Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Михайлов, О пуассоновской аппроксимации для распределения числа пустых ячеек в неоднородной схеме размещения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 1, 184–189

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1720>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 06:15:27

7. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1966, 432 с.
8. Ивницкий В. А. О стационарных вероятностях состояний замкнутой звездообразной экспоненциальной сети массового обслуживания при зависимости вероятностей перехода от ее состояния. — Автоматика и вычислительная техника, 1994, № 6, с. 29–37.

Поступила в редакцию
11.V.1994

© 1997 г.

МИХАЙЛОВ В. Г.*

О ПУАССОНОВСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ПУСТЫХ ЯЧЕЕК В НЕОДНОРОДНОЙ СХЕМЕ РАЗМЕЩЕНИЯ¹⁾

Исследуется неоднородная (т.е. допускающая различия в законах размещения частиц) полиномиальная схема размещения частиц по ячейкам. Получены явные оценки точности пуассоновской аппроксимации для распределения числа пустых ячеек в произвольно заданном подмножестве ячеек. В доказательстве основной теоремы используется комбинация метода Чена–Стейна с методом одного вероятностного пространства, изложенная в монографии А. Д. Варбура, Л. Холста и С. Янсона «Пуассоновская аппроксимация» [4].

Ключевые слова и фразы: случайные размещения, неоднородная схема, число пустых ячеек, пуассоновская аппроксимация, метод Чена–Стейна.

Рассмотрим неоднородную схему размещения частиц по ячейкам, определяемую следующим образом. Имеются N ячеек, занумерованных числами от 1 до N , в которые независимо бросают n частиц, причем i -й частице ($i = 1, \dots, n$) отвечает свой набор вероятностей $p_{i1}, \dots, p_{iN}$ попадания частицы в ячейки. Разумеется, эти наборы вероятностей могут и совпадать. Если все они одинаковы ($p_{1k} = \dots = p_{nk} = p_k$, $k = 1, \dots, N$), то мы получаем обычную полиномиальную схему размещения частиц по ячейкам. При $p_{ik} = 1/N$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, N$, получаем равновероятную полиномиальную схему. (По поводу терминологии теории случайных размещений отсылаем к монографии [1].) Неоднородная полиномиальная схема (далее называем ее просто неоднородной) является естественным обобщением полиномиальной схемы. Она возникает в задачах о проверке свойств статистической однородности последовательностей случайных и псевдослучайных чисел. Ясно, что при не слишком больших различиях в законах размещения отдельных частиц она должна обладать многими свойствами полиномиальной схемы. В связи с этим возникает задача описания областей допустимых различий законов размещения, в пределах которых сохраняются те или иные свойства однородной полиномиальной схемы. При исследовании неоднородных схем удается использовать некоторые из традиционных для теории случайных размещений методов: метод моментов, метод одного вероятностного пространства, аппроксимацию разделимых статистик суммами случайных величин с малым числом

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Вавилова, 42, 117966 Москва, ГСП-1, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 96-01-00531.

зависимостей (последний прием использован, например, в работах [2] и [3]). В настоящей заметке мы исследуем точность пуассоновской аппроксимации для распределения числа пустых ячеек в неоднородной полиномиальной схеме, используя для этого комбинацию метода Чена–Стейна с методом одного вероятностного пространства, изложенную в книге [4].

Пусть $J \subseteq \{1, \dots, N\}$ есть некоторый набор ячеек. Обозначим через μ_0^J число ячеек в J , содержащих после размещения всех частиц ровно по r частиц каждая, а через $d(J, \lambda^J)$ обозначим расстояние по вариации между распределением случайной величины μ_0^J и распределением Пуассона с параметром $\lambda^J = E\mu_0^J$. Пусть q_k — вероятность события, состоящего в том, что k -я ячейка осталась пустой:

$$q_k = \prod_{i=1}^n (1 - p_{ik}). \quad (1)$$

Пусть b_i^J — вероятность события, состоящего в том, что i -я частица распределась в ячейку из множества J отдельно от остальных частиц:

$$b_i^J = \sum_{k \in J} p_{ik} \prod_{t \neq i} (1 - p_{tk}). \quad (2)$$

Теорема 1. *Выполняется неравенство*

$$d(J, \lambda^J) < \min \left\{ 1, \frac{1}{\lambda^J} \right\} \left(\sum_{i=1}^n (b_i^J)^2 + \sum_{k \in J} q_k^2 \right). \quad (3)$$

Рассмотрим случаи обычных полиномиальной и равновероятной полиномиальной схем. Используя соотношения

$$\sum_{k \in J} q_k = E\mu_0^J, \quad \sum_{i=1}^n b_i^J = E\mu_1^J, \quad (4)$$

получаем следующие утверждения.

Следствие 1.1. *Для однородной полиномиальной схемы справедливо неравенство*

$$d(J, \lambda^J) < \min \left\{ 1, \frac{1}{\lambda^J} \right\} \left(\frac{1}{n} (E\mu_1^J)^2 + \sum_{k \in J} q_k^2 \right).$$

Следствие 1.2. *Для равновероятной полиномиальной схемы справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} d(J, \lambda^J) &< \min \left\{ 1, \frac{1}{\lambda^J} \right\} \left(\frac{1}{n} (E\mu_1^J)^2 + \frac{1}{|J|} (E\mu_0^J)^2 \right) \\ &= \min \left\{ \left(1 - \frac{1}{N} \right)^n, \frac{1}{|J|} \right\} \left(1 - \frac{1}{N} \right)^n \left(\frac{n|J|^2}{(N-1)^2} + |J| \right). \end{aligned}$$

Последнее равенство проверяется непосредственно, исходя из равенств (1), (2) и (4).

Теорема 1 позволяет также доказать ряд предельных теорем для случайной величины μ_0^J при $|J| \rightarrow \infty$ и согласованном изменении остальных параметров схемы. Их формулировки выглядят наиболее просто в случае, когда изменение вероятностей p_{ik} при переходе к пределу подчиняется условиям

$$\max_{1 \leq i \leq n, k \in J} p_{ik} \leq p = \text{const} < 1, \quad (5)$$

$$\exists C < \infty: \max_{k \in J} \sum_{i=1}^n p_{ik} \leq C \min_{k \in J} \sum_{i=1}^n p_{ik}. \quad (6)$$

Условия (5) и (6) представляются достаточно естественными, они мало связаны с неодинаковостью законов размещения частиц и призваны отсеять разного рода патологические случаи, затрудняющие доказательство. Условие (5) исключает варианты, когда частицы имеют вырожденные или сближающиеся с ними при переходе к пределу распределения. Условие (6) означает, что среднее число частиц в разных ячейках имеет при переходе к пределу одинаковый порядок роста. Пусть

$$\alpha(J) = \min_{k \in J} \sum_{i=1}^n p_{ik}. \quad (7)$$

Теорема 2. Пусть $|J| \rightarrow \infty$ и выполнены условия (5) и (6). Тогда

$$d(J, \lambda^J) = O\left((\alpha(J) + 1)e^{-\alpha(J)}\right). \quad (8)$$

Заметим, что предельное поведение числа пустых ячеек μ_0 в равновероятной и в полиномиальной схемах принято описывать в терминах областей изменения параметров (см. [1, с. 13–14, 111–112]). А именно, считается, что изменение параметров равновероятной схемы отвечает *правой промежуточной области*, если выполняется условие $\lambda = E\mu_0 \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow \infty$, и отвечает *правой крайней области*, если $\lambda \rightarrow \text{const} < \infty$, $\alpha \rightarrow \infty$. Здесь $\alpha = n/N$, т.е. имеет тот же смысл, что величина $\alpha(J)$ в нашем случае. Аналогичными соотношениями описываются эти области и в полиномиальной схеме размещения, где $\alpha = \min p_k$. Такое деление объясняется разницей в предельных законах для числа пустых ячеек: в правой промежуточной области выполняется центральная предельная теорема, тогда как в правой крайней области имеет место предельная теорема Пуассона. Сформулированная выше теорема 2 показывает, что аналогичное деление возможно и в рассматриваемом нами случае неоднородных схем, причем не только для общего числа пустых ячеек, но и для случайной величины μ_0^J при произвольном множестве J . Определим для случайной величины μ_0^J в неоднородной полиномиальной схеме, подчиняющейся условиям (5) и (6), *правую промежуточную и правую крайнюю области* условиями $\lambda^J \rightarrow \infty$, $\alpha(J) \rightarrow \infty$ и $\lambda^J \rightarrow \lambda_0 < \infty$, $\alpha(J) \rightarrow \infty$, соответственно. Напомним, что величина $\alpha(J)$ определяется формулой (7).

Следствие 2.1. В правой промежуточной области изменения параметров функция распределения случайной величины $(\mu_0^J - \lambda^J)(\lambda^J)^{-1/2}$ сходится к стандартной нормальной функции распределения.

Следствие 2.2. В правой крайней области изменения параметров функция распределения случайной величины μ_0^J сходится к функции распределения закона Пуассона с параметром λ_0 .

Перейдем к доказательствам.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через I_k индикатор случайного события, состоящего в том, что k -я ячейка осталась пустой. Тогда

$$EI_k = P\{I_k = 1\} = q_k = \prod_{i=1}^n (1 - p_{ik}) \quad (9)$$

и $\mu_0^J = \sum_{k \in J} I_k$. Предположим теперь, что выполняется условие

$$\max_{1 \leq i \leq n, k \in J} p_{ik} < 1. \quad (10)$$

Рассмотрим случайные величины $\mu_0^J(k)$, $k \in J$, с распределениями

$$\mathcal{L}(\mu_0^J(k)) = \mathcal{L}(\mu_0^J - I_k \mid I_k = 1).$$

Нетрудно понять, что распределение случайной величины $\mu_0^J(k)$ совпадает с распределением случайной величины μ_0^J в неоднородной схеме размещения n частиц по ячейкам $\{1, \dots, N\} \setminus \{k\}$ с вероятностями

$$p_{is}(k) = \frac{p_{is}}{1 - p_{ik}}, \quad s \in \{1, \dots, N\} \setminus \{k\}. \quad (11)$$

Пусть случайные величины $\mu_0^J(k)$ заданы на одном вероятностном пространстве с величиной μ_0^J . Тогда согласно оценке метода Чена–Стейна (см., например, неравенства (2.1.2) в [4] или теорему 1 в [5])

$$d(J, \lambda^J) \leq \min \left\{ 1, \frac{1}{\lambda^J} \right\} \sum_{k \in J} q_k \mathbb{E} |\mu_0^J - \mu_0^J(k)|. \quad (12)$$

Искомое построение аналогично построению для обычной полиномиальной схемы (см. главу 6 книги [4]). Случайная величина $\mu_0^J(k)$ реализуется в нашей схеме размещения одновременно с величиной μ_0^J следующим образом. При размещении частиц каждая частица, попавшая в k -ю ячейку, перераспределяется (независимо от всего предшествующего) по остальным ячейкам с зависящими от номера частицы вероятностями (11). Это перераспределение частиц не увеличивает число пустых в множестве ячеек $J \setminus \{k\}$. Поэтому величина под знаком модуля в правой части (12) неотрицательна. Следовательно,

$$\mathbb{E} |\mu_0^J - \mu_0^J(k)| = \mathbb{E} \mu_0^J - \mathbb{E} \mu_0^J(k). \quad (13)$$

Осталось вычислить выражение в правой части этого равенства, что сравнительно легко делается с помощью (9) и (11). Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \mu_0^J &= \sum_{s \in J} \prod_{i=1}^n (1 - p_{is}), \\ \mathbb{E} \mu_0^J(k) &= \sum_{s \in J \setminus \{k\}} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{p_{is}}{1 - p_{ik}} \right) = \sum_{s \in J \setminus \{k\}} \prod_{i=1}^n (1 - p_{is}) \left(1 - \frac{p_{is} p_{ik}}{(1 - p_{is})(1 - p_{ik})} \right). \end{aligned}$$

Используя эти формулы, получаем

$$\sum_{k \in J} q_k \mathbb{E} \mu_0^J = \sum_{k \in J} q_k^2 + \sum_{\substack{k, s \in J \\ k \neq s}} \prod_{i=1}^n (1 - p_{ik})(1 - p_{is}), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k \in J} q_k \mathbb{E} \mu_0^J(k) &= \sum_{k \in J} \sum_{\substack{s \in J \\ s \neq k}} \prod_{i=1}^n (1 - p_{ik})(1 - p_{is}) \left(1 - \frac{p_{is} p_{ik}}{(1 - p_{is})(1 - p_{ik})} \right) \\ &> \sum_{k \in J} \sum_{\substack{s \in J \\ s \neq k}} \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{p_{is} p_{ik}}{(1 - p_{is})(1 - p_{ik})} \right) \prod_{i=1}^n (1 - p_{ik})(1 - p_{is}) \\ &> \sum_{k \in J} \sum_{\substack{s \in J \\ s \neq k}} \prod_{i=1}^n (1 - p_{ik})(1 - p_{is}) - \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k \in J} p_{ik} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (1 - p_{jk}) \right\}^2. \quad (15) \end{aligned}$$

Выражение в скобках в вычитаемом в правой части последней цепочки неравенств равно b_k^J (см. формулу (2)). Поэтому взяв разность оценок (14) и (15), приходим к неравенству

$$\sum_{k \in J} q_k (\mathbb{E} \mu_0^J - \mathbb{E} \mu_0^J(k)) < \sum_{k \in J} q_k^2 + \sum_{i=1}^n (b_i^J)^2. \quad (16)$$

Из (12), (13) и (16) следует (3).

Рассмотрим теперь общий случай. Введем обозначение

$$K(J) = \left\{ k \in J: \max_i p_{ik} < 1 \right\}.$$

Для множества $K(J)$ условие (6) уже выполнено. По доказанному выше получаем неравенство (3) для величины $\mu_0^{K(J)}$. Теперь осталось заметить, что $\mu_0^{K(J)} = \mu_0^J$, а выражение в правой части неравенства (3) не уменьшится, если в нем множество $K(J)$ заменить множеством J . Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть μ_0 — число ячеек в определенной выше неоднородной схеме размещения, $\lambda = E\mu_0$ и $d(\lambda)$ — расстояние по вариации между распределением случайной величины μ_0 и пуассоновским распределением с параметром λ . Пусть b_i — вероятность события, состоящего в том, что i -я частица распределилась отдельно от остальных частиц (т.е. в предшествующих обозначениях $b_i = b_i^{\{1, \dots, N\}}$). Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1.3. *Выполняется неравенство*

$$d(\lambda) < \min \left\{ 1, \frac{1}{\lambda} \right\} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 + \sum_{k=1}^N q_k^2 \right).$$

Получение оценок для общего числа пустых ячеек в неоднородной полиномиальной схеме и было первоначальной целью проведенного исследования. Однако оказалось, что доказательство утверждений типа следствия 1.3 проводится относительно просто лишь при дополнительном ограничении $\max_{i,k} p_{ik} < 1$. Чтобы отбросить это чисто техническое условие, приходится проводить рассуждения в несколько более общей постановке теоремы 1, которая, впрочем, представляет не меньший интерес.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Обратимся сначала к формуле (1). Как нетрудно убедиться, при $k \in J$

$$q_k = \prod_{i=1}^n (1 - p_{ik}) < \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n p_{ik} \right\} \leq e^{-\alpha(J)}.$$

Поэтому, используя первое из равенств (4), получаем

$$\sum_{k \in J} q_k^2 < e^{-\alpha(J)} E\mu_0^J = e^{-\alpha(J)} \lambda^J. \quad (17)$$

Теперь оценим другое слагаемое в правой части неравенства (3). Используя формулу (2), получаем

$$\sum_{i=1}^n (b_i^J)^2 = \sum_{k \in J} A_{ik} \prod_{i=1}^n (1 - p_{ik}), \quad (18)$$

где

$$A_{ik} = \sum_{s \in J} \prod_{t=1}^n (1 - p_{ts}) \sum_{i=1}^n \frac{p_{ik} p_{is}}{(1 - p_{ik})(1 - p_{is})}.$$

Воспользуемся неравенствами (5) и (6) для оценивания величины A_{ik} сверху:

$$\begin{aligned} A_{ik} &\leq \frac{1}{(1-p)^2} \sum_{s \in J} \prod_{t=1}^n (1 - p_{ts}) \sum_{i=1}^n p_{ik} p_{is} \\ &\leq \frac{1}{(1-p)^2} \sum_{i=1}^n \left(p_{ik} \sum_{s \in J} p_{is} \right) \max_s \prod_{t=1}^n (1 - p_{ts}) \end{aligned}$$

$$< \frac{1}{(1-p)^2} \sum_{i=1}^n p_{ik} \exp \left\{ - \min_s \sum_{i=1}^n p_{is} \right\} \leq \frac{C\alpha(J)}{(1-p)^2} e^{-\alpha(J)}. \quad (19)$$

Подставим оценки (17)–(19) в (3):

$$d(J, \lambda^J) < \min\{\lambda^J, 1\} e^{-\alpha(J)} \left\{ \frac{C\alpha(J)}{(1-p)^2} + 1 \right\}. \quad (20)$$

Из этого неравенства следует равенство (8). Теорема 2 доказана.

Автор признателен А. М. Зубкову за интерес к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976.
2. Михайлов В. Г. Об асимптотической нормальности симметрических разделимых статистик в неоднородной схеме. — Дискретн. матем., 1989, т. 1, в. 2, с. 15–27.
3. Дьяконова Е. Е., Михайлов В. Г. О достаточных условиях асимптотической нормальности разделимых статистик в неоднородной схеме размещения. — Дискретн. матем., 1991, т. 3, в. 1, с. 145–151.
4. Barbour A. D., Holst L., Janson S. Poisson Approximation. Oxford: Oxford Univ. Press, 1992.
5. Janson S. Coupling and Poisson approximation. — Acta Appl. Math., 1994, v. 34, Nos. 1&2, p. 5–15.

Поступила в редакцию

1.II.1996

© 1997 г.

ПИСАНЕЦ С. И.*

О СУЩЕСТВОВАНИИ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДИФфуЗИОННОГО ТИПА В $\mathbf{R}^m$

В данной работе доказано существование сильных решений стохастических уравнений диффузионного типа с непрерывными коэффициентами.

Ключевые слова и фразы: базовое вероятностное пространство, стохастическое дифференциальное уравнение, сильное решение, существование, представление сильного решения, единственность.

Пусть $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_T^0, P\}$ — вероятностное пространство, $\mathbf{R}^m$ — конечномерное евклидово пространство размерности m . Рассмотрим в $\mathbf{R}^m$ стохастическое уравнение диффузионного типа с непрерывными коэффициентами:

$$d\xi_t = \alpha_t(\xi) dt + B_t(\xi) dw_t, \quad \xi_0 = x_0, \quad x_0 \in \mathbf{R}^m, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где функции $\alpha_t(x)$, $B_t(x)$ определены на произведении пространств $[0, T] \times C_{[0, T]}(\mathbf{R}^m)$, непрерывны по совокупности переменных, при каждом $t \leq T$ измеримы относительно

*Институт математики НАНУ, отдел теории случайных процессов, Терещенковская 3, Киев-4, Украина.