле (1.5), т.е. в случае (II). Тогда существует такое положительное число $K = K(d)$, что непрерывная версия функции ϱ удовлетворяет неравенству

$$\varrho(x, t) \geq \varrho(0, s) \exp \left\{ -K(d) |1 + \alpha(\theta|x|)^{-1} + (\alpha(\theta|x|)^{-1} \cdot \right. \\ \left. + \alpha(\theta|x|)^{-1/2}) \gamma(\theta|x|)|^2 \left(1 + \frac{t-s}{s} V(|x|)^2 + \frac{1}{t-s} |x|^2 \right) \right\},$$

где $0 < s < t < 1$, $x \in \mathbf{R}^d$. В частности, если $\|A(x, t)\| \leq \gamma$ и $\|A(x, t)^{-1}\| \leq \alpha$, то существует такое положительное число $K = K(d, \alpha, \gamma, \theta)$, что непрерывная версия функции ϱ удовлетворяет неравенству

$$\varrho(x, t) \geq \varrho(0, s) \exp \left\{ -K \left(1 + \frac{t-s}{s} V(|x|)^2 + \frac{1}{t-s} |x|^2 \right) \right\},$$

где $0 < s < t < 1$, $x \in \mathbf{R}^d$.

Доказательство. В теореме 2.5 возьмем $\Omega = U(0, \theta|x|)$ и $y = 0$. Это дает искомую оценку.

Следствие 3.3. Если в ситуации теоремы 3.3 при почти всех $t \in (0, 1)$ функция $x \mapsto \varrho(x, t)$ не равна тождественно нулю, то для всякого отрезка $[\tau_1, \tau_2]$ в $(0, 1)$ существует такое число $K = K(d, \alpha, \gamma, \theta, \tau_1, \tau_2) \geq 0$, что при всех $t \in [\tau_1, \tau_2]$ и $x \in \mathbf{R}^d$ выполнены неравенства

$$\exp(-K(1 + V(|x|)^2 + |x|^2)) \leq \varrho(x, t) \leq \exp(K(1 + V(|x|)^2 + |x|^2)).$$

Доказательство. Из теоремы 2.5 и нашего условия следует, что функция $t \mapsto \varrho(0, t)$ не обращается в нуль на интервале $(0, 1)$. Рассмотрим отрезок $[\tau', \tau'']$, где $\tau' = \tau_1/2$, $\tau'' = 1 - (1 - \tau_2)/2$. Первая из доказываемых нами оценок следует из теоремы 3.3, в которой следует взять $s = \tau'$. Вторая оценка ясна из теоремы 2.5.

Пример 3.2. Пусть в ситуации теоремы 3.3 матрицы $A(x, t)$ и $A(x, t)^{-1}$ равномерно ограничены и для некоторых постоянных $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ при почти всех x выполнено неравенство

$$\sup_{t \in (0, 1)} |b(x, t)| \leq c_1 |x|^\beta + c_2.$$

Тогда существует такое положительное число K , что

$$\varrho(x, t) \geq \varrho(0, s) \exp \left\{ -K \left(1 + \frac{t-s}{s} |x|^{2\beta} + \frac{1}{t-s} |x|^2 \right) \right\}.$$

Например, если $L = \partial_t + \frac{1}{2} \Delta$, то мера $(2\pi t)^{-1/2} e^{-|x|^2/(2t)} dx dt$ является решением. Наши результаты дают такое число $K > 0$, что $\varrho \geq e^{-K(\delta)|x|^2/t}$

в любой полосе $\mathbf{R}^d \times (\delta, 1)$, где $\delta > 0$. Аналогичным образом наша нижняя оценка точна в случае линейного коэффициента сноса, но в случае квадратичного роста $|b|$ она становится уже менее точной; например, если $\varrho(x, t) = C \exp(-|x|^3)$, то в нашей нижней оценке появляется $\exp(-K|x|^4)$.

Укажем набор условий на коэффициенты A и b , обеспечивающих двусторонние экспоненциальные оценки плотности решения в параболическом случае.

Пример 3.3. Предположим, что отображения A и A^{-1} равномерно ограничены, функции $x \mapsto a^{ij}(x, t)$ равномерно липшицевы с общей постоянной, $a^{ij} = a^{ji}$, причем для некоторых $r > 1$, $\sigma \geq 0$, $K > 0$, $K' > K$ имеем

$$\begin{aligned} |b(x, t)| &\leq C + C|x|^{r-1+\sigma}, & \varrho(x, 0) &\leq C \exp(-K'|x|^r), \\ (x, b(x, t)) &\leq c_1 - c_2|x|^r, & c_2 &> 2rK \sup_{x,t} \|A(x, t)\|. \end{aligned}$$

Предположим, что вероятностная мера μ на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ удовлетворяет уравнению (1.1) в смысле (1.4), т.е. в случае (I). Тогда μ обладает такой непрерывной плотностью ϱ , что для всякого отрезка $[\tau_1, \tau_2] \subset (0, 1)$ найдутся такие числа C_1, C_2 и K_0 , что

$$C_1 \exp(-K_0|x|^{2r+2\sigma-2} - K_0|x|^2) \leq \varrho(x, t) \leq C_2 \exp(-K|x|^r),$$

где $(x, t) \in \mathbf{R}^d \times [\tau_1, \tau_2]$. Верхняя оценка следует из примера 3.1 работы [10], а нижняя из доказанного выше. В отличие от эллиптического случая здесь не совпадают показатели степени при $|x|$ в нижней и верхней оценках. Отметим, что указанные условия дают также и существование решения $\mu = \mu_t dt$ с вероятностными мерами μ_t при произвольном начальном распределении (см. [8], [22]). Проблема единственности рассмотрена в [23].

Еще одно применение наших результатов связано с доказательством существования конечной энтропии решения по пространственной переменной при положительных t для всякого начального распределения. Наличие конечной энтропии, полезное во многих отношениях, необходимо для применения результатов из [10], дающих интегрируемость $|\nabla \varrho(x, t)|^2 / \varrho(x, t)$.

Пусть W — непрерывная возрастающая функция на полупрямой $[0, \infty)$, $W(0) > 0$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} W(r) = +\infty$.

Предложение 3.1. Пусть матрицы $A(x, t)$ и $A(x, t)^{-1}$ равномерно ограничены, $a^{ij} = a^{ji}$ и при некотором $\theta > 1$ выполнено следующее неравенство:

$$\sup_{t \in (0, 1)} |b(x, t)|^2 \leq W\left(\frac{|x|}{\theta}\right), \quad x \in \mathbf{R}^d.$$

Пусть μ — мера вида $\mu = \mu_t dt$, где каждая μ_t — вероятностная мера, причем μ удовлетворяет условию (3.8) и уравнению (1.1) в смысле (1.5). Предположим, что

$$\int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} [|x|^2 + W(|x|)] \mu_t(dx) dt < \infty.$$

Тогда для всякого отрезка $[\tau_1, \tau_2] \subset (0, 1)$ имеем

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(x, s) |\ln \varrho(x, s)| dx ds < \infty.$$

Доказательство. Пусть отрезок $[\tau_1, \tau_2] \subset (0, 1)$ фиксирован. Согласно следствию 3.3, существует такое число $K = K(d, \alpha, \gamma, \theta, \tau_1, \tau_2) > 0$, что

$$\exp\{-K(1 + |x|^2 + W(|x|))\} \leq \varrho(x, s) \leq \exp\{K(1 + |x|^2 + W(|x|))\},$$

где $s \in [\tau_1, \tau_2]$, $x \in \mathbf{R}^d$. По теореме Фубини при почти каждом $s \in (0, 1)$ функция $x \mapsto (|x|^2 + W(|x|)) \varrho(x, s)$ интегрируема по $\mathbf{R}^d$. Для таких s из $[\tau_1, \tau_2]$ получаем

$$\int_{\mathbf{R}^d} \varrho(x, s) |\ln \varrho(x, s)| dx \leq \int_{\mathbf{R}^d} K(1 + |x|^2 + W(|x|)) \varrho(x, s) dx.$$

Тем самым, предложение доказано.

Следствие 3.4. Предположим, что $A \in H_{\text{loc}}^{2,1}(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$, $a^{ij} = a^{ji}$, причем $A(x, t)$ и $A(x, t)^{-1}$ равномерно ограничены. Кроме того, предположим, что при некотором $\theta > 1$ выполнено следующее неравенство:

$$\sup_{t \in (0, 1)} |b(x, t)|^2 \leq W\left(\frac{|x|}{\theta}\right), \quad x \in \mathbf{R}^d.$$

Пусть μ — мера вида $\mu = \mu_t dt$, где каждая μ_t — вероятностная мера, причем выполнено условие (3.8). Мы предполагаем, что μ удовлетворяет уравнению (1.1) в смысле (1.5) и имеет такое начальное условие μ_0 , что функция $W_0(x) := W(|x|)$ интегрируема относительно μ_0 . Наконец, пусть

$$W(r) \geq c_1 + c_2 r^2 \quad \text{и} \quad \mathcal{L}W_0(x) \leq C$$

с некоторыми постоянными $c_1, c_2, C > 0$. Тогда для непрерывной верси ϱ плотности μ имеем

$$\sup_{s \in (0, 1)} \int_{\mathbf{R}^d} \varrho(x, s) |\ln \varrho(x, s)| dx < \infty.$$

Доказательство. Положим $b_0^i := \partial_{x_j} a^{ij} + b^i$. Тогда $\mathcal{L} = \partial_t + a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} + b_0^i \partial_{x_i}$. Следовательно, мы можем применять результаты работы [22], в которой рассматривались операторы в недивергентной форме. Согласно лемме 2.2 из [22], для почти всех $s \in [0, 1)$ имеем

$$\int_{\mathbf{R}^d} W(|x|) \varrho(x, s) dx \leq Cs + \int_{\mathbf{R}^d} W(|x|) \mu_0(dx).$$

Ввиду непрерывности ϱ и теоремы Фату это неравенство верно для всех $s \in (0, 1)$, что позволяет применить то же рассуждение, что и в предыдущем предложении.

Подчеркнем еще раз, что если функции $x \mapsto a^{ij}(x, t)$ локально липшицевы равномерно по $t \in (0, 1)$, то в теореме 3.3, следствии 3.3, примере 3.2, предложении 3.1 и следствии 3.4 всякое решение μ уравнения (1.1) в смысле (1.4) удовлетворяет условию (3.8), следовательно, является решением и в смысле (1.5).

Пример 3.4. Предположим, что в следствии 3.4 дополнительно известно, что функции $x \mapsto a^{ij}(x, t)$ равномерно липшицевы с общей постоянной. Тогда для всякого отрезка $[\tau_1, \tau_2] \subset (0, 1)$ ввиду теоремы 2.1 работы [10] имеем

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\mathbf{R}^d} \frac{|\nabla \varrho(x, t)|^2}{\varrho(x, t)} dx dt < \infty.$$

Пример 3.5. Предположим, что отображения $A(x, t)$ и $A(x, t)^{-1}$ равномерно ограничены, функции $x \mapsto a^{ij}(x, t)$ равномерно липшицевы с общей постоянной и что

$$|b(x, t)| \leq c_0 \exp(c|x|^r), \quad (b(x, t), x) \leq c_1 - c_2|x|^r, \quad c_2 > 2cr \sup_{x,t} \|A(x, t)\|.$$

Пусть μ — вероятностная мера на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$, удовлетворяющая уравнению (1.1) в смысле (1.4) с таким начальным условием μ_0 , что функция $\exp(c|x|^r)$ интегрируема относительно μ_0 . Тогда

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\mathbf{R}^d} \frac{|\nabla \varrho(x, t)|^2}{\varrho(x, t)} dx dt < \infty$$

для всякого отрезка $[\tau_1, \tau_2] \subset (0, 1)$. Для обоснования этого примера достаточно взять $W_0(z) = \exp(M|z|^r)$ с $M > 2c$, достаточно близким к $2c$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bogachev V. I., Röckner M. Regularity of invariant measures on finite- and infinite-dimensional spaces and applications. — J. Funct. Anal., 1995, v. 133, № 1, p. 168–223.
2. Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M. Regularity of invariant measures: the case of nonconstant diffusion part. — J. Funct. Anal., 1996, v. 138, № 1, p. 223–242.
3. Богачев В. И., Рёкнер М. Обобщение теоремы Хасьминского об инвариантных мерах. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 363–378.
4. Богачев В. И., Крылов Н. В., Рёкнер М. Дифференцируемость инвариантных мер и переходных вероятностей сингулярных диффузий. — Докл. РАН, 2001, т. 376, № 2, с. 151–154.
5. Bogachev V. I., Röckner M., Wang F.-Y. Elliptic equations for invariant measures on finite and infinite dimensional manifolds. — J. Math. Pures Appl., 2001, v. 80, № 2, p. 177–221.

6. Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M. On regularity of transition probabilities and invariant measures of singular diffusions under minimal conditions. — Comm. Partial Differential Equations, 2001, v. 26, № 11–12, p. 2037–2080.
7. Богачев В. И., Рёкнер М., Штаннат В. Единственность решений эллиптических уравнений и единственность инвариантных мер диффузий. — Матем. сб., 2002, т. 193, № 7, с. 3–36.
8. Bogachev V. I., Da Prato G., Röckner M. Existence of solutions to weak parabolic equations for measures. — Proc. London Math. Soc., 2004, v. 88, № 3, p. 753–774.
9. Богачев В. И., Крылов Н. В., Рёкнер М. Регулярность и глобальные оценки плотностей инвариантных мер диффузионных процессов. — Докл. РАН, 2005, т. 405, № 5, с. 583–587.
10. Богачев В. И., Рёкнер М., Шапошников С. В. Глобальная регулярность и оценки решений параболических уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 4, с. 652–674.
11. Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M. Elliptic equations for measures: regularity and global bounds of densities. — J. Math. Pures Appl., 2006, v. 85, № 6, 743–757.
12. Metafune G., Pallara D., Rhandi A. Global regularity of invariant measures. — J. Funct. Anal., 2005, v. 223, № 2, p. 396–424.
13. Morrey C. B. Multiple Integrals in the Calculus of Variations. New York: Springer-Verlag, 1966, 506 с.
14. Шапошников С. В. Оценка Морри соболевских норм решений эллиптических уравнений. — Матем. заметки, 2006, т. 79, № 3, с. 450–469.
15. Lunardi A., Vespri V. Hölder regularity in variational parabolic nonhomogeneous equations. — J. Differential Equations, 1991, v. 94, № 1, p. 1–40.
16. Byun S.-S. Elliptic equations with BMO coefficients in Lipschitz domains. — Trans. Amer. Math. Soc., 2005, v. 357, № 3, p. 1025–1046.
17. Krylov N. V. Parabolic and elliptic equations with VMO coefficients. — Comm. Partial Differential Equations, 2007, v. 32, № 3, p. 453–475.
18. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967, 736 с.
19. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989, 463 с.
20. Aronson D. G., Serrin J. Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations. — Arch. Rational Mech. Anal., 1967, v. 25, p. 81–122.
21. Moser J. A Harnack inequality for parabolic differential equations. — Comm. Pure Appl. Math., 1964, v. 17, p. 101–134; corrections: *ibid.*, 1967, v. 20, p. 231–236.
22. Bogachev V. I., Da Prato G., Röckner M. On parabolic equations for measures. — Preprint BiBoS № 06-05-213, Bielefeld: Bielefeld University, 2006; Comm. Partial Differential Equations (to appear).
23. Bogachev V. I., Da Prato D., Röckner M., Stannat W. Uniqueness of solutions to weak parabolic equations for measures. — Preprint BiBoS № 06-07-225, Bielefeld: Bielefeld University, 2006; Proc. London Math. Soc. (to appear).

Поступила в редакцию
1.XII.2006