Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Богачев, М. Рёкнер, С. В. Шапошников, Положительные плотности переходных вероятностей диффузионных процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2008, том 53, выпуск 2, 213–239

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1725>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 10:34:23

© 2008 г.

БОГАЧЁВ В. И.*, РЁКНЕР М.**

ШАПОШНИКОВ С. В.*

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ПЛОТНОСТИ ПЕРЕХОДНЫХ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ¹⁾

Для диффузионных процессов в $\mathbf{R}^d$ с локально неограниченными коэффициентами сноса получено достаточное условие строгой положительности переходных вероятностей. Для этого рассматриваются параболические уравнения вида $\mathcal{L}^*\mu = 0$ относительно мер на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ с оператором

$$\mathcal{L}u := \partial_t u + \partial_{x_i}(a^{ij}\partial_{x_j}u) + b^i\partial_{x_i}u.$$

Показано, что если коэффициент диффузии $A = (a^{ij})$ достаточно регулярен, а коэффициент сноса $b = (b^i)$ удовлетворяет условию $\exp(\kappa|b|^2) \in L^1_{\text{loc}}(\mu)$, причем мера μ неотрицательна, то μ обладает непрерывной плотностью $\varrho(x, t)$, которая строго положительна при $t > \tau$, если она не равна нулю тождественно при $t \leq \tau$. Получены применения к конечномерным проекциям стационарных распределений и переходных вероятностей бесконечномерных диффузий.

Ключевые слова и фразы: плотность переходной вероятности, стационарное распределение, параболическое уравнение, бесконечномерная диффузия.

1. Введение. В работе исследуются условия строгой положительности плотностей переходных вероятностей конечномерных диффузионных процессов с сингулярными коэффициентами сноса, а также строгой положительности и непрерывности плотностей конечномерных проекций стационарных распределений и переходных вероятностей бесконечномерных диффузий. Для этого мы рассматриваем уравнения вида

$$\mathcal{L}^*\mu = 0 \tag{1.1}$$

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия.

** Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, D-33501 Bielefeld, Germany; Department of Mathematics, Purdue University, 150 N. University Str., West Lafayette, IN 47907-2067, USA.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке проектов РФФИ 07-01-00536, 08-01-91205-ЯФ и 06-01-39003 ГФЕН, НШ 1758.2003.1, ARC Discovery Grant DP0663153, DFG 436 RUS 113/343/0(R) и SFB 701 при университете Билефельда.

относительно борелевских мер μ на $\mathbf{R}^d$ или на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$. Здесь $\mathcal{L}$ — эллиптический или параболический оператор второго порядка вида

$$\mathcal{L}u(x) := \partial_{x_i}(a^{ij}\partial_{x_j}u(x)) + b^i(x)\partial_{x_i}u(x) \quad (1.2)$$

или

$$\mathcal{L}u(x, t) := \partial_t u(x, t) + \partial_{x_i}(a^{ij}(x, t)\partial_{x_j}u(x, t)) + b^i(x, t)\partial_{x_i}u(x, t), \quad (1.3)$$

где ведется суммирование по повторяющимся индексам, а интерпретация нашего уравнения состоит в следующем.

Будем говорить, что борелевская мера μ на $\mathbf{R}^d$ удовлетворяет слабому эллиптическому уравнению (1.1), если функции a^{ij} входят в локальный соболевский класс $W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbf{R}^d)$, функции a^{ij} , $\partial_{x_i}a^{ij}$ и b^i борелевски измеримы и локально интегрируемы относительно $|\mu|$, причем для каждой функции $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ выполнено равенство

$$\int_{\mathbf{R}^d} [a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + \partial_{x_i}a^{ij}\partial_{x_j}u + b^i\partial_{x_i}u] d\mu = 0. \quad (1.4)$$

Аналогично, борелевская мера μ на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ удовлетворяет слабому параболическому уравнению (1.1), если для каждого отрезка $J \subset (0, 1)$ и каждого шара $U \subset \mathbf{R}^d$ функции a^{ij} принадлежат определяемому ниже классу $\mathbf{H}^{1,1}(U, J)$, функции a^{ij} , $\partial_{x_i}a^{ij}$ и b^i борелевски измеримы и локально интегрируемы относительно $|\mu|$, причем для каждой функции $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$ выполнено равенство

$$\int_{\mathbf{R}^d \times (0, 1)} [\partial_t u + a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + \partial_{x_i}a^{ij}\partial_{x_j}u + b^i\partial_{x_i}u] d\mu = 0. \quad (1.5)$$

Аналогичным образом уравнение (1.1) определяется для оператора $\mathcal{L}$ с дополнительным членом $\theta \cdot u$, где функция θ локально μ -интегрируема.

Всюду ниже предполагается, что $a^{ij} = a^{ji}$ и что матрицы $A(x, t) = (a^{ij}(x, t))$ положительны. Векторное поле $b = (b^1, \dots, b^d)$ называется коэффициентом сноса и A называется коэффициентом диффузии.

Таким уравнениям при весьма широких условиях удовлетворяют стационарные распределения и переходные вероятности диффузионных процессов. Если диффузионный процесс ξ_t в $\mathbf{R}^d$ задан стохастическим дифференциальным уравнением в форме Ито

$$d\xi_t = \sqrt{A(\xi_t, t)} dW_t + \frac{1}{2} b(\xi_t, t) dt,$$

где W_t — винеровский процесс в $\mathbf{R}^d$, то переходные вероятности $P(t, B) := \mathbf{P}\{\xi_t \in B\}$ процесса ξ_t (или $P(s, z; t, B) := \mathbf{P}\{\xi_t \in B \mid \xi_s = z\}$ с фиксированными $s \in \mathbf{R}^1$ и $z \in \mathbf{R}^d$) задают меру $\mu = P(t, dx) dt$

на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$, удовлетворяющую параболическому уравнению $L^*\mu = 0$ в смысле аналогичного (1.5) тождества, но с оператором L *недивергентного вида*

$$Lu(x, t) := \partial_t u(x, t) + a^{ij}(x, t) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(x, t) + b^i(x, t) \partial_{x_i} u(x, t), \quad (1.6)$$

а в случае, когда коэффициенты не зависят от времени и существует стационарное распределение μ , для этого распределения выполнено эллиптическое уравнение $L^*\mu = 0$ в смысле аналогичного (1.4) тождества также с оператором L *недивергентного вида*

$$Lu(x) := a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(x) + b^i(x) \partial_{x_i} u(x). \quad (1.7)$$

Уравнения с операторами дивергентного вида (1.2) и (1.3) возникают для стохастических уравнений в форме Стратоновича. Однако при наших условиях относительно a^{ij} *недивергентный оператор* L очевидным образом записывается в дивергентном виде (1.2) или (1.3) с новым сносом с компонентами $b^j - \partial_{x_i} a^{ij}$. Поэтому все результаты настоящей работы верны и для *недивергентных операторов* (1.6) и (1.7) и, тем самым, применимы к стохастическим уравнениям в форме Ито, если соответствующие условия на снос выполнены для указанным образом измененного сноса. Мы рассматриваем операторы дивергентного вида лишь по той причине, что это приводит к некоторым техническим удобствам с точки зрения параболических уравнений.

Хорошо известно, что в случае достаточно регулярных коэффициентов A и b и невырожденности A переходные вероятности и стационарные распределения обладают непрерывными строго положительными плотностями; строгая положительность обычно выводится из неравенства Харнака. В работе [1] было показано, что если коэффициенты b^i локально интегрируемы по Лебегу в достаточно высокой степени (больше d в эллиптическом случае и больше $d + 2$ в параболическом случае), а коэффициент диффузии A невырожден и достаточно регулярен, то μ допускает непрерывную строго положительную плотность. Однако имеются важные приложения, в которых интегрируемость b дана лишь относительно μ ; типичное приложение связано с конечномерными проекциями бесконечномерных диффузий, что обсуждается ниже. Другим типичным примером является мера μ с гладкой плотностью ϱ , которая удовлетворяет эллиптическому уравнению (1.1) с

$$A(x) = \text{Id} \quad \text{и} \quad b(x) = \frac{\nabla \varrho(x)}{\varrho(x)},$$

где $b(x) := 0$ при $\varrho(x) = 0$. Действительно, соответствующее интегральное соотношение принимает вид

$$\int_{\mathbf{R}^d} [\Delta u(x) \varrho(x) + (\nabla \varrho(x), \nabla u(x))] dx = 0,$$

что выполнено для всех $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ ввиду формулы интегрирования по частям. Если ϱ обращается в нуль (в некоторых точках или даже на некоторых множествах с непустой внутренностью), то поле $b = \nabla \varrho / \varrho$ может быть весьма сингулярным с точки зрения меры Лебега, хотя и локально интегрируемым относительно μ . В этом случае непрерывная плотность μ может обращаться в нуль даже при весьма высокой интегрируемости b относительно μ . Например, мера μ на вещественной прямой с плотностью ϱ такой, что $\varrho(x) = \exp(-x^{-2})$ при $x > 0$ и $\varrho(x) = 0$ при $x \leq 0$, удовлетворяет уравнению (1.1) с $A = 1$ и $b(x) = 2x^{-3}$. Здесь $b \in L^p(\mu)$ для всех $p \in [1, +\infty)$. Однако для эллиптического случая в работе [2] было показано, что μ -интегрируемость $\exp(\kappa|b|)$ при некотором $\kappa > 0$ дает строгую положительность плотности меры μ . Здесь мы докажем параболический аналог этого результата, утверждающий, что при разумных предположениях относительно коэффициента A локальная μ -интегрируемость $\exp(\kappa|b|^2)$ при некотором $\kappa > 0$ обеспечивает существование непрерывной плотности ϱ меры μ , для которой $\varrho(x, t) > 0$ при $t > \tau$, если $\varrho(x, t)$ не равняется нулю тождественно при $t \leq \tau$. Применительно к плотностям переходных вероятностей это дает строгую положительность при всех $t > 0$. В отличие от эллиптического случая, нельзя заменить $|b|^2$ на $|b|$, что демонстрируется с помощью следующего простого примера. Положим $d = 1$,

$$b(x, t) = -\varepsilon(t - a)^{-2} e^{\varepsilon x} + 2\varepsilon^{-1}(t - a)^{-1},$$

где $\varepsilon, a \in (0, 1)$, причем $\mathcal{L}f(x, t) = \partial_t f(x, t) + \partial_x^2 f(x, t) + b(x, t) \partial_x f(x, t)$. Тогда мера

$$\mu = \exp(-(t - a)^{-2} e^{\varepsilon x}) dx dt$$

удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}^* \mu = 0$ на $\mathbf{R}^1 \times (0, 1)$, но при $t = a$ ее непрерывная плотность равна нулю. Легко видеть, что функция $\exp(\kappa|b|)$ интегрируема относительно μ , если $\varepsilon < \kappa^{-1}$. В качестве приложения в последнем пункте мы получим достаточные условия на коэффициенты бесконечномерной диффузии ξ_t со сносом $b(x, t)$, гарантирующие, что конечномерные проекции стационарных распределений и переходных вероятностей обладают строго положительными плотностями. Например, если коэффициент диффузии процесса ξ_t в $\mathbf{R}^\infty$ постоянен и невырожден и $b = (b^i)$, то для существования строго положительных непрерывных плотностей всех конечномерных проекций переходных вероятностей $P_t(x, \cdot)$ достаточно, чтобы функции $\exp(\kappa|b^i|^2)$ были интегрируемы относительно меры $P_t(x, \cdot) dt$. Для диффузии в банаховом пространстве с коэффициентом диффузии Id и сносом b достаточно иметь оценку $\|b(x, t)\| \leq C + C\|x\|$.

Отметим, что в работах [3]–[6] можно найти верхние и нижние оценки плотностей решений. Вопросы существования решений уравне-

ний указанного типа рассмотрены в [7], [8], а проблемам единственности посвящены работы [9]–[11].

Для произвольной области $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ через $W^{p,1}(\Omega)$ обозначим пространство Соболева всех функций, принадлежащих $L^p(\Omega)$ вместе с их обобщенными частными производными первого порядка. Это пространство наделено стандартной нормой

$$\|f\|_{W^{p,1}(\Omega)} := \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)},$$

где $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ обозначает $L^p(\Omega)$ -норму скалярных или векторных функций. Замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^{p,1}(\Omega)$ обозначается символом $W_0^{p,1}(\Omega)$. Через $W_{\text{loc}}^{p,1}(\Omega)$ и $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ обозначим пространства функций, принадлежащих $W^{p,1}(B)$ и $L^p(B)$ соответственно для каждого шара B с замыканием в Ω .

Если μ — борелевская мера (возможно, знакопеременная) на области Ω в $\mathbf{R}^d$ или $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ и $|\mu|$ — ее вариация, то $L^p(\mu)$ будет обозначать пространство $L^p(|\mu|)$, а $L_{\text{loc}}^p(\mu)$ — множество таких функций f на Ω , что $\zeta f \in L^p(\mu)$ для всех $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$.

Пусть $J \subset \mathbf{R}^1$ — интервал и U — открытое множество в $\mathbf{R}^d$. Через $\mathbf{H}^{p,1}(U, J)$ обозначим пространство всех измеримых функций u на $U \times J$ таких, что $u(\cdot, t) \in W^{p,1}(U)$, причем конечна норма

$$\|u\|_{\mathbf{H}^{p,1}(U, J)} = \left(\int_J \|u(\cdot, t)\|_{W^{p,1}(U)}^p dt \right)^{1/p}.$$

Пространство $\mathbf{H}_0^{p,1}(U, J)$ определяется аналогично с заменой $W^{p,1}(U)$ на $W_0^{p,1}(U)$. Сопряженное к $\mathbf{H}_0^{p,1}(U, J)$ пространство обозначается $\mathbf{H}^{p',-1}(U, J)$, где $p' := p(p-1)^{-1}$. В связи с параболическими уравнениями полезно ввести также следующие пространства. Пусть $\mathcal{H}^{p,1}(U, J)$ — пространство всех функций $u \in \mathbf{H}^{p,1}(U, J)$, для которых $\partial_t u \in \mathbf{H}^{p,-1}(U, J)$ и конечна норма

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{p,1}(U, J)} = \|\partial_t u\|_{\mathbf{H}^{p,-1}(U, J)} + \|u\|_{\mathbf{H}^{p,1}(U, J)}.$$

Для функций u от (x, t) будем писать

$$\nabla u := \nabla_x u := (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_d} u).$$

Через $|\Omega|$ обозначается лебеговский объем множества Ω . Норму вектора v в $\mathbf{R}^d$ обозначаем через $|v|$.

Операторное отображение A на открытом множестве называется локально равномерно невырожденным, если отображение A^{-1} локально ограничено.

2. Существование плотностей. В этом пункте мы приведем модификации некоторых результатов из [1] о существовании непрерывных плотностей. Следующий результат — теорема 2.8 из работы [1] — был получен для уравнений с дифференциальным оператором в недивергентной форме и с $\beta_2 = 0$. Для удобства читателя укажем необходимые изменения в доказательстве.

Пусть B_R — открытый шар радиуса R в $\mathbf{R}^d$.

Теорема 2.1. Пусть $p > d$, $r \in (p', \infty)$ и μ — мера на B_R с плотностью $\varrho \in L^r_{\text{loc}}(B_R)$. Пусть $a^{ij} \in W^{p,1}_{\text{loc}}(B_R)$, $\beta_1 \in L^p_{\text{loc}}(B_R)$, $\beta_2 \in L^p_{\text{loc}}(\mu)$, причем A локально равномерно невырождено на B_R . Предположим также, что для всякого $\varphi \in C^\infty_0(B_R)$ мы имеем

$$\left| \int_{B_R} a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi d\mu \right| \leq \int_{B_R} (|\varphi| + |\nabla_x \varphi|)(|\beta_1 \varrho| + |\beta_2 \varrho|) dx.$$

Тогда $\varrho \in W^{p,1}_{\text{loc}}(B_R)$ и ϱ имеет локально гёльдерову версию.

Доказательство. Поскольку $r > p'$, мы имеем $pr > p + r$. Тогда

$$q = \frac{pr}{pr - p - r} > 1 \quad \text{и} \quad q' = \frac{pr}{p + r} > 1.$$

Согласно неравенству Гёльдера имеем $\beta_1 \varrho \in L^{q'}_{\text{loc}}(B_R)$. То же самое верно для $\beta_2 \mu$, поскольку

$$|\beta_2|^{q'} |\varrho|^{q'} = |\beta_2|^{pr/(p+r)} |\varrho|^{r/(p+r)} |\varrho|^{(pr-r)/(p+r)},$$

где $|\beta_2|^{pr/(p+r)} |\varrho|^{r/(p+r)} \in L^s_{\text{loc}}(B_R)$ и $|\varrho|^{(pr-r)/(p+r)} \in L^{s'}_{\text{loc}}(B_R)$, причем $s = (p + r)/r$. Значит, $|\beta_1 \varrho| + |\beta_2 \varrho| \in L^{q'}_{\text{loc}}(B_R)$. Теперь то же рассуждение, что и в теореме 2.8 работы [1], завершает доказательство.

Следствие 2.1. Пусть μ — локально конечная борелевская мера на B_R . Пусть A локально невырождено в B_R , причем $a^{ij} \in W^{p,1}_{\text{loc}}(B_R)$, где $p > d$ и выбраны непрерывные версии a^{ij} , $\partial_{x_i} a^{ij} \in L^p_{\text{loc}}(\mu)$, и пусть $b^i, c \in L^p_{\text{loc}}(\mu)$. Предположим, что

$$\int_{B_R} \left[(a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi + \partial_{x_i} a^{ij} \partial_{x_j} \varphi + b^i \partial_{x_i} \varphi + c \varphi) \right] d\mu = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty_0(B_R).$$

Тогда μ имеет плотность из $W^{p,1}_{\text{loc}}(B_R)$, которая локально гёльдерова.

Доказательство. Достаточно взять $\beta_1 = |\partial_{x_i} a^{ij}|$ и $\beta_2 = |b| + |c|$ и применить теорему 2.1.

Мы распространим эти результаты на параболический случай. Наша стратегия будет по существу такой же, как и в эллиптическом случае, но из-за некоторых дополнительных технических сложностей мы приведем полные доказательства.

Пусть $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$, и пусть $A(\cdot, \cdot) = (a^{ij}(\cdot, \cdot))_{i,j=1}^d$ — борелевское отображение на Ω_T со значениями в пространстве неотрицательных симметричных операторов в $\mathbf{R}^d$. Пусть $\omega_0 \in \Omega$ — фиксированная точка и $B_R \subset \Omega$ — шар радиуса R с центром ω_0 . Положим $B_{R,T} := B_R \times (0, T)$.

Мы будем предполагать, что функции $a^{ij}(x, t)$ непрерывны по x равномерно по t . Заметим, что a^{ij} имеет модификацию с таким свойством при условии, что

$$\sup_t \|a^{ij}(\cdot, t)\|_{W^{p,1}(B_R)} < \infty, \quad \text{где } p > d. \quad (2.1)$$

Следующий результат — теорема 3.7 из [1].

Теорема 2.2. Пусть $d \geq 2$, $p > d$, $q \in [p', +\infty)$. Пусть A равномерно ограничено и равномерно невырождено, и пусть выполнено (2.1). Предположим, что μ — конечная мера на $B_{R,T}$ такая, что при некотором $N > 0$ имеем

$$\left| \int [\partial_t \varphi + a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi] d\mu \right| \leq N \|\nabla_x \varphi\|_{L^q(B_{R,T})} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(B_{R,T}). \quad (2.2)$$

Тогда $\mu \in \mathbf{H}^{q',1}(B_{R'}, [t_0, t_1])$ и $\mu \in \mathcal{H}^{q',1}(B_{R'}, [t_0, t_1])$ при $R' < R$ и $[t_0, t_1] \subset (0, T)$.

Теперь мы докажем аналог теоремы 3.8 работы [1], отличающийся тем, что условие интегрируемости коэффициента β_2 (отсутствовавшего в цитированной теореме) выражено в терминах меры μ , а не меры Лебега.

Теорема 2.3. Пусть A — локально ограниченное и локально равномерно невырожденное отображение на $B_{R,T}$, и пусть выполнено (2.1), где мы предполагаем теперь, что $p > d + 2$. Пусть μ — конечная борелевская мера на $B_{R,T}$ с плотностью $\varrho \in L^r(B_{R,T})$ при некотором $r > p'$. Пусть $\beta_1 \in L_{\text{loc}}^p(B_{R,T})$ и $\beta_2 \in L_{\text{loc}}^p(\mu)$. Предположим, что для всех $\varphi \in C_0^\infty(B_{R,T})$ мы имеем

$$\left| \int_{B_{R,T}} [\partial_t \varphi + a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi] d\mu \right| \leq \int_{B_{R,T}} (|\varphi| + |\nabla_x \varphi|) (|\beta_1 \varrho| + |\beta_2 \varrho|) dx dt.$$

Тогда ϱ имеет версию, которая локально гёльдерова на $B_R \times (0, T)$ и принадлежит классам $\mathbf{H}^{p,1}(B_{R'}, [T_0, T_1])$ и $\mathcal{H}^{p,1}(B_{R'}, [T_0, T_1])$ для всякого $R' < R$ и всякого отрезка $[T_0, T_1] \subset (0, T)$.

Доказательство. Мы модифицируем доказательство теоремы 3.8 из [1]. Зафиксируем число $R' < R$ и отрезок $[T_0, T_1] \subset (0, T)$. Из неравенства Гёльдера с показателями p/θ и $p/(p - \theta)$, применяемого к произведению

$$|\beta_2|^\theta |\varrho|^\theta = |\beta_2|^\theta |\varrho|^{\theta/p} |\varrho|^{\theta - \theta/p},$$

вытекает, что $\beta_2 \varrho \in L_{\text{loc}}^\theta(B_{R,T})$, если $(p\theta - \theta)(p - \theta)^{-1} = r$, т.е. $\theta = pr(p + r - 1)^{-1}$. Положим $s := pr(p + r)^{-1}$. Тогда $\theta > s$ и потому $\beta_2 \varrho \in L_{\text{loc}}^s(B_{R,T})$. Кроме того, $|\beta_1 \varrho| \in L_{\text{loc}}^s(B_{R,T})$ также в силу неравенства Гёльдера и условий на β_1 и ϱ . При этом $q := s' > p'$. Значит, (2.2) выполнено при $q = s' > p'$. Это вытекает из неравенства Гёльдера с показателями q и $q' = s$ с учетом того факта, что для $\varphi \in C_0^\infty(B_{R,T})$ интеграл от $(|\varphi| + |\nabla \varphi|)^q$ по $B_{R,T}$ оценивается через $C \|\nabla_x \varphi\|_{L^q(B_{R,T})}^q$ с некоторым числом C , не зависящим от φ .

По теореме 2.2 получаем включения $\varrho \in \mathbf{H}^{s,1}(B_{R_1}, [t_0, t_1])$ и $\varrho \in \mathcal{H}^{s,1}(B_{R_1}, [t_0, t_1])$ для всякого отрезка $[t_0, t_1] \subset (0, T)$ и всякого $R_1 < R$. В частности, можно взять любые $t_0 \in (0, T_0)$, $t_1 \in (T_1, T)$, $R_1 \in (R', R)$.

Напомним теорему вложения для пространств $\mathcal{H}^{p,1}(\mathbf{R}^d, [0, T])$. Доказательство можно найти, например, в [12, следствие 7.6] или [13, теорема 7.2] (где ограничение $p > 2$ нужно только в случае стохастических соболевских пространств). Пусть $q > p > 1$ и $(d + 2)(1/p - 1/q) < 1$. Тогда существует число $N(d, p, q, T)$ такое, что для всякого $u \in \mathcal{H}^{p,1}(\mathbf{R}^d, [0, T])$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{L^q(\mathbf{R}^d \times [0, T])} \leq N(d, p, q, T) \|u\|_{\mathcal{H}^{p,1}(\mathbf{R}^d, [0, T])}. \quad (2.3)$$

Нетрудно проверить, что то же самое верно для шара вместо $\mathbf{R}^d$. Согласно (2.3), мы получаем, что $\varrho \in L^{r_1}(B_{R_1} \times [t_0, t_1])$ для всякого r_1 такого, что

$$\frac{1}{r_1} > \frac{1}{s} - \frac{1}{d + 2}.$$

Это эквивалентно соотношению

$$\frac{1}{r_1} > \frac{p + r}{pr} - \frac{1}{d + 2} = \frac{(d + 2)(p + r) - pr}{pr(d + 2)},$$

которое может быть записано как

$$r_1 < r \frac{p(d + 2)}{(d + 2)(p + r) - pr},$$

при условии, что $(d + 2)(p + r) - pr > 0$; если $(d + 2)(p + r) - pr \leq 0$, то в качестве r_1 можно взять любое число, большее единицы.

Можно выбрать r_1 достаточно близким к $r p(d + 2)((d + 2)(p + r) - pr)^{-1}$ таким образом, что

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{r} &= \frac{p(d + 2)}{(d + 2)(p + r) - pr} = \frac{p}{p + r - pr/(d + 2)} \\ &= \frac{p}{p - r(p/(d + 2) - 1)} \geq \frac{p}{p - p/(d + 2) + 1} > 1. \end{aligned}$$

Следовательно, повторяя описанную выше процедуру конечное число раз, мы приходим к ситуации с $(d+2)(p+r) - pr \leq 0$, когда

$$\rho \in L^r(B_{R_0} \times [\tau_0, \tau_1]) \quad \text{для всех } r \in (1, +\infty),$$

где $0 < \tau_0 < T_0, \quad T_1 < \tau_1 < T, \quad R' < R_0 < R$.

Значит, $\rho \in \mathbf{H}^{s,1}(B_{R_0}, [\tau_0, \tau_1])$ и $\rho \in \mathcal{H}^{s,1}(B_{R_0}, [\tau_0, \tau_1])$ для каждого $s < p$. Выберем $s > d+2$, $\alpha > 0$ и $\kappa > 0$ так, что $\kappa > \alpha > 1/s$ и $s(1-2\kappa) > d$, что возможно, поскольку $p > d+2$. Тогда, как вытекает из [12, теорема 7.2] и теоремы вложения Соболева, при некотором $\gamma > 0$ функция ρ имеет версию из класса $C^{\alpha-1/s}([\tau_0, \tau_1], C^\gamma(B_{R_0}))$, состоящего из гёльдеровых порядка $\alpha - 1/s$ отображений отрезка $[\tau_0, \tau_1]$ в пространство $C^\gamma(B_{R_0})$ функций на B_{R_0} , удовлетворяющих условию Гёльдера порядка γ . Итак, функция ρ имеет гёльдерову версию.

Следствие 2.2. Пусть $p > d+2$, и пусть A локально равномерно ограничено и локально равномерно невырождено на Ω_T , причем выполнено (2.1) с некоторым числом $p > d+2$ для каждого шара B_R с компактным замыканием в Ω . Предположим, что μ — локально конечная знакопеременная борелевская мера на Ω_T такая, что $b^i, c \in L_{\text{loc}}^p(\mu)$ и

$$\int_{\Omega_T} [\partial_t \varphi + a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \varphi + \partial_{x_i} a^{ij} \partial_{x_j} \varphi + b^i \partial_{x_i} \varphi + c \varphi] d\mu = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_T).$$

Тогда μ имеет локально гёльдерову плотность, принадлежащую пространствам $\mathbf{H}^{p,1}(U, J)$ и $\mathcal{H}^{p,1}(U, J)$ для всякого интервала J и всякого открытого множества U , для которых $U \times J$ имеет компактное замыкание в Ω_T .

Доказательство. Согласно [1, следствие 3.2], мера μ имеет плотность из $L_{\text{loc}}^r(\Omega_T)$ при всяком $r < (d+2)'$, в частности, при некотором $r > p'$. Значит, применима теорема 2.3 с $\beta_1 = |\partial_{x_i} a^{ij}|$ и $\beta_2 = |b| + |c|$.

3. Строгая положительность плотностей. Предыдущие результаты дают существование и соболевскую регулярность плотностей решений слабых эллиптических и параболических уравнений. Следующие теоремы дают достаточные условия строгой положительности плотностей решений. Далее мы рассматриваем только неотрицательные меры. Для начала напомним похожий результат в эллиптическом случае. Он был получен в [2].

Теорема 3.1. Пусть μ — ненулевая локально конечная неотрицательная борелевская мера на $\mathbf{R}^d$. Пусть A — локально равномерно невырожденное отображение с $a^{ij} \in W_{\text{loc}}^{p,1}(\mathbf{R}^d)$, где $p > d$, и пусть для каждого компакта K существует число $\kappa = \kappa(K) > 0$ такое, что функция $\exp(\kappa|b|)$ интегрируема относительно μ на K . Предположим, что $\Theta \in L_{\text{loc}}^p(\mu)$ и что существует такая измеримая функция $\Psi \geq 0$,

что $\Theta \geq -\Psi$ и $\exp(\Psi) \in L^1_{\text{loc}}(\mu)$. Предположим также, что μ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}^*\mu = 0$ на $\mathbf{R}^d$, где

$$\mathcal{L}u(x) := \partial_{x_i}(a^{ij}(x) \partial_{x_j} u(x)) + b^i(x) \partial_{x_i} u(x) + \Theta(x) u(x).$$

Тогда мера μ имеет непрерывную строго положительную плотность ϱ .

Заметим, что существование непрерывной плотности немедленно вытекает из следствия 2.1.

З а м е ч а н и е 3.1. Пусть известно, что ненулевая неотрицательная мера μ имеет локально ограниченную плотность $\varrho \in W^{2,1}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^d)$. Вместо уравнения (1.1) можно рассматривать неравенство $\mathcal{L}^*\mu \leq 0$, где

$$\mathcal{L}u(x) := \partial_{x_i}(a^{ij}(x) \partial_{x_j} u(x)) + b^i(x) \partial_{x_i} u(x) - \Psi(x) u(x).$$

Неравенство понимается следующим образом:

$$\int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{L}\varphi(x) d\mu \leq 0$$

для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ такой, что $\varphi \geq 0$. Предположим, что A локально равномерно невырождено, причем $a^{ij} \in W^{p,1}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^d)$, где $p > d$, $\Psi \geq 0$ и $\exp(\Psi) \in L^1_{\text{loc}}(\mu)$. Пусть b удовлетворяет тому же условию локальной экспоненциальной интегрируемости, что и в теореме. Тогда ϱ имеет версию, локально отделенную от нуля.

Рассмотрим параболический случай. Пусть μ — неотрицательная локально конечная борелевская мера на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$, удовлетворяющая уравнению (1.1).

Будем предполагать, что отображение $A(x, t) = (a^{ij}(x, t))_{1 \leq i, j \leq d}$ со значениями в пространстве положительных симметричных матриц и векторное поле $b(x, t) = (b^i(x, t))_{1 \leq i \leq d}$ удовлетворяют следующим условиям:

(C1) при некотором $p > d + 2$ функции a^{ij} входят в $\mathbf{H}^{p,1}(U, J)$ для всякого шара U и всякого интервала J с компактным замыканием в $(0, 1)$;

(C2) для всякого компакта $K \subset \mathbf{R}^d \times (0, 1)$ существуют числа $m(K), M(K) > 0$ такие, что для всех $(x, t) \in K$ и всех $y \in \mathbf{R}^d$ имеем

$$m(K)|y|^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq d} a^{ij}(x, t) y_i y_j \leq M(K)|y|^2;$$

(C3) для всякого компакта $K \subset \mathbf{R}^d \times (0, 1)$ существует такое число $\kappa(K) > 0$, что функция $\exp(\kappa(K)|b|^2)$ интегрируема относительно меры μ на K .

Пусть $K(r) = K(x, r)$ обозначает куб с длиной ребра r и центром x , у которого ребра параллельны координатным осям. Сначала мы получим априорные оценки.

При $q \in (-\infty, 1]$ и $s > 0$ положим

$$h_q(s) := -\frac{1}{s|\ln s|^{2q-1}}.$$

Тогда $h_q(s) = H'_q(s)$, где $H_q(s) := (2-2q)^{-1}|\ln s|^{2-2q}$ при $q < 1$ и $H_1(s) := \ln|\ln s|$.

Лемма 3.1. Для всякого $\tau \in (0, e^{-2})$ имеем

- (i) $h_q^2(\tau)/h'_q(\tau) \leq |\ln \tau|^{2-2q}$,
- (ii) $\tau^2 h'_q(\tau) |\ln h'_q(\tau)| \leq 9(1+|q|)^2 |\ln \tau|^{2-2q}$.

Доказательство. В силу равенства $h'_q(s) = (|\ln s| + 1 - 2q)s^{-2}|\ln s|^{-2q}$ мы имеем

$$\frac{h_q^2(\tau)}{h'_q(\tau)} = \frac{\tau^2 |\ln \tau|^{2q}}{\tau^2 |\ln \tau|^{4q-2} (|\ln \tau| - 2q + 1)} = \frac{|\ln \tau|^{2-2q}}{|\ln \tau| - 2q + 1}.$$

Заметим, что если $\tau \in (0, e^{-2})$ и $q \leq 1$, то $|\ln \tau| - 2q + 1 \geq 1$. Это дает (i). Проверим неравенство (ii). Мы имеем

$$\begin{aligned} \tau^2 h'_q(\tau) |\ln h'_q(\tau)| &\leq \tau^2 (|\ln \tau| - 2q + 1)(2|\ln \tau| + 2|q| \ln |\ln \tau| \\ &\quad + \ln ||\ln \tau| + 2q - 1|) (\tau^2 |\ln \tau|^{2q})^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому получаем $\tau^2 h'_q(\tau) |\ln h'_q(\tau)| \leq 9(1+|q|)^2 |\ln \tau|^{2-2q}$, что завершает доказательство.

Пусть Ω — произвольная область в $\mathbf{R}^d$, и пусть $[T_0, T_1] \subset (0, 1)$. Согласно следствию 2.2, мера μ имеет плотность $\varrho \in L^\infty(\Omega \times [T_0, T_1])$. Умножив ϱ на $(2\|\varrho\|_{L^\infty})^{-1}e^{-2}$, будем считать, что

$$\|\varrho\|_{L^\infty} \leq 2^{-1}e^{-2}.$$

Положим $\varrho_k := \varrho + k^{-1}$, где $k > 2e^2$. Заметим, что $k^{-1} \leq \varrho_k \leq e^{-2}$.

Лемма 3.2. Пусть $\eta \in C_0^1(\Omega \times [T_0, T_1])$, $T_0 < \tau_1 < \tau_2 < T_1$ и $0 < \gamma < \kappa$, где $\kappa = \kappa(\Omega \times [T_0, T_1])$ — число из условия (СЗ). Тогда выполнены следующие оценки.

Если $q = 1$ и $\eta(t, x) = \eta_0(x)$ при $t \in [\tau_1, \tau_2]$, то

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left[\ln(|\ln \varrho_k(x, \tau_2)|) \eta_0^2(x) - \ln(|\ln \varrho_k(x, \tau_1)|) \eta_0^2(x) \right] dx \\ &\quad + \frac{m}{3} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} |\nabla \ln |\ln \varrho_k||^2 \eta_0^2 dx dt \\ &\leq C \left[(1 + \gamma^{-1}) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} (\eta_0^2 + |\nabla \eta_0|^2) dx dt \right. \\ &\quad \left. + \gamma^{-1} \|\varrho\|_{L^\infty} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} e^{\gamma|b|^2} \varrho \eta_0^2 dx dt \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Если $q < 1$, то

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2-2q} \int_{\Omega} [|\ln \varrho_k(x, \tau_2)|^{2-2q} \eta^2(x, \tau_2) - |\ln \varrho_k(x, \tau_1)|^{2-2q} \eta^2(x, \tau_1)] dx \\
 & + \frac{m}{3(1-q)^2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} |\nabla |\ln \varrho_k||^{1-q} |\eta|^2 dx dt \\
 & \leq 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} |\eta| |\eta_t| |\ln \varrho_k|^{2-2q} dx dt \\
 & + C \left[(1 + \gamma^{-1})(1 + |q|)^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} (\eta^2 + |\nabla \eta|^2) |\ln \varrho_k|^{2-2q} dx dt \right. \\
 & \quad \left. + \gamma^{-1} \|\varrho\|_{L^\infty} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} e^{\gamma|b|^2} \varrho \eta^2 dx dt \right]. \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

В этих оценках $m = m(\Omega \times [T_0, T_1])$ — число из условия (C2) и C — число, зависящее только от d , $m(\Omega \times [T_0, T_1])$ и $M(\Omega \times [T_0, T_1])$.

Доказательство. Для каждой функции $\varphi \in \mathbf{H}_0^{2,1}(\Omega, (0, 1))$ имеет место следующее тождество:

$$\int_0^1 \int_{\Omega} [-\partial_t \varphi \varrho + (A \nabla \varrho, \nabla \varphi)] dx dt = \int_0^1 \int_B (b, \nabla \varphi) \varrho dx dt. \quad (3.3)$$

Пусть $\omega_r(s) := r^{-1} \omega(sr^{-1})$, где $0 \leq \omega \leq 1$, $\omega \in C_0^1(\mathbf{R}^1)$, $\text{supp } \omega \subset [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ и

$$\int_0^1 \omega(s) ds = 1.$$

Положим также

$$\varrho_r(x, t) := \int_0^1 \omega_r(t-s) \varrho(x, s) ds, \quad t > r.$$

Тогда функция ϱ_r непрерывно дифференцируема по t . Согласно (3.3), функция ϱ_r удовлетворяет интегральному равенству

$$\int_0^1 \int_{\Omega} [\psi \partial_t \varrho_r + ((A \nabla \varrho) * \omega_r, \nabla \psi)] dx dt = \int_0^1 \int_{\Omega} ((b \varrho) * \omega_r, \nabla \psi) dx dt \quad (3.4)$$

для каждой функции $\psi \in \mathbf{H}_0^{2,1}(\Omega, (0, 1))$ такой, что $\psi(x, t) = 0$ при $t \in (0, r]$. Заметим, что свертка $(b \varrho) * \omega_r$ корректно определена, поскольку по теореме Фубини $b(x, \cdot) \varrho(x, \cdot) \in L^1[\delta, 1-\delta]$ при почти всех x и всех $\delta > 0$.

Пусть $k > 0$ фиксировано и $\alpha_0 > 0$ выбрано так, что $[T_0, T_1] \subset [\alpha_0, 1 - \alpha_0]$ и $\eta(x, t) = 0$ при $t \notin [\alpha_0, 1 - \alpha_0]$. Далее рассматриваем $r < \alpha_0$. Положим

$$\varrho_{r,k} := \varrho_r + k^{-1}, \quad \psi := I_{[\tau_1, \tau_2]} h_q(\varrho_{r,k}) \eta^2,$$

где $I_{[\tau_1, \tau_2]}$ обозначает индикатор отрезка $[\tau_1, \tau_2]$. Подставляя такую функцию ψ в (3.4) и используя формулу Ньютона–Лейбница, находим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[H_q(\varrho_{r,k}(x, \tau_2)) \eta^2(x, \tau_2) - H_q(\varrho_{r,k}(x, \tau_1)) \eta^2(x, \tau_1) \right] dx \\ & \quad + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} ((A \nabla \varrho) * \omega_r, \nabla \varrho_{r,k}) h'_q(\varrho_{r,k}) \eta^2 dx dt \\ & = I(r, k) + J(r, k) + L(r, k) + N(r, k), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I(r, k) &= -2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} ((A \nabla \varrho) * \omega_r, \nabla \eta) h_q(\varrho_{r,k}) \eta dx dt, \\ J(r, k) &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} ((b \varrho) * \omega_r, \nabla \varrho_{r,k}) h'_q(\varrho_{r,k}) \eta^2 dx dt, \\ L(r, k) &= 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} ((b \varrho) * \omega_r, \nabla \eta) h_q(\varrho_{r,k}) \eta dx dt, \\ N(r, k) &= 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} H_q(\varrho_{r,k}) \eta \partial_t \eta dx dt. \end{aligned}$$

Функция $|H(\varrho_{r,k})|$ на носителе функции η оценивается некоторым числом равномерно по всем $r \leq \alpha_0$. Следовательно, согласно теореме Лебега о мажорируемой сходимости, при $r \rightarrow 0$ мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} H_q(\varrho_{r,k}(x, \tau_i)) \eta^2(x, \tau_i) dx &\longrightarrow \int_{\Omega} H_q(\varrho_k(x, \tau_i)) \eta^2(x, \tau_i) dx, \quad i = 1, 2, \\ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} H_q(\varrho_{r,k}) \eta \partial_t \eta dx dt &\longrightarrow \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} H_q(\varrho_k) \eta \partial_t \eta dx dt. \end{aligned}$$

Заметим, что $|h'_q(\varrho_{r,k})| \leq C(k)$ для некоторого числа $C(k)$ и всех $r \in (0, 1)$. Функции $A \nabla \varrho$, $b \varrho$, $\nabla \varrho_{r,k}$ входят в $L^2(\Omega \times [T_0, T_1])$ при $r < \alpha_0$. Поэтому при $r \rightarrow 0$ мы получаем

$$\begin{aligned} \|(A \nabla \varrho) * \omega_r - A \nabla \varrho\|_{L^2(\Omega \times [T_0, T_1])} &\longrightarrow 0, \quad \|(b \varrho) * \omega_r - b \varrho\|_{L^2(\Omega \times [T_0, T_1])} \longrightarrow 0, \\ \|\nabla \varrho_{r,k} - \nabla \varrho_k\|_{L^2(\Omega \times [T_0, T_1])} &\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Члены

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} ((A \nabla \varrho) * \omega_r, \nabla \varrho_{r,k}) h'_q(\varrho_{r,k}) \eta^2 dx dt$$

и $I(r, k)$, $J(r, k)$, $L(r, k)$ сходятся при $r \rightarrow 0$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[H_q(\varrho_k(x, \tau_2)) \eta^2(x, \tau_2) - H_q(\varrho_k(x, \tau_1)) \eta^2(x, \tau_1) \right] dx \\ & \quad + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} (A \nabla \varrho, \nabla \varrho) h'_q(\varrho_k) \eta^2 dx dt = I(k) + J(k) + L(k) + N(k), \quad (3.5) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I(k) &= -2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} (A \nabla \varrho, \nabla \eta) h_q(\varrho_k) \eta \, dx \, dt, \\ J(k) &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} (b \varrho, \nabla \varrho) h'_q(\varrho_k) \eta^2 \, dx \, dt, \\ L(k) &= 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} (b \varrho, \nabla \eta) h_q(\varrho_k) \eta \, dx \, dt, \\ N(k) &= 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} H_q(\varrho_k) \eta \eta_t \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Оценим каждый член в правой части (3.5) отдельно. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$I(k) \leq \varepsilon \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} |\nabla \varrho|^2 h'_q(\varrho_k) \eta^2 \, dx \, dt + \varepsilon^{-1} M^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 \frac{h_q^2(\varrho_k)}{h'_q(\varrho_k)} \, dx \, dt.$$

Согласно первому утверждению леммы 3.1, мы имеем

$$\frac{h_q^2(\varrho_k)}{h'_q(\varrho_k)} \leq |\ln \varrho_k|^{2-2q}.$$

Значит,

$$I(k) \leq \varepsilon \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} |\nabla \varrho|^2 h'_q(\varrho) \eta^2 \, dx \, dt + \varepsilon^{-1} M^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 |\ln \varrho_k|^{2-2q} \, dx \, dt.$$

Оценим $J(k)$. Имеем

$$J(k) \leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} |\nabla \eta|^2 \frac{h_q^2(\varrho_k)}{h'_q(\varrho_k)} \, dx \, dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} |b|^2 \varrho^2 h'_q(\varrho_k) \eta^2 \, dx \, dt.$$

Первое слагаемое справа оценивается, как и выше. Рассмотрим второе слагаемое. Заметим, что для всех $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ выполнено неравенство

$$\alpha \beta \leq \gamma^{-1} (e^{\gamma \beta} + \alpha \ln \alpha).$$

Применяя это неравенство с $\alpha = h'_q(\varrho_k)$ и $\beta = |b|^2$ и учитывая, что $\varrho < \varrho_k$, мы получаем

$$|b|^2 \varrho^2 h'_q(\varrho_k) \leq \gamma^{-1} e^{\gamma |b|^2} \varrho^2 + \gamma^{-1} \varrho_k^2 h'_q(\varrho_k) |\ln h'_q(\varrho_k)|.$$

Согласно второму утверждению леммы 3.1, имеем

$$\varrho_k^2 h'_q(\varrho_k) |\ln h'_q(\varrho_k)| \leq 9(1 + |q|)^2 |\ln \varrho_k|^{2-2q}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} |b|^2 \varrho^2 h'_q(\varrho_k) \eta^2 \, dx \, dt &\leq \gamma^{-1} \|\varrho\|_{L^\infty} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} e^{\gamma |b|^2} \varrho \eta^2 \, dx \, dt \\ &\quad + 9\gamma^{-1} (1 + |q|)^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} |\ln \varrho_k|^{2-2q} \eta^2 \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Итак,

$$J(k) \leq 9(1 + \gamma^{-1})(1 + |q|)^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} (\eta^2 + |\nabla \eta|^2) |\ln \varrho_k|^{2-2q} dx dt \\ + \gamma^{-1} \|\varrho\|_{L^\infty} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} e^{\gamma|b|^2} \varrho \eta^2 dx dt.$$

Оценим $L(k)$. Имеем

$$L(k) \leq \varepsilon \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} |\nabla \varrho|^2 h'_q(\varrho_k) \eta^2 dx dt + 4\varepsilon^{-1} \int_{\Omega} |b|^2 \varrho^2 h'_q(\varrho_k) \eta^2 dx dt.$$

Оценив второе слагаемое в правой части таким же образом, как и выше, мы получаем

$$L(k) \leq \varepsilon \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} |\nabla \varrho|^2 h'_q(\varrho_k) \eta^2 dx dt + 4\varepsilon^{-1} \gamma^{-1} \|\varrho\|_{L^\infty} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} e^{\gamma|b|^2} \varrho \eta^2 dx dt \\ + 36\varepsilon^{-1} \gamma^{-1} (1 + |q|)^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} |\ln \varrho_k|^{2-2q} \eta^2 dx dt.$$

Заметим, что

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} (A \nabla \varrho, \nabla \varrho) h'_q(\varrho_k) \eta^2 dx dt \geq m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} |\nabla \varrho|^2 h'_q(\varrho_k) \eta^2 dx dt.$$

Так как $h'_q(\varrho_k) = (|\ln \varrho_k| - 2q + 1)(\varrho_k^2 |\ln \varrho_k|^{2q})^{-1}$, $0 < \varrho_k < e^{-2}$ и $q \leq 1$, то выполнено неравенство

$$h'_q(\varrho_k) \geq \frac{1}{\varrho_k^2 |\ln \varrho_k|^{2q}}.$$

Значит,

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} (A \nabla \varrho, \nabla \varrho) h'_q(\varrho_k) \eta^2 dx dt \geq m \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} \frac{|\nabla \varrho|^2}{\varrho_k^2 |\ln \varrho_k|^{2q}} \eta^2 dx dt.$$

Суммируя полученные выше оценки и полагая $\varepsilon := m/3$, приходим к неравенству

$$\int_{\Omega} (H_q(\varrho_k) \eta^2) |_{\tau_1}^{\tau_2} dx + \frac{m}{3} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} \frac{|\nabla \varrho|^2}{\varrho_k^2 |\ln \varrho_k|^{2q}} \eta^2 dx dt \\ \leq 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} H_q(\varrho_k) \eta \eta_t dx dt \\ + C \left[(1 + \gamma^{-1})(1 + |q|)^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} (\eta^2 + |\nabla \eta|^2) |\ln \varrho_k|^{2-2q} dx dt \right. \\ \left. + \gamma^{-1} \|\varrho\|_{L^\infty} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega} e^{\gamma|b|^2} \varrho \eta^2 dx dt \right].$$

В случае $q = 1$, когда $\eta(x, t) = \eta_0(x)$ при $t \in [\tau_1, \tau_2]$, мы имеем $\partial_t \eta = 0$ на $[\tau_1, \tau_2]$ и $N(k) = 0$. Доказательство закончено.

Следующие две леммы можно найти в [14], [15] или [16].

Пусть $V^2(U \times J)$ — пространство функций $u \in \mathbf{H}^{2,1}(U \times J)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V^2(U \times J)} = \|u\|_{\mathbf{H}^{2,1}(U \times J)} + \sup_{t \in J} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(U)}.$$

Лемма 3.3. Пусть $d > 2$. Предположим, что $v \in V^2(\Omega \times J)$ и для почти всякого $t \in J$ функция $x \rightarrow v(x, t)$ имеет компактный носитель в Ω . Тогда

$$\|v\|_{L^{2(d+2)/d}(\Omega \times J)} \leq C \|v\|_{V^2(\Omega \times J)},$$

где C зависит только от d и объема $|\Omega|$ множества Ω .

Рассмотрим куб $K(r) = K(y, r)$ и зададим функцию ψ_K следующим образом:

$$\psi_K(x) := \prod_{i=1}^d \chi_i(x_i), \quad x = (x_1, \dots, x_d), \quad (3.6)$$

где $\chi_i \in C^1([y_i - 2r, y_i + 2r])$, $\chi_i(x_i) = 1$ при $|x_i - y_i| \leq r$ и $\chi_i(x_i) = 0$ при $|x_i - y_i| \geq 2r$. Пусть также $0 \leq \psi_K \leq 1$ и $|\nabla \psi_K| \leq cr^{-1}$ с некоторым положительным числом c .

Лемма 3.4. Пусть $v \in V^2(K(R) \times (T_0, T_1))$ и для всякой функции $\psi \in C_0^1(K(R))$ функция

$$t \mapsto \int_{K(R)} v(x, t) \psi^2(x) dx$$

абсолютно непрерывна. Предположим, что существуют такие неотрицательная функция $g \in L^1(T_0, T_1)$ и постоянные $A_1, A_2 > 0$, что для всякого куба $K(r) \subset K(R)$ и почти всех $t \in (T_0, T_1)$ имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{K(2r)} v(x, t) \psi_K^2(x) dx + A_1 \int_{K(2r)} |\nabla v|^2 \psi_K^2 dx \leq A_2 g(t) |K(r)|^{1-2/d}.$$

Тогда при $T_0 < s_1 < s_2 < t_1 < t_2 < T_1$ существуют числа $\lambda > 0$ и $\sigma > 0$, зависящие от $s_1, s_2, t_1, t_2, d, A_1, A_2$ и $\|g\|_{L^1(T_0, T_1)}$, такие, что

$$\int_{s_1}^{s_2} \int_{K(R)} e^{-\lambda v} dx dt \int_{t_1}^{t_2} \int_{K(R)} e^{\lambda v} dx dt \leq \sigma.$$

Зафиксируем куб $K(R) = K(y, R)$ и числа $s_1 < s_2 < t_1 < t_2$ такие, что $s_1, s_2, t_1, t_2 \in [T_0, T_1]$, где $[T_0, T_1] \subset (0, 1)$.

Положим $Q^- := K(R) \times [s_1, s_2]$ и $Q^+ := K(R) \times [t_1, t_2]$.

Следующая теорема — основной результат работы.

Теорема 3.2. Пусть $\mu = \varrho dx dt$ — решение уравнения (1.1), причем коэффициенты a^{ij}, b^i удовлетворяют условиям (C1), (C2) и (C3). Пусть $\text{ess sup}_{(x,t) \in Q^-} \varrho(x,t) > 0$. Тогда $|\ln \varrho| \in L^\infty(Q^+)$.

Доказательство. Для $n \geq 0$ пусть $K_n := K(R + 2^{-n}R)$, $\tau_n = t_1 - (t_1 - s_2)^{-1}2^{-n-1}$. Положим $\kappa := \kappa(K(R) \times [T_0, T_1])$, $m := m(K(R) \times [T_0, T_1])$.

1. Покажем, что при некотором $\lambda > 0$ функции $|\ln \varrho_k|^\lambda$, где $\varrho_k = \varrho + k^{-1}$, имеют равномерно ограниченные по k интегралы. Положим $f(\varrho_k) = \ln |\ln \varrho_k|$. Согласно лемме 3.2 с $q = 1$, при $T_0 < s < t < T_1$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \int_{K_0} \left[f(\varrho_k(x, t)) \eta^2(x) - f(\varrho_k(x, s)) \eta^2(x) \right] dx + \frac{m}{3} \int_s^t \int_{K_0} |\nabla f(\varrho_k)|^2 \eta^2 dx d\tau \\ & \leq C \left[(1 + \gamma^{-1}) \int_s^t \int_{K_0} (\eta^2 + |\nabla \eta|^2) dx d\tau \right. \\ & \quad \left. + \gamma^{-1} \|\varrho\|_{L^\infty} \int_s^t \int_{K_0} e^{\gamma|b|^2} \varrho \eta^2 dx d\tau \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

если $\eta \in C_0^\infty(K_0 \times (T_0, T_1))$ и $\eta(x, \tau) = \eta_0(x)$ при $\tau \in [s, t]$. Пусть $d\gamma = \kappa$. Согласно неравенству Гёльдера,

$$\int_{K_0} e^{\gamma|b|} \varrho \eta^2 dx \leq \left(\int_{K_0} e^{\kappa|b|} \varrho \eta^2 dx \right)^{1/d} \left(\int_{K_0} \varrho \eta^2 dx \right)^{(d-1)/d}.$$

Положим

$$g(t) := 1 + \left(\int_{K_0} e^{\kappa|b(x,t)|} \varrho(x, t) dx \right)^{1/d}.$$

Применив неравенство Гёльдера, легко видеть, что $g \in L^1(T_0, T_1)$. Согласно равенству (3.5), функция

$$t \mapsto \int_{K_0} f(\varrho_k(x, t)) \eta_0^2(x) dx$$

абсолютно непрерывна на всяком внутреннем подотрезке в $[T_0, T_1]$. Для произвольного куба $K(r)$ такого, что $K(2r) \subset K_0$, выберем η так, чтобы при $\tau \in [s, t]$ было выполнено равенство $\eta(x, \tau) = \eta_0(x) := \psi_K(x)$, где функция ψ_K определена посредством (3.6). Ввиду (3.7) существуют такие числа A_1, A_2 , что

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{K(2r)} f(\varrho_k(x, t)) \psi_K^2(x) dx + A_1 \int_{K(2r)} |\nabla f(\varrho_k(x, t))| \psi_K^2(x) dx \\ & \leq A_2 g(t) |K(r)|^{1-2/d}. \end{aligned}$$

Это следует из того, что (3.7) верно для всех пар s, t с $s < t$. Итак, предположения леммы 3.4 выполнены. Значит, существуют числа $\lambda, \sigma > 0$,

не зависящие от k , такие, что

$$\int_{s_1}^{s_2} \int_{K_0} e^{-\lambda f(\varrho_k)} dx dt \int_{\tau_0}^{t_2} \int_{K_0} e^{\lambda f(\varrho_k)} dx dt \leq \sigma.$$

Так как $\text{ess sup}_{(x,t) \in Q^-} \varrho(x,t) > 0$, то первый сомножитель слева отличен от нуля. Поэтому, с учетом оценки $0 < f(\varrho_k) < f(\varrho)$, получаем, что найдется число $C_1 > 0$, не зависящее от k , для которого

$$\int_{\tau_0}^{t_2} \int_{K_0} e^{\lambda f(\varrho_k)} dx dt \leq \sigma \left(\int_{s_1}^{s_2} \int_{K_0} e^{-\lambda f(\varrho)} dx dt \right)^{-1} \leq C_1.$$

Поскольку $f(\varrho_k) = \ln |\ln \varrho_k|$, имеем

$$\int_{\tau_0}^{t_2} \int_{K_0} |\ln \varrho_k|^\lambda dx dt \leq C_1.$$

2. Покажем, что нормы $\|\ln \varrho\|_{L^p}$ равномерно ограничены по $p \in [1, +\infty)$. Положим $f(\varrho_k) := |\ln \varrho_k|^{1-q}$. Пусть $\eta \in C_0^1(K_0 \times (T_0, T_1))$. По лемме 3.2 с $\gamma = \kappa$ при $\tau_0 < s < t < t_2$ мы имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2-2q} \int_{K_0} [f(\varrho_k)^2 \eta^2(x,t) - f(\varrho_k)^2 \eta^2(x,s)] dx \\ & + \frac{m}{3(1-q)^2} \int_s^t \int_{K_0} |\nabla(f(\varrho_k))|^2 \eta^2 dx d\tau \\ & \leq 2 \int_s^t \int_{K_0} |\eta| |\partial_t \eta| f(\varrho_k)^2 dx d\tau \\ & + C \left[(1 + \delta^{-1})(1 + |q|)^2 \int_s^t \int_{K_0} (\eta^2 + |\nabla \eta|^2) f(\varrho_k)^2 dx d\tau \right. \\ & \quad \left. + \delta^{-1} \|\varrho\|_{L^\infty} \int_s^t \int_{K_0} e^{\kappa|b|^2} \varrho \eta^2 dx d\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Положим

$$\Lambda := \int_{T_0}^{T_1} \int_{K_0} e^{\kappa|b|^2} \varrho dx dt.$$

Пусть η_n — непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^1$, причем

$$\begin{aligned} \eta_n(x,t) &= 1 & \text{при } (x,t) \in K_{n+1} \times (\tau_{n+1}, t_2), \\ \eta_n(x,t) &= 0 & \text{при } (x,t) \notin K_n \times (\tau_n, T_1), \end{aligned}$$

а также $|\eta(x,t)| \leq 1$, $|\partial_t \eta_n(x,t)| \leq c_1 2^n$, $|\nabla_x \eta_n(x,t)| \leq c_2 2^n$, где c_1, c_2 — некоторые положительные числа. Тогда, согласно (3.8), мы имеем

$$\begin{aligned} \|\nabla(f(\varrho_k))\|_{L^2(K_{n+1} \times (\tau_{n+1}, t_2))}^2 &\leq C_2(1 + |q|)^4 4^n \left(\|f(\varrho_k)\|_{L^2(K_n \times (\tau_n, t_2))}^2 + \Lambda \right), \\ \sup_{t \in (\tau_{n+1}, t_2)} \|f(\varrho_k(\cdot, t))\|_{L^2(K_{n+1})}^2 &\leq C_2(1 + |q|)^3 4^n \left(\|f(\varrho_k)\|_{L^2(K_n \times (\tau_n, t_2))}^2 + \Lambda \right), \end{aligned}$$

где число C_2 не зависит от n и k . Значит, по лемме 3.3 существует такое число C_3 , не зависящее от n и k , что

$$\|f(\varrho_k)\|_{L^{2(d+2)/d}(K_{n+1} \times (\tau_{n+1}, t_2))}^2 \leq C_3(1 + |q|)^4 4^n \left(\|f(\varrho_k)\|_{L^2(K_n \times (\tau_n, t_2))}^2 + \Lambda \right).$$

Пусть $p_0 = \lambda$, $s = (d+2)d^{-1} > 1$, $p_n = s^n \lambda$. Тогда $p_{n+1} = sp_n$ и $p_n \rightarrow \infty$. Подставляя в $f(\varrho_k) = |\ln \varrho_k|^{1-q}$ числа $q_n = 1 - p_n/2$, получаем

$$\|\ln \varrho_k\|_{L^{p_{n+1}}(K_{n+1} \times (\tau_{n+1}, t_2))}^{p_n} \leq C_3(1 + p_n)^4 4^n \left(\|\ln \varrho_k\|_{L^{p_n}(K_n \times (\tau_n, t_2))}^{p_n} + \Lambda \right).$$

Для каждого фиксированного n , начиная с $n = 0$, мы применим теорему Фату при $k \rightarrow \infty$. Это дает такое число $C_4 > 1$, не зависящее от n , что

$$\|\ln \varrho\|_{L^{p_{n+1}}(K_{n+1} \times (\tau_{n+1}, t_2))}^{p_n} \leq C_4^n \left(\|\ln \varrho\|_{L^{p_n}(K_n \times (\tau_n, t_2))}^{p_n} + 1 \right).$$

Пусть $Z_n = \max\{\|\ln \varrho\|_{L^{p_n}(K_n \times (\tau_n, t_2))}, 1\}$. Тогда $Z_{n+1} \leq (2C_4)^{\lambda^{-1}ns^{-n}} Z_n$, откуда

$$Z_n \leq (2C_4)^{\lambda^{-1}} \sum_n ns^{-n} Z_0.$$

Итак, последовательность $\{Z_n\}$ ограничена, причем существует такое число C_5 , не зависящее от n , что $\|\ln \varrho\|_{L^{p_n}(K_n \times (\tau_n, t_2))} \leq C_5$. Значит, $|\ln \varrho| \in L^\infty(K_0 \times (t_1, t_2))$. Теорема доказана.

Следствие 3.1. Пусть $\mu = \varrho dx dt$ — неотрицательное решение уравнения (1.1), где коэффициенты a^{ij} и b^i удовлетворяют условиям (C1), (C2) и (C3). Пусть $0 < \tau < 1$, и пусть

$$\operatorname{ess\,sup}_{(x,t) \in \mathbf{R}^d \times (0,\tau)} \varrho(x,t) > 0.$$

Тогда мера μ имеет непрерывную плотность ϱ , которая строго положительна на $\mathbf{R}^d \times (\tau, 1)$.

Отметим, что условие $\operatorname{ess\,sup}_{(x,t) \in \mathbf{R}^d \times (0,\tau)} \varrho(x,t) > 0$ тривиальным образом выполнено, если при каждом $t > 0$ функция $x \mapsto \varrho(x,t)$ является вероятностной плотностью, как это происходит в приложениях к переходным вероятностям. Однако в общем случае это условие нельзя заменить предположением, что мера μ неотрицательна и не равна нулю тождественно на $\mathbf{R}^d \times (0, \tau)$ (как в эллиптическом случае). Это видно из следующего простого примера. Пусть $d = 1$ и $a \in (0, 1)$. Положим $\varrho(x,t) = \exp((a-t)^{-1} \exp(x))$ при $t > a$ и $\varrho(x,t) = 0$ при $t \leq a$. Тогда мера μ с плотностью ϱ на $\mathbf{R}^1 \times (0, 1)$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}^* \mu = 0$, где $a^{11}(x) = e^{-x}$ и $b = 0$ (которое в терминах ϱ имеет вид $\partial_t \varrho = \partial_x(a^{11} \partial_x \varrho)$), но это решение равно нулю при $t \leq a$.

З а м е ч а н и е 3.2. Теорема 3.1 и следствие 3.1 остаются верными с похожими доказательствами, если оператор $\mathcal{L}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u(x, t) &:= \partial_t u(x, t) + \partial_{x_i}(a^{ij}(x, t) \partial_{x_j} u(x, t)) \\ &\quad + b^i(x, t) \partial_{x_i} u(x, t) + \Theta(x, t) u(x, t),\end{aligned}$$

где a^{ij} и b^i удовлетворяют условиям (C1), (C2) и (C3), $\Theta \in L^p_{\text{loc}}(\mu)$, причем существует такая измеримая функция $\Psi \geq 0$, что $\Theta \geq -\Psi$ и $\exp(\Psi) \in L^1_{\text{loc}}(\mu)$.

З а м е ч а н и е 3.3. Если известно, что мера μ имеет локально ограниченную плотность $\varrho \in \mathbf{H}^{2,1}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^d, (0, 1))$, то можно рассмотреть неравенство $\mathcal{L}^* \mu \leq 0$ вместо уравнения (1.1), где

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u(x, t) &:= \partial_t u(x, t) + \partial_{x_i}(a^{ij}(x, t) \partial_{x_j} u(x, t)) \\ &\quad + b^i(x, t) \partial_{x_i} u(x, t) - \Psi(x, t) u(x, t).\end{aligned}$$

Неравенство понимается следующим образом:

$$\int_0^1 \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{L}\varphi(x, t) d\mu \leq 0$$

для всякой неотрицательной функции $\varphi \in C^\infty_0(\mathbf{R}^d \times (0, 1))$. Предположим, что a^{ij} и b^i удовлетворяют условиям (C1), (C2) и (C3), $\Psi \geq 0$ и $\exp(\Psi) \in L^1_{\text{loc}}(\mu)$. Тогда ϱ имеет версию, строго положительную при $t > \tau$, где $\text{ess sup}_{(x,t) \in \mathbf{R}^d \times (0, \tau)} \varrho(x, t) > 0$.

Подчеркнем еще раз, что полученные выше результаты применимы к уравнениям с операторами недивергентного вида, надо лишь соответствующие условия экспоненциальной интегрируемости накладывать на новый снос с компонентами $b^j - \partial_{x_i} a^{ij}$.

Отметим, что наши результаты показывают, что локальная экспоненциальная интегрируемость сноса (с квадратом в параболическом случае) относительно решения приводит к тому, что на самом деле снос оказывается локально экспоненциально интегрируемым и относительно меры Лебега (из-за непрерывности и строгой положительности плотности решения). Как уже отмечалось, подобного явления не происходит в случае степенной интегрируемости. Хотя экспоненциальная интегрируемость не является необходимой, ее нельзя существенно ослабить даже в одномерном случае. В работе [17] был исследован следующий вопрос. Пусть дана вероятностная мера μ на $[0, +\infty)$ с абсолютно непрерывной плотностью ϱ , и пусть дана положительная выпуклая функция ψ на $[0, +\infty)$. Когда из интегрируемости $\psi(|\varrho'/\varrho|)$ относительно μ следует, что $\varrho(x) > 0$ почти всюду на $[0, +\infty)$? Этот вопрос имеет прямое отношение к нашей задаче в эллиптическом случае, поскольку мера μ

удовлетворяет уравнению (1.1) с $A(x) = 1$ и $b(x) = -\varrho'(x)/\varrho(x)$, т.е. речь идет в точности о μ -интегрируемости $\psi(|b|)$ в этом весьма специальном частном случае. Оказывается, достаточным условием для справедливости упомянутой импликации является неинтегрируемость на бесконечности функции $x^{-2} \ln \psi(x)$. Более того, эта неинтегрируемость также и необходима для того, чтобы для всякой абсолютно непрерывной вероятностной плотности ϱ из μ -интегрируемости $\psi(|\varrho'/\varrho|)$ следовала положительность ϱ почти всюду. Например, в качестве ψ можно брать функции $\exp(\kappa x)$ с $\kappa > 0$ (как мы делали) или даже $\exp(x/\ln x)$, но не $\exp(x/|\ln x|^2)$.

4. Приложения. Полученные результаты позволяют устанавливать наличие строго положительных непрерывных плотностей конечномерных проекций стационарных распределений и переходных вероятностей бесконечномерных диффузий. Начнем с эллиптического случая. Пусть $\mathbf{R}^\infty$ — пространство бесконечных вещественных последовательностей с топологией произведения. Предположим, что даны борелевские функции B^i на $\mathbf{R}^\infty$ и числа $\alpha_i > 0$. Мы рассмотрим бесконечномерный эллиптический оператор

$$L\varphi := \sum_{i=1}^{\infty} [\alpha_i \partial_{x_i}^2 \varphi + B^i \partial_{x_i} \varphi],$$

определенный на гладких функциях от конечного числа переменных. Будем говорить, что борелевская вероятностная мера μ на $\mathbf{R}^\infty$ удовлетворяет слабому эллиптическому уравнению

$$L^* \mu = 0, \quad (4.1)$$

если для каждого $i \geq 1$ имеем $B^i \in L^1(\mu)$ и

$$\int_{\mathbf{R}^\infty} \sum_{i=1}^{\infty} [\alpha_i \partial_{x_i}^2 \varphi + B^i \partial_{x_i} \varphi] d\mu = 0 \quad (4.2)$$

при всех функциях φ на $\mathbf{R}^\infty$ вида $\varphi(x) = \varphi_0(x_1, \dots, x_n)$, $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Указанный ряд представляет собой конечную сумму для таких φ . Меры, удовлетворяющие уравнению (4.1), называются инфинитезимально инвариантными для оператора L , так как при широких предположениях это уравнение выполнено для настоящих инвариантных мер диффузии, порожденной L (конечно, при условии, что такая диффузия существует и имеет стационарные распределения). Преимущество рассмотрения инфинитезимально инвариантных мер заключается в том, что уравнение может иметь смысл и обладать решениями при гораздо более слабых предположениях, чем те, которые нужны для существования ассоциированной диффузии. Это касается даже конечномерного случая. Более

того, наличие решений эллиптического уравнения часто позволяет построить и диффузию (эти вопросы изучены в работах [19]–[21]).

Зафиксируем d и рассмотрим проекцию $P: \mathbf{R}^\infty \rightarrow \mathbf{R}^d$, $P(x) = (x_1, \dots, x_d)$. Пусть $\mu_P = \mu \circ P^{-1}$ — соответствующая конечномерная проекция меры μ . Поскольку $B^i \in L^1(\mu)$, то существует условное математическое ожидание B_P отображения $P \circ B$ относительно меры μ и σ -алгебры σ_P , порожденной P . Тогда $B_P(x) = b(Px)$ с некоторым борелевским отображением $b: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$. Ясно, что $|b| \in L^1(\mu_P)$, ибо $|B_P| \in L^1(\mu)$. Мера μ_P удовлетворяет уравнению $L_P^* \mu = 0$, где оператор L_P имеет вид

$$L_P u := \sum_{i=1}^d \alpha_i \partial_{x_i}^2 u + (b, \nabla u).$$

Теорема 4.1. *Предположим, что борелевская вероятностная мера μ удовлетворяет уравнению (4.1) и существуют такие числа $\kappa_i > 0$, что $\exp(\kappa_i |B^i|) \in L^1(\mu)$ для каждого $i \geq 1$. Тогда для всякой проекции $P: \mathbf{R}^\infty \rightarrow \mathbf{R}^d$ мера μ_P на $\mathbf{R}^d$ имеет непрерывную строго положительную плотность.*

Доказательство. Пусть $\kappa = \min(\kappa_1, \dots, \kappa_d)$. Согласно неравенству Иенсена, имеем $\exp(\kappa |b|) \in L^1(\mu_P)$, ибо $\exp(\kappa |B^i|) \in L^1(\mu)$. Значит, применима теорема 3.1.

В работе [18] с помощью метода функций Ляпунова получены достаточные условия экспоненциальной интегрируемости относительно меры μ , удовлетворяющей уравнению (4.1). Эти условия используют некоторую коэрцитивность сноса. Приведем типичные примеры.

Пример 4.1. Пусть $q_n > 0$, $\sum_{n=1}^\infty q_n < \infty$ и X — гильбертово пространство последовательностей $x = (x_n)$ с $\|x\|_0^2 := \sum_{n=1}^\infty q_n x_n^2 < \infty$. Предположим, что даны функции B^n на X , $n \in \mathbf{N}$, которые непрерывны в слабой топологии на шарах, причем при некоторых числах $C_n > 0$ имеют место оценки

$$|B^n(x)| \leq C_n + C_n \|x\|_0^2.$$

Пусть существует число $C > 0$ такое, что

$$\sum_{n=1}^\infty q_n x_n B^n(x) \leq C - C \|x\|_0^2$$

для всех x вида $x = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$. По теореме 5.3 работы [18] на X существует борелевская вероятностная мера μ , удовлетворяющая уравнению (4.1) с $\alpha_i \equiv 1$, причем функция $\exp(\varepsilon \|x\|_0^2)$ интегрируема относительно μ при некотором $\varepsilon > 0$. Тогда $\exp(\varepsilon_n |B^n|) \in L^1(\mu)$ при $\varepsilon_n < \varepsilon C_n^{-1}$, откуда следует существование непрерывных строго положительных плотностей конечномерных проекций меры μ , порожденных проекциями $x \mapsto (x_1, \dots, x_d)$.

Если же при некотором $r > 1$ известны оценки

$$|B^n(x)| \leq C_n + C_n \|x\|_0^r,$$

то достаточно потребовать выполнения неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n x_n B^n(x) \leq C - C \|x\|_0^r$$

на финитных последовательностях.

Аналогичные утверждения справедливы для конечномерных проекций инфинитезимально инвариантных мер для стохастических уравнений типа Бюргерса и Навье–Стокса, построенных в § 7 работы [18], при условии не более чем квадратичного роста нелинейностей. Например, рассмотрим стохастическое уравнение типа Бюргерса

$$du(t, x) = \sqrt{2} dW(t, x) + \left[\mathcal{H}u(t, x) - \psi(u(t, x)) \partial_x u(t, x) + f(x) \right] dt$$

в пространстве $X = L^2[0, 1]$, где $\mathcal{H}$ — оператор Лапласа с нулевыми граничными условиями и собственным базисом $\{\eta_n\}$ с собственными числами λ_n , W — винеровский процесс в X вида $W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n w_n(t) \eta_n$, $\{w_n\}$ — последовательность независимых вещественных винеровских процессов, $\alpha_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$, ψ — борелевская функция такая, что $|\psi(s)| \leq C + C|s|$, $f \in L^\infty[0, 1]$. Положим

$$\Psi(y) := \int_0^y \psi(s) ds,$$

$$B^n(u) = \lambda_n u_n + (\Psi(u), \eta'_n)_2 + (f, \eta_n)_2, \quad u_n := (u, \eta_n)_2.$$

Тогда стационарные распределения указанного стохастического процесса удовлетворяют уравнению $L^* \mu = 0$ с оператором

$$L\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \partial_{\eta_n}^2 \varphi + B^n \partial_{\eta_n} \varphi],$$

заданном на функциях вида $\varphi(u) = \varphi_0(u_1, \dots, u_n)$, $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, где ∂_η обозначает частную производную вдоль вектора η . Как показано в [18], существует борелевская вероятностная мера μ на X , удовлетворяющая уравнению $\mathcal{L}^* \mu = 0$ в определенном выше смысле. При этом функция $\exp(\varepsilon \|x\|_2^2)$ интегрируема относительно μ при некотором $\varepsilon > 0$ (это следует из результатов [18]). Значит, здесь также выполнено условие $\exp(\varepsilon_n |B^n|) \in L^1(\mu)$. Аналогично рассматривается стохастическое уравнение типа Навье–Стокса

$$du(t, x) = \sqrt{2} dW(t, x) + \left[\mathcal{H}u(t, x) - (u(t, x) \cdot \nabla) u(t, x) + F(x, u(t, x)) + \nabla p(t, x) \right] dt$$

с оператором Лапласа $\mathcal{H}$ на области в $\mathbf{R}^d$ и ограниченным непрерывным отображением F (в классическом случае F не зависит от $u = (u^1, \dots, u^d) \in L^2(D, \mathbf{R}^d)$). Функции B^n здесь имеют вид

$$B^n(u) = (\mathcal{H}u, \eta_n)_2 + \sum_{j=1}^d (\partial_j u, u^j \eta_n)_2 + (F(\cdot, u), \eta_n)_2.$$

Соответствующая мера μ строится в пространстве $L^2(D, \mathbf{R}^d)$ векторных функций. Отметим, что в работах [23], [24] при отсутствии нелинейности F доказан ряд тонких результатов о плотностях конечномерных проекций стационарных распределений указанного бесконечномерного процесса.

Наконец, еще один близкий пример связан со стохастическим уравнением одномерной диффузионной реакции

$$du(t, x) = \left[\partial_x^2 u(t, x) + F(u(t, x)) \right] dt + \sqrt{2} dW(t),$$

где функция F на прямой такова, что $|F(s)| \leq C + Cs^2$, $sF(s) \leq C + \varepsilon s^2$ и $\varepsilon > 0$ достаточно мало (см. [18, § 7]).

Рассмотрим параболический случай. Аналогом (4.2) для меры μ на $\mathbf{R}^\infty \times (0, 1)$ здесь является тождество

$$\int_{\mathbf{R}^\infty \times (0, 1)} \left(\partial_t \varphi + \sum_{i=1}^{\infty} [\alpha_i \partial_{x_i}^2 \varphi + B^i \partial_{x_i} \varphi] \right) d\mu = 0 \quad (4.3)$$

для всех функций φ вида $\varphi(x, t) = \varphi_0(x_1, \dots, x_n, t)$, $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times (0, 1))$, причем также требуется μ -интегрируемость коэффициентов $B^i: \mathbf{R}^\infty \times (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}^1$. В смысле этого тождества и понимается (4.1).

Теорема 4.2. Пусть борелевская вероятностная мера μ на $\mathbf{R}^\infty \times (0, 1)$ удовлетворяет уравнению (4.1) и существуют такие числа $\kappa_i > 0$, что $\exp(\kappa_i |B^i|^2) \in L^1(\mu)$ для каждого $i \geq 1$. Тогда для всякой проекции $P: \mathbf{R}^\infty \times (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}^d \times (0, 1)$, $P(x, t) = (x_1, \dots, x_d, t)$, мера μ_P на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ имеет непрерывную строго положительную плотность, если $\mu(\mathbf{R}^\infty \times (0, \tau)) > 0$ при всех $\tau > 0$.

Доказательство аналогично обоснованию предыдущей теоремы. Такие же соображения применимы в следующей более общей ситуации. Предположим, что X — локально выпуклое пространство и для каждого n задана борелевская функция B^n на $X \times (0, 1)$. Пусть a^{ij} — вещественные числа, причем матрицы $(a^{ij})_{i, j \leq d}$ положительны. Пусть l_i — непрерывные линейные функционалы на X и пусть h_j — векторы в X такие, что $l_i(h_j) = \delta_{ij}$. Рассмотрим оператор

$$L\varphi := \partial_t \varphi + \sum_{i, j \geq 1} a^{ij} \partial_{h_i} \partial_{h_j} \varphi + \sum_{i \geq 1} B^i \partial_{h_i} \varphi,$$

определенный на функциях вида $\varphi(x, t) = \varphi_0(l_1(x), \dots, l_n(x), t)$, $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times (0, 1))$. Тогда для борелевской вероятностной меры μ на $X \times (0, 1)$, для которой $B^i \in L^1(\mu)$ при всех i , уравнение $L^*\mu = 0$ определяется в том же смысле, что и выше. Для фиксированного числа d пусть b^i обозначает условное математическое ожидание B^i относительно меры μ и σ -алгебры, порожденной $l_1, \dots, l_d$. Положим $\pi(x, t) := (l_1(x), \dots, l_d(x), t)$, $(x, t) \in X \times (0, 1)$, $\mu_\pi := \mu \circ \pi^{-1}$. Тогда мера μ_π на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ удовлетворяет параболическому уравнению $L_\pi^* \mu_\pi = 0$ с оператором L_π , имеющим матрицу диффузии $(a^{ij})_{i,j \leq d}$ и снос $b_\pi = (b^i)$. Следовательно, приходим к такому утверждению.

Теорема 4.3. *Предположим, что для каждого i существует такое число $\kappa_i > 0$, что $\exp(\kappa_i |B^i|^2) \in L^1(\mu)$. Тогда мера μ_π имеет непрерывную строго положительную плотность на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$, если $\mu(\mathbf{R}^\infty \times (0, \tau)) > 0$ при всех $\tau > 0$.*

Отметим, что в предыдущих результатах речь идет о конечномерных проекциях, заданных функционалами вида, упомянутого в условиях (правда, в случае $\mathbf{R}^\infty$ всякий непрерывный линейный функционал есть конечная линейная комбинация координатных). В некоторых случаях, как в следующем примере, можно от специальных функционалов переходить к общим.

Пример 4.2. Пусть диффузионный процесс ξ_t в сепарабельном банаховом пространстве X задан стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\xi_t = dW_t + b(\xi_t, t) dt,$$

где W_t — некоторый винеровский процесс в X (см. [22, гл. 7]), для которого распределение W_1 положительно на всех шарах, $b: X \times [0, 1] \rightarrow X$ — борелевское отображение, причем $\|b(x, t) - b(y, t)\| \leq C\|x - y\|$ и $\|b(x, t)\| \leq C + C\|x\|$, где C — постоянная. Это уравнение понимается как интегральное:

$$\xi_t(\omega) = \xi_0(\omega) + W_t(\omega) + \int_0^t b(\xi_s(\omega), s) ds.$$

Оно имеет единственное решение, которое строится с помощью теоремы о сжимающем отображении. Предположим, что при некотором $\varepsilon_0 > 0$ функция $\exp(\varepsilon_0 \|x\|^2)$ интегрируема относительно распределения ξ_0 (что выполнено, например, если ξ_0 — неслучайная точка). Используя лемму Гронуолла, получаем

$$\|\xi_t(\omega)\| \leq [\|\xi_0(\omega)\| + \|W_t(\omega)\| + C]e^{Ct}, \quad t \in [0, 1].$$

Ввиду теоремы Ферника (см. [22, § 2.6]) при некотором $\varepsilon_1 > 0$ случайные величины $\exp(\varepsilon_1 \|W_t\|^2)$, где $t \in [0, 1]$, имеют равномерно ограниченные

математические ожидания. Поэтому найдется такое $\varepsilon_2 > 0$, что случайные величины $\exp(\varepsilon_2 \|\xi_t\|^2)$ при $t \in [0, 1]$ также имеют равномерно ограниченные математические ожидания. Это означает, что функция $\exp(\varepsilon_2 \|x\|^2)$ интегрируема относительно меры $P(t, \cdot) dt$ на $X \times [0, 1]$, что дает также интегрируемость $\exp(C^{-2} \varepsilon_2 \|b\|^2)$ относительно этой меры. Предположим, что $l_1, \dots, l_d \in X^*$ и отображение $\pi = (l_1, \dots, l_d): X \rightarrow \mathbf{R}^d$ сюръективно. Положим $P_t(B) := \mathbf{P}\{\xi_t \in B\}$ и рассмотрим меру $\mu := P_t dt$ на $X \times (0, 1)$. Как и выше, существуют борелевские функции b^i на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ такие, что $b^i \circ \pi$ совпадает с условным математическим ожиданием $l_i \circ b$ относительно меры μ и σ -алгебры, порожденной π . Нетрудно проверить, что мера $\mu_\pi := \mu \circ \pi^{-1}$ на $\mathbf{R}^d \times (0, 1)$ удовлетворяет уравнению (1.1) со сносом $b_\pi := (b^1, \dots, b^d)$ и некоторыми постоянными коэффициентами a^{ij} . Пользуясь тем, что распределение W_1 не сосредоточено на собственном замкнутом подпространстве, можно показать, что матрица (a^{ij}) строго положительна. Следовательно, согласно теореме 3.2, мера μ_π обладает строго положительной непрерывной плотностью. Это же можно получить непосредственно из теоремы 4.3. Действительно, можно показать, что существуют такие функционалы $f_i \in X^*$, что $f_i(W_t)$ являются независимыми винеровскими процессами, а функционалы $l_1, \dots, l_d$ являются линейными комбинациями $f_1, \dots, f_d$. Для этого обозначим через γ распределение W_1 в X , применим стандартную процедуру ортогонализации к элементам $l_1, \dots, l_d$ пространства $L^2(\gamma)$ и дополним полученные функционалы $f_1, \dots, f_d$ до ортонормированного базиса евклидова пространства X^* , наделенного скалярным произведением из $L^2(\gamma)$ (см. [22, § 7.2] о бесконечномерных винеровских процессах). Фактически мы строим другой винеровский процесс $\widetilde{W}_t$ вида $\widetilde{W}_t = \sum_{i=1}^\infty w_t^i e_i$, где $\{e_i\}$ — ортонормированный базис в пространстве Камерона–Мартин меры γ и w_t^i — независимые вещественные винеровские процессы, причем процесс $\widetilde{W}_t$ имеет такие же конечномерные распределения, как и W_t , и $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. Тогда теорема 4.3 применима к проекциям меры μ , задаваемым функционалами f_i . Остается заметить, что существует обратимый оператор S на $\mathbf{R}^d$, для которого $S \circ (f_1, \dots, f_d) = (l_1, \dots, l_d)$.

Было бы интересно изучить конечномерные проекции меры μ в теореме 4.3, соответствующие произвольным непрерывным конечномерным операторам, не обязательно порожденным функционалами l_i .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M. On regularity of transition probabilities and invariant measures of singular diffusions under minimal conditions. — Comm. Partial Differential Equations, 2001, v. 26, № 11–12, p. 2037–2080.

2. Шапошников С. В. Положительность инвариантных мер диффузионных процессов. — Докл. РАН, 2007, т. 415, № 2, с. 174–179.
3. Metafune G., Pallara D., Rhandi A. Global properties of invariant measures. — J. Funct. Anal., 2005, v. 223, № 2, p. 396–424.
4. Богачёв В. И., Рёкнер М., Шапошников С. В. Глобальная регулярность и оценки решений параболических уравнений. — Теория вероятн. и ее примен., 2005, т. 50, в. 4, с. 652–674.
5. Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M. Elliptic equations for measures: regularity and global bounds of densities. — J. Math. Pures Appl., 2006, v. 85, № 6, p. 743–757.
6. Богачёв В. И., Рёкнер М., Шапошников С. В. Оценки плотностей стационарных распределений и переходных вероятностей диффузионных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 2, с. 240–270.
7. Богачёв В. И., Рёкнер М. Обобщение теоремы Хасьминского о существовании инвариантных мер для локально интегрируемых сносов. — Теория вероятн. и ее примен., 2000, т. 45, в. 3, с. 417–436.
8. Bogachev V. I., Da Prato G., Röckner M. On parabolic equations for measures. — Comm. Partial Differential Equations, 2008, v. 33, № 3, p. 397–418.
9. Богачёв В. И., Рёкнер М., Штаннат В. Единственность решений эллиптических уравнений и единственность инвариантных мер диффузий. — Матем. сб., 2002, т. 193, № 7, с. 3–36.
10. Bogachev V. I., Da Prato G., Röckner M., Stannat W. Uniqueness of solutions to weak parabolic equations for measures. — Bull. London Math. Soc., 2007, v. 39, № 4, p. 631–640.
11. Шапошников С. В. О неединственности решений эллиптических уравнений для вероятностных мер. — Докл. РАН, 2008 (в печати).
12. Krylov N. V. Some properties of traces for stochastic and deterministic parabolic weighted Sobolev spaces. — J. Funct. Anal., 2001, v. 183, № 1, p. 1–41.
13. Krylov N. V. An analytic approach to SPDEs. — Stochastic Partial Differential Equations: Six Perspectives. Ed. by R. Carmona and B. Rozovskii. Providence: Amer. Math. Soc., 1999, p. 185–242.
14. Trudinger N. S. Pointwise estimates and quasilinear parabolic equations. — Comm. Pure Appl. Math., 1968, v. 21, p. 205–226.
15. Aronson D. G., Serrin J. Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations. — Arch. Ration. Mech. Anal., 1967, v. 25, p. 81–122.
16. Moser J. A Harnack inequality for parabolic differential equations. — Comm. Pure Appl. Math., 1964, v. 17, p. 101–134; corrections: ibid., 1967, v. 20, p. 231–236.
17. Scheutzow M., von Weizsäcker H. Which moments of a logarithmic derivative imply quasiinvariance? — Doc. Math., 1998, v. 3, p. 261–272.
18. Bogachev V. I., Röckner M. Elliptic equations for measures on infinite-dimensional spaces and applications. — Probab. Theory Related Fields, 2001, v. 120, № 4, p. 445–496.
19. Eberle A. Uniqueness and Nonuniqueness of Semigroups Generated by Singular Diffusion Operators. Berlin: Springer, 1999, 262 p. (Lecture Notes in Math., v. 1718.)
20. Stannat W. (Nonsymmetric) Dirichlet operators on L^1 : existence, uniqueness and associated Markov processes. — Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4), 1999, v. 28, № 1, p. 99–140.
21. Stannat W. Time-dependent diffusion operators on L^1 . — J. Evol. Equ., 2004, v. 4, № 4, p. 463–495.
22. Богачёв В. И. Гауссовские меры. М.: Наука, 1997, 352 с.
23. Agrachev A., Kuksin S., Sarychev A., Shirikyan A. On finite-dimensional projections of distributions for solutions of randomly forced 2D Navier–Stokes equations. — Ann. Inst. H. Poincaré, 2007, v. 43, № 4, p. 399–415.
24. Shirikyan A. Qualitative properties of stationary measures for three-dimensional Navier–Stokes equations. — J. Funct. Anal., 2007, v. 249, № 2, p. 284–306.