Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Писанец, О существовании сильных решений стохастических уравнений диффузионного типа в $\mathbb{R}^m$, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 1, 189–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1721>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 14:44:01

$$< \frac{1}{(1-p)^2} \sum_{i=1}^n p_{ik} \exp \left\{ - \min_s \sum_{i=1}^n p_{is} \right\} \leq \frac{C\alpha(J)}{(1-p)^2} e^{-\alpha(J)}. \quad (19)$$

Подставим оценки (17)–(19) в (3):

$$d(J, \lambda^J) < \min\{\lambda^J, 1\} e^{-\alpha(J)} \left\{ \frac{C\alpha(J)}{(1-p)^2} + 1 \right\}. \quad (20)$$

Из этого неравенства следует равенство (8). Теорема 2 доказана.

Автор признателен А. М. Зубкову за интерес к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. М.: Наука, 1976.
2. Михайлов В. Г. Об асимптотической нормальности симметрических разделимых статистик в неоднородной схеме. — Дискретн. матем., 1989, т. 1, в. 2, с. 15–27.
3. Дьяконова Е. Е., Михайлов В. Г. О достаточных условиях асимптотической нормальности разделимых статистик в неоднородной схеме размещения. — Дискретн. матем., 1991, т. 3, в. 1, с. 145–151.
4. Barbour A. D., Holst L., Janson S. Poisson Approximation. Oxford: Oxford Univ. Press, 1992.
5. Janson S. Coupling and Poisson approximation. — Acta Appl. Math., 1994, v. 34, Nos. 1&2, p. 5–15.

Поступила в редакцию

1.II.1996

© 1997 г.

ПИСАНЕЦ С. И.*

О СУЩЕСТВОВАНИИ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДИФфуЗИОННОГО ТИПА В $\mathbf{R}^m$

В данной работе доказано существование сильных решений стохастических уравнений диффузионного типа с непрерывными коэффициентами.

Ключевые слова и фразы: базовое вероятностное пространство, стохастическое дифференциальное уравнение, сильное решение, существование, представление сильного решения, единственность.

Пусть $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_T^0, P\}$ — вероятностное пространство, $\mathbf{R}^m$ — конечномерное евклидово пространство размерности m . Рассмотрим в $\mathbf{R}^m$ стохастическое уравнение диффузионного типа с непрерывными коэффициентами:

$$d\xi_t = \alpha_t(\xi) dt + B_t(\xi) dw_t, \quad \xi_0 = x_0, \quad x_0 \in \mathbf{R}^m, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где функции $\alpha_t(x)$, $B_t(x)$ определены на произведении пространств $[0, T] \times C_{[0, T]}(\mathbf{R}^m)$, непрерывны по совокупности переменных, при каждом $t \leq T$ измеримы относительно

*Институт математики НАНУ, отдел теории случайных процессов, Терещенковская 3, Киев-4, Украина.

σ -алгебры B_t цилиндрических множеств в $C_{[0,T]}(\mathbb{R}^m)$ над $[0, t]$, $t \leq T$, принимают значения в $\mathbb{R}^m$ и $L_1(\mathbb{R}^m)$, соответственно, w_t , $t \leq T$, есть стандартный винеровский процесс в $\mathbb{R}^m$.

В заметке доказываются теоремы о существовании сильного решения уравнения (1). С историей вопроса можно ознакомиться в работах [1]–[16]. Наиболее общие условия существования и единственности сильного решения уравнения (1) получены в [4], [2].

Теорема 1. Пусть на коэффициенты стохастического уравнения (1) наложены ограничения на рост:

$$|\alpha(x)|_t + \|B(x)\|_t \leq K [1 + |x|_t], \quad K > 0, \quad (2)$$

коэффициент диффузии $B_t(x)$ равномерно по t удовлетворяет условию

$$\|B(x) - B(y)\|_t \leq K |x - y|_t, \quad x, y \in C_{0,T}(\mathbb{R}^m), \\ t \in [0, T], \quad x_0 \in \mathbb{R}^m, \quad (3)$$

оператор $B_t(x)$ обратим для всех $t \in [0, T]$,

$$x \in C_{[0,T]}(\mathbb{R}^m), \quad \sup_{t,x} \|B_t^{-1}(x)\| \leq K, \quad (4)$$

$$\begin{cases} \mathcal{F}_t^{q^{-1}} = \mathcal{F}_t^w, & t \leq T, \\ \eta_t = x_0 + \int_0^t B_s(\eta) dw_s & (\text{P-н.н.}), \quad t \leq T, \\ q_t^{-1}(\eta) = - \int_0^t B_s^{-1}(\eta) \alpha_s(\eta) ds + \int_0^t B_s^{-1}(\eta) d\eta_s & (\text{P-н.н.}), \quad t \leq T, \\ \mu_{q^{-1}} \sim \mu_w^1. \end{cases} \quad (5)$$

Тогда существует решение уравнения (1), при каждом $t \leq T$ измеримое относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_t^w$, $t \leq T$. Решение уравнения (1) единственно с точностью до стохастической эквивалентности.

З а м е ч а н и е 1. При $B_t(x) = I$, где I — тождественный оператор, утверждение теоремы 1 содержится в работе А. В. Скорохода [5].

При доказательстве теоремы 1 используется теорема 2.

Теорема 2. Пусть для коэффициентов стохастических уравнений

$$d\xi_t^{(n)} = \alpha_t^{(n)}(\xi^{(n)}) dt + B_t(\xi^{(n)}) dw_t, \\ \xi_0^{(n)} = x_0, \quad t \leq T, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

выполнены все условия теоремы 1 при каждом фиксированном $n = 1, 2, \dots$, с константой K , не зависящей от n . Предположим, что решения уравнений (6), $n = 1, \dots$, являются сильными и единственными, т.е. при каждом $n = 1, 2, \dots$ имеем $\mathcal{F}_t^\xi = \mathcal{F}_t^w$, $t \leq T$, где

$$\mathcal{F}_t^{\xi^{(n)}} = \sigma\{\xi_s^{(n)}, s \leq t\}, \quad \mathcal{F}_t^w = \sigma\{w_s, s \leq t\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть также выполняются соотношения

$$\mu_{\xi^{(n)}} \sim \mu_\eta, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_t^{(n)}(x) - \alpha_t^{(0)}(x)| = 0, \quad x \in C_{[0,T]}(\mathbb{R}^m), \quad t \in [0, T],$$

¹⁾ μ_w — мера на B_T , соответствующая процессу w_t .

где функция $\alpha_i^{(0)}(x)$ определена на произведении пространств $[0, T] \times C_{[0, T]}(\mathbb{R}^m)$, измерима по совокупности переменных, B_t -измерима при каждом $t \in [0, T]$, удовлетворяет условиям теоремы 1.

Тогда при каждом $t \in [0, T]$

$$P\text{-}\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| = 0. \quad (7)$$

Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что при каждом $t \leq T$ имеет место соотношение

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} M \left| \int_0^t \alpha_s^{(n)}(q^{(n)}) ds - \int_0^t \alpha_s^{(m)}(q^{(m)}) ds \right|^2 = 0. \quad (7')$$

В самом деле, если мы установили (7'), соотношение (7) будет следовать из (7') и липшицевости оператора диффузии.

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \left| \int_0^t \alpha_s^{(n)}(q^{(n)}) ds - M \left\{ \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta) ds \frac{d\mu_{q^{(0)}}}{d\mu_\eta} \left| \mathcal{F}_t^{q^{-1(0)}} \right\} \right|_{q^{-1(0)}=w} \frac{d\mu_{q^{-1(0)}}}{d\mu_w}(w) \right|^2 = 0,$$

где $q_i^{(n)}(x)$ — функционал, B_t -измеримый при каждом $t \leq T$, такой, что $\xi_i^{(n)} = q_i^{(n)}(w)$ (P-п.н.), $t \leq T$, $n = 1, 2, \dots$, $\xi_i^{(0)} = q_i^{(0)}(w)$, $t \leq T$.

Доказательство. Пусть $g_t(x)$ есть B_t -измеримый непрерывный ограниченный функционал со значениями в $\mathbb{R}^m$. Имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M \left(g_t(w), \int_0^t \alpha_s^{(n)}(q^{(n)}) ds \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} M g_t \left(q_{(\cdot)}^{-1(n)}(q^{(n)}(w)), \int_0^t \alpha_s^{(n)}(q^{(n)}) ds \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} M \left(g_t(q_{(\cdot)}^{-1(n)}(\eta)), \int_0^t \alpha_s^{(n)}(\eta) ds \right) \frac{d\mu_{q^{(n)}}}{d\mu_\eta}(\eta) \\ &= M \left(g_t(q_{(\cdot)}^{-1}(\eta)), M \left\{ \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta) ds \frac{d\mu_{q^{(0)}}}{d\mu_\eta} \left| \mathcal{F}_t^{q^{-1(0)}} \right\} \right) \right) \\ &= M \left(g_t(w), M \left\{ \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta) ds \frac{d\mu_{q^{(0)}}}{d\mu_\eta}(\eta) \left| \mathcal{F}_t^{q^{-1(0)}} \right| \right\}_{q_{(\cdot)}^{-1(0)}=w} \frac{d\mu_{q^{-1(0)}}}{d\mu_w}(w)^1 \right). \quad (8) \end{aligned}$$

Утверждение леммы 1 будет доказано, если мы покажем, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M \left| \int_0^t \alpha_s^{(n)}(q^{(n)}) ds \right|^2 \\ = M \left| M \left\{ \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta) ds \frac{d\mu_{q^{(0)}}}{d\mu_\eta} \left| \mathcal{F}_t^{q^{-1(0)}} \right\} \right|_{q_{(\cdot)}^{-1(0)}=w} \frac{d\mu_{q^{-1(0)}}}{d\mu_w}(w) \right|^2. \quad (9) \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M \left| \int_0^t \alpha_s^{(n)}(q^{(n)}) ds \right|^2 \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} M \left| \int_0^t \alpha_s^{(n)}(\eta) ds \right|^2 \frac{d\mu_{q^{(n)}}}{d\mu_\eta} = M \left| \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta) ds \right|^2 \frac{d\mu_{q^{(0)}}}{d\mu_\eta}. \quad (10) \end{aligned}$$

¹⁾ $q_i^{-1(n)} = - \int_0^t B_s^{-1}(\eta) \alpha_s^{(n)}(\eta) ds + w_i, \quad t \leq T, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Покажем, что правые части соотношений (9) и (10) равны. Для этого преобразуем правую часть (9). Получим:

$$\begin{aligned} & M \left| M \left\{ \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta) ds \frac{d\mu_{q^{(0)}}}{d\mu_\eta} \left| \mathcal{F}_t^{q^{-1(0)}} \right\} \right|_{q^{-1}=w} \frac{d\mu_{q^{-1(0)}}}{d\mu_w} \right|^2 \\ &= M \left| M \left\{ \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta) ds \frac{d\mu_{q^{(0)}}}{d\mu_\eta} \left| \mathcal{F}_t^{q^{-1(0)}} \right\} \right|_{q^{-1}=w} \right|^2 \frac{d\mu_{q^{-1(0)}}}{d\mu_w}(w) \\ &= M \left| M \left\{ \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta) ds \frac{d\mu_{q^{(0)}}}{d\mu_\eta} \left| \mathcal{F}_t^{q^{-1(0)}} \right\} \right|^2 \frac{d\mu_{q^{-1(0)}}}{d\mu_w}(q^{-1(0)}) \end{aligned} \quad (11)$$

в силу условия (5) теоремы 1 и свойств условных математических ожиданий. Поскольку $(d\mu_{q^{-1(0)}}/d\mu_\eta)(\eta) = [(d\mu_{q^{-1(0)}}/d\mu_w)(q^{-1(0)})]^{-1}$ (Р-п.н.) (см. условие (5) теоремы 1), правая часть (11) равна $M \left| \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta) ds \right|^2 (d\mu_{q^{(0)}}/d\mu_\eta)$, т.е. правые части соотношений (10) и (11) совпадают. Лемма 1 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2. Имеем:

левая часть соотношения (7')

$$\begin{aligned} &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 2M \left| \int_0^t \alpha_s^{(n)}(q^{(n)}) ds - M \left\{ \int_0^t \alpha_s^{(0)}(\eta) ds \frac{d\mu_{q^{(0)}}}{d\mu_\eta} \left| \mathcal{F}_t^{q^{-1(0)}} \right\} \right|_{q^{-1}=w} \frac{d\mu_{q^{-1(0)}}}{d\mu_w} \right|^2 \\ &\quad + \lim_{m \rightarrow \infty} 2M \left| M \left\{ \int_0^t \alpha_s^{(n)}(\eta) ds \frac{d\mu_{q^{(0)}}}{d\mu_\eta}(\eta) \left| \mathcal{F}_t^{q^{-1(0)}} \right\} \right|_{q^{-1}=w} \frac{d\mu_{q^{-1(0)}}}{d\mu_w}(w) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \alpha_s^{(m)}(q^{(m)}) ds \right|^2 = 0, \quad t \leq T. \end{aligned} \quad (12)$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Используя результаты И. И. Гихмана и А. В. Скорохода [7, т. III, гл. III, § 2, с. 353], мы можем построить последовательность коэффициентов переноса $\alpha_t^{(n)}(x)$ и последовательность стохастических уравнений

$$\begin{aligned} d\xi_t^{(n)} &= \alpha_t^{(n)}(\xi^{(n)}) dt + B_t(\xi^{(n)}) dw_s, \\ \xi_0^{(n)} &= x_0, \quad t \leq T, \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

такие, что выполнены условия теоремы 2.

В силу полноты пространства L_2 и теоремы 2 существует такой случайный процесс $\xi_t^{(0)}$, $t \leq T$, что при каждом $t \in [0, T]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \left| \int_0^t \alpha_s^{(n)}(\xi^{(n)}) ds - \int_0^t \alpha_s(\xi) ds \right|^2 = 0, \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \left| \xi_t^{(n)} - \xi_t \right|^2 = 0, \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \left| \int_0^t B_s(\xi^{(n)}) dw_s - \int_0^t B_s(\xi) dw_s \right|^2 = 0. \quad (16)$$

Используя соотношения (13)–(15), мы можем осуществить предельный переход в (13). Получим:

$$d\xi_t = \alpha_t(\xi) dt + B_t(\xi) dw_t, \quad [\xi_0 = x_0]. \quad (17)$$

Из $\mathcal{F}_t^w$ -измеримости при каждом t допредельных процессов и соотношений (14)–(16) будет следовать, что процесс ξ_t является $\mathcal{F}_t^w$ -измеримым при каждом $t \in [0, T]$, из

непрерывности функций $\alpha_t(x)$, $B_t(x)$ по t будет следовать, что процесс ξ_t непрерывен с вероятностью 1. Таким образом, существование непрерывного сильного решения уравнения (1) установлено. Докажем единственность. Из сильной сходимости процесса $\xi_t^{(n)}$ к ξ_t при $n \rightarrow \infty$ при каждом $t \leq T$, сходимости плотностей $d\mu_{q^{(n)}}/d\mu_\eta$ к $d\mu_{q^{(0)}}/d\mu_\eta$ по вероятности при $n \rightarrow \infty$, равномерной интегрируемости $\{d\mu_{q^{(n)}}/d\mu_\eta, n = 1, 2, \dots\}$ (см. [10]) будет следовать абсолютная непрерывность $\mu_{\xi^{(0)}}$ относительно μ_η (см. [7, т. I]). Но тогда единственность решения уравнения (1) будет следовать из леммы Гирсанова (см. [7, т. III, лемма 3, с. 358] и [7, т. III, теорема 5, с. 360]), условия которой выполнены. Теорема 1 доказана.

Нетрудно заметить, что существенную роль при доказательстве теоремы существования сильного решения играет условие совпадения σ -алгебр $\mathcal{F}_t^w, \mathcal{F}_t^\eta, \mathcal{F}_t^{q^{-1}}$ при каждом $t \in [0, T]$, см. (5). Оказывается, что это условие является необходимым.

Теорема 3. Пусть для стохастического уравнения (1) выполнены условия (2)–(5) и условия теоремы Гирсанова [12].

Для того чтобы при любом фиксированном винеровском процессе $\{w(t), P'\}$ стохастическое уравнение (1) имело единственное сильное решение, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{F}_t^w = \mathcal{F}_t^\eta = \mathcal{F}_t^{q^{-1}}$ при каждом $t \leq T$, при этом P -п.н. решение уравнения (1) будет иметь вид

$$q_t^{(0)}(w) = x_0 + M \left\{ \left[\int_0^t \alpha_s(\eta) ds + \int_0^t B_s(\eta) dq_s^{-1}(\eta) \right] \times \frac{d\mu_{q^{(0)}}}{d\mu_\eta} \Big| \mathcal{F}_t^{q^{-1}} \right\} \Big|_{q^{-1}=w} \frac{d\mu_{q^{-1}}}{d\mu_w}, \quad t \leq T. \quad (18)$$

Доказательство. Поскольку выполнены условия теоремы 1, то достаточность можно считать установленной.

Докажем необходимость. Поскольку условия теоремы 3 гарантируют выполнение условий теоремы Гирсанова, процесс

$$w_t^* = w_t - \int_0^t B_s^{-1}(\eta) \alpha_s(\eta) ds, \quad t \leq T,$$

будет винеровским по отношению к мере P^* . Но тогда процесс $(\eta(t), P^*)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\eta_t = \alpha_t(\eta) dt + B_t(\eta) dw_t^*, \quad t \leq T, \quad \eta_0 = x_0, \quad (19)$$

и, поскольку он является единственным s -решением уравнения (19) с фиксированным винеровским процессом w_t^* , имеем

$$\mathcal{F}_t^\eta = \mathcal{F}_t^{w^*}, \quad t \leq T,$$

а так как $\mathcal{F}_t^\eta = \mathcal{F}_t^w$, то

$$\mathcal{F}_t^\eta = \mathcal{F}_t^{q^{-1}} = \mathcal{F}_t^w, \quad t \leq T,$$

и, таким образом, необходимость доказана.

Остается заметить, что представление (18) решения является следствием лемм 1 и 2.

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \left| \int_0^t B_s(q^{(n)}) dw_s - M \left\{ \int_0^t B_s(\eta) dq_s^{-1}(\eta) \frac{d\mu_q}{d\mu_\eta} \Big| \mathcal{F}_t^{q^{-1}} \right\} \Big|_{q^{-1}=w} \frac{d\mu_{q^{-1}}}{d\mu_w} \right|^2 = 0, \quad t \leq T.$$

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1. Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е 2. С точки зрения представления решений как функционалов от винеровского процесса, требование, чтобы уравнение (1) имело решение при любом винеровском процессе, нельзя считать ограничительным, так как для произвольных фиксированных винеровских процессов $w_i^{(1)}, w_i^{(2)}$ функционалы, фигурирующие в представлении сильных решений $\xi_i^{(1)} = q_i^{(1)}(w^{(1)}), \xi_i^{(2)} = q_i^{(2)}(w^{(2)}), t \leq T$, совпадают почти всюду по винеровской мере μ_w , т.е. $q_i^{(1)}(x) = q_i^{(2)}(x)$ (μ_w -п.н.), $t \leq T$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гизман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965, 656 с.
2. Гизман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982, 612 с.
3. Гизман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968, 354 с.
4. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.
5. Скороход А. В. Преобразования винеровского пространства, связанные с дифференциальными операторами с коэффициентами, зависящими от прошлого. — В кн.: Аналитические методы теории нелинейных колебаний. Т. 1. Киев: Наукова думка, 1984.
6. Скороход А. В. Асимптотические методы в теории стохастических уравнений. Киев: Наукова думка, 1989.
7. Гизман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. I; Т. II; Т. III. М.: Наука, 1971, 664 с.; 1973, 640 с.; 1975, 496 с.
8. Звонкин А. К., Крылов Н. В. О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений. — В кн.: Труды школы-семинара по теории случайных процессов (Друскининкай, 1974). Вильнюс, 1975, ч. 2, с. 9–88.
9. Цирельсон Б. С. Один пример стохастического уравнения, не имеющего сильного решения. — Теория вероятн. и ее примен., 1975, т. 20, в. 2, с. 427–430.
10. Гизман И. И., Скороход А. В. Управляемые случайные процессы. Киев: Наукова думка, 1977, 251 с.
11. Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов. Киев: Киевский гос. ун-т, 1961, 216 с.
12. Гирсанов И. В. О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры. — Теория вероятн. и ее примен., 1960, т. 5, в. 3, с. 314–330.
13. Гирсанов И. В. Пример неединственности решения стохастического уравнения К. Ито. — Теория вероятн. и ее примен., 1962, т. 7, в. 3, с. 336–342.
14. Гирсанов И. В. О стохастических интегральных уравнениях Ито. — Докл. АН СССР, 1961, т. 138, № 9, с. 18–21.
15. Barlow M. T. One-dimensional stochastic differential equations with no strong solutions. — J. London Math. Soc. (2), 1982, v. 26, № 2, p. 335–347.
16. Анулова С. В., Веретенников А. Ю., Крылов Н. В., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Стохастическое исчисление. — В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 45. М.: ВИНТИ, 1989.

Поступила в редакцию
24.IV.1995