Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Е. Е. Дьяконова, Предельные теоремы для редуцированных ветвящихся процессов в случайной среде, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 2, 271–300

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp173>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 11:23:03

© 2007 г. ВАТУТИН В. А.*, ДЬЯКОНОВА Е. Е.*

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ РЕДУЦИРОВАННЫХ
ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ¹⁾**

Рассматривается ветвящийся процесс $Z(n)$, $n = 0, 1, \dots$, в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных производящих функций $f_0(s), f_1(s), \dots$. Пусть $S_0 = 0$, $S_k = X_1 + \dots + X_k$, $k \geq 1$, — сопровождающее случайное блуждание этого процесса, $X_i = \ln f'_{i-1}(1)$, а $\tau(n)$ — самая левая точка, в которой достигается минимум блуждания $\{S_k\}_{k \geq 0}$ на интервале $[0, n]$. Обозначим $Z(k, n)$ число частиц, существовавших в ветвящемся процессе в момент времени $k \leq n$ и имеющих ненулевое потомство в момент времени n . В предположении, что для сопровождающего случайного блуждания выполнено условие Спизера–Дони $\mathbf{P}\{S_n > 0\} \rightarrow \rho \in (0, 1)$, $n \rightarrow \infty$, показано (в рамках так называемого quenched approach), что для любого фиксированного $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ распределение случайной величины $Z(\tau(n) + m, n)$ при условии $Z(n) > 0$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к (случайному) дискретному распределению, являющемуся собственным с вероятностью 1. В случае же, когда $m = m(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, для доказательства аналогичной условной предельной теоремы о распределении случайной величины $Z(\tau(n) + m, n)$ при условии $Z(n) > 0$ необходимо нормировать $Z(\tau(n) + m, n)$ некоторой функцией, стремящейся к бесконечности с ростом m .

Ключевые слова и фразы: ветвящиеся процессы в случайной среде, условие Спизера–Дони, условные предельные теоремы, редуцированные процессы, ближайший общий предок.

Введение. Настоящая статья продолжает работы [7]–[11], посвященные изучению таких ветвящихся процессов в случайной среде, в которых вероятностные законы размножения частиц различных поколений независимы и одинаково распределены.

Неформальное описание рассматриваемой нами модели ветвящихся процессов выглядит следующим образом. Пусть $\mathbf{F} = \{f(s)\}$ — множество всех производящих функций, соответствующих вероятностным

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина, 8, 119991 Москва, ГСП-1, Россия; e-mail: vatutin@mi.ras.ru, elena@mi.ras.ru

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00035), программы поддержки ведущих научных школ НШ-4129.2006.1, INTAS (проект 03-51-5018), ECO-NET 12634TJ и программы РАН «Современные проблемы теоретической математики».

распределениям с носителями, сосредоточенными на множестве неотрицательных целых чисел $\mathbf{N}_0$, снабженное равномерной метрикой. Предположим, что на борелевских подмножествах пространства $\mathbf{F}$ задана вероятностная мера $\mathbb{P}$. Выбирая (с возвращением) из $\mathbf{F}$ в соответствии с указанной мерой последовательность производящих функций $f_0(s)$, $f_1(s), \dots, f_n(s), \dots$ и фиксируя ее, мы получаем бесконечную последовательность называемую (случайной) средой. Эта среда порождает неоднородный ветвящийся процесс $\{Z(n), n \geq 0\}$, задаваемый выражениями

$$Z(0) = 1, \\ \mathbb{E}\left[s^{Z(n+1)} | f_0, f_1, \dots, f_n; Z(0), Z(1), \dots, Z(n)\right] = (f_n(s))^{Z(n)}, \quad n \geq 0,$$

где

$$f_{n,\pi}(s) = f_n(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \pi_n(k) s^k.$$

Полученная таким образом последовательность $\{Z(n), n \geq 0\}$ называется ветвящимся процессом в случайной среде. Мы ограничимся лишь этим описанием интересующей нас модели ветвящихся процессов в случайной среде. Более строгое описание и построение таких процессов можно найти в [1]–[3].

Иногда нам будет удобнее отождествлять вероятностную производящую функцию $f_n(s)$ с бесконечномерным вектором π_n :

$$\pi_n = \{\pi_n(0), \pi_n(1), \pi_n(2), \dots\}, \quad \pi_n(k) \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \pi_n(k) = 1, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Пусть $f \stackrel{d}{=} f_0$, $X_j := \ln f'_{j-1}(1)$, $\eta_j := f''_{j-1}(1)(f'_{j-1}(1))^{-2}$, $j \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$; $X \stackrel{d}{=} X_1$, $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$. Мы будем называть последовательность $\{S_n\}_{n \geq 0}$ сопровождающим случайным блужданием ветвящегося процесса в случайной среде.

Скажем, что ветвящийся процесс в случайной среде является невырожденным критическим, если $\limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ и $\liminf_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ с вероятностью 1, и вырожденным критическим, если $S_n = 0$, $n \geq 0$ (более подробное обоснование этой терминологии см. в [4] и [11]). В дальнейшем мы рассматриваем исключительно невырожденные критические ветвящиеся процессы в случайной среде и для краткости называем их просто критическими ветвящимися процессами в случайной среде, **опуская** слово «невырожденные».

Пусть $\tau(n_1, n_2) := \min\{i \in [n_1, n_2]: S_j \geq S_i, j = n_1, n_1 + 1, \dots, n_2\}$ — самая левая точка интервала $[n_1, n_2]$, в которой достигается минимальное значение случайного блуждания $\{S_n\}_{n \geq 0}$. Для краткости положим $\tau(n) := \tau(0, n)$. В работах [10] и [11] (в рамках так называемого quenched approach, т.е. в ситуации, когда вероятности событий

и меры рассматриваются как случайные элементы, зависящие от реализации среды) был доказан ряд условных предельных теорем, описывающих асимптотическое поведение распределения числа частиц в критическом ветвящемся процессе в случайной среде при условии невырождения процесса к моменту $n \rightarrow \infty$. В частности, было показано, что если $t \in (0, 1]$ фиксировано, то (случайное) условное распределение случайной величины $Z([nt]) e^{S_{\tau([nt])} - S_{[nt]}}$ при условии $Z(n) > 0$ сходится в некотором смысле к собственному предельному распределению, не имеющему атома в нуле, в то время как при фиксированном $t \in (0, 1]$ и фиксированном $m \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ (случайное) распределение величины $Z(\tau([nt]) + m)$ при условии $Z(n) > 0$ сходится (в некотором смысле) к (случайному) собственному дискретному предельному распределению.

В настоящей работе мы рассматриваем еще один важный процесс, построенный по ветвящемуся процессу $\{Z(k), 0 \leq k \leq n\}$, а именно, мы изучаем так называемый редуцированный ветвящийся процесс $\{Z(k, n), 0 \leq k \leq n\}$, где $Z(k, n)$ — число частиц в первоначальном процессе в момент времени $k \leq n$, имеющих ненулевое число потомков в момент времени n . Редуцированные процессы для обычных процессов Гальтона–Ватсона впервые рассмотрели Фляйшманн и Прен [18], которые исследовали докритический случай. Критические и надкритические редуцированные процессы Гальтона–Ватсона изучали Зубков [15] и Фляйшманн и Зигмунд–Шульце [19]. Первые результаты для редуцированных ветвящихся процессов в случайной среде получили Боровков и Ватутин [5], а также Фляйшманн и Ватутин [17]. Применяя так называемый annealed approach (т.е. усредняя характеристики и меры относительно распределения $\mathbb{P}$, заданного на пространстве сред), они рассматривали случай, в котором носитель меры $\mathbb{P}$ сконцентрирован лишь на множестве дробно-линейных производящих функций. В рамках annealed approach Ватутин [6] доказал предельную теорему для критических редуцированных процессов в случайной среде для производящих функций общего вида.

В данной работе мы рассматриваем quenched approach и развиваем методы, предложенные в [7]–[11]. Мы покажем, что при условии $Z(n) > 0$ конечномерные условные (случайные) распределения процесса $\{Z([nt], n) e^{S_{\tau([nt], n)} - S_{[nt]}}, 0 \leq t \leq 1\}$ сходятся (в некотором смысле) к конечномерным распределениям некоторого предельного процесса, а конечномерные условные (случайные) распределения процесса $\{Z(\tau(n) + m, n), m \in \mathbf{Z}\}$ сходятся (в некотором смысле) к конечномерным распределениям ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона в неоднородной случайной среде.

1. Основные условия. Введем сначала основные условия, которые впоследствии всегда будут считаться выполненными. Так, мы будем предполагать, что распределение случайной величины X либо не-

решетчато, либо центрально решетчато (т.е. X принимает лишь значения hk , $h > 0$, $k \in \mathbf{Z}$, и $\mathbf{P}\{X = 0\} > 0$) и что сопровождающее случайное блуждание удовлетворяет следующему условию **условию Спизера-Дони**.

Условие A1. Существует число $0 < \rho < 1$ такое, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{P}\{S_k > 0\} \rightarrow \rho,$$

или, что то же самое (см. [13]), $\mathbf{P}\{S_n > 0\} \rightarrow \rho$, $n \rightarrow \infty$.

Известно, что при выполнении условия A1

$$n^{-1}\tau(n) \xrightarrow{w} \tau, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где τ — случайная величина, распределенная по обобщенному закону арксинуса с параметром ρ (см. [16, гл. IV, § 20]), а символ $\xrightarrow{w}$ означает слабую сходимость.

Пусть $\gamma_0 := 0$, $\gamma_{j+1} := \min(n > \gamma_j: S_n < S_{\gamma_j})$ и $\Gamma_0 := 0$, $\Gamma_{j+1} := \min(n > \Gamma_j: S_n > S_{\Gamma_j})$, $j \geq 0$, — строгие убывающие и, соответственно, строгие возрастающие лестничные моменты случайного блуждания $\{S_n\}_{n \geq 0}$. Введем функции

$$V(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{S_{\gamma_j} \geq -x\}, \quad x > 0, \quad V(0) = 1, \quad V(x) = 0, \quad x < 0,$$

$$U(x) := 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{S_{\Gamma_j} < x\}, \quad x > 0, \quad U(0) = 1, \quad U(x) = 0, \quad x < 0,$$

и положим

$$\Theta(a) := \sum_{k=a}^{\infty} k^2 \pi(k) / \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \pi(k) \right)^2, \quad a \in \mathbf{N}_0.$$

Условие A2. Существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и $a \in \mathbf{N}_0$ такие, что

$$\mathbf{E}(\ln^+ \Theta(a))^{1/\rho + \varepsilon_0} < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E}[V(X)(\ln^+ \Theta(a))^{1+\varepsilon_0}] < \infty,$$

$$\mathbf{E}(\ln^+ \Theta(a))^{1/(1-\rho) + \varepsilon_0} < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E}[U(-X)(\ln^+ \Theta(a))^{1+\varepsilon_0}] < \infty.$$

Более детальное обсуждение этих условий можно найти в [4] и [10].

Пусть Ω_n — пространство элементарных событий, соответствующее наборам $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, Z(0), Z(1), \dots, Z(n)$; $\Omega = \Omega_{\infty}$, а

$$\mathcal{F}_n = \sigma(f_0, f_1, \dots, f_{n-1}; Z(0), Z(1), \dots, Z(n)), \quad n \in \mathbf{N}_0, \quad \mathcal{F} := \bigvee_n \mathcal{F}_n$$

— последовательность естественных σ -алгебр, порожденных ветвящимся процессом в случайной среде. В дальнейшем нам потребуются различные вероятностные меры, определенные на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$. Чтобы отличать их друг от друга, мы будем использовать символы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ для обозначения математического ожидания и вероятности относительно вероятностной

меры, порождаемой исходной мерой ветвящегося процесса на наборах $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, \dots; Z(0), Z(1), \dots, Z(n), \dots)$ (за исключением некоторых случаев, которые, как мы надеемся, не приведут к недоразумениям), символы $\mathbb{E}$ и $\mathbb{P}$ используются для обозначения математического ожидания и вероятности относительно маргинальной меры на множестве сред, а символы $\mathbf{E}_\pi$, $\mathbf{P}_\pi$ — для обозначения условного математического ожидания и условной вероятности при фиксированной среде $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n, \dots)$. Мы будем использовать в рассуждениях как пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, так и две его копии $(\Omega^-, \mathcal{F}^-, \mathbf{P}^-)$ и $(\Omega^+, \mathcal{F}^+, \mathbf{P}^+)$. Рассмотрим две последовательности случайных элементов $\{f_n^-\}_{n \geq 0}$ и $\{f_n^+\}_{n \geq 0}$, заданных на пространствах $(\Omega^-, \mathcal{F}^-, \mathbf{P}^-)$ и $(\Omega^+, \mathcal{F}^+, \mathbf{P}^+)$, соответственно, и обозначим $\{S_n^-\}_{n \geq 0}$ и $\{S_n^+\}_{n \geq 0}$ порожденные ими сопровождающие случайные блуждания, которые, естественно, определены на соответствующих пространствах $(\Omega^-, \mathcal{F}^-, \mathbf{P}^-)$ и $(\Omega^+, \mathcal{F}^+, \mathbf{P}^+)$. В дальнейшем все характеристики или случайные величины, связанные с $\{f_n^-\}_{n \geq 0}$ и $\{f_n^+\}_{n \geq 0}$, будут снабжаться индексами $-$ и $+$, соответственно. Например, мы будем использовать случайные величины $\Gamma^- := \min\{n \geq 1: S_n^- \geq 0\}$ и $\gamma^+ := \min\{n \geq 1: S_n^+ < 0\}$. Кроме того, мы будем изучать различные свойства пары ветвящихся процессов в случайной среде, заданных на $(\Omega^- \times \Omega^+, \mathcal{F}^- \times \mathcal{F}^+, \mathbf{P}^- \times \mathbf{P}^+)$, при условии осуществления события $\mathcal{A}_{k,p} := \{\Gamma^- > k, \gamma^+ > p\}$.

Положим $D = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1} \mathbf{P}\{S_j = 0\}$. Наряду с исходными мерами $\mathbf{P}^-$ и $\mathbf{P}^+$, определим на $(\Omega^-, \mathcal{F}^-)$ и $(\Omega^+, \mathcal{F}^+)$ меры $\hat{\mathbf{P}}^-$ и $\hat{\mathbf{P}}^+$, полагая для $\mathcal{A}^- \in \mathcal{F}_k^-$, $\mathcal{A}^+ \in \mathcal{F}_p^+$, $k, p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}^-(\mathcal{A}^-) &:= e^D \int_{\mathcal{A}^-} U(-S_k^-) I\{\Gamma^- > k\} d\mathbf{P}^-, \\ \hat{\mathbf{P}}^+(\mathcal{A}^+) &:= \int_{\mathcal{A}^+} V(S_p^+) I\{\gamma^+ > p\} d\mathbf{P}^+, \end{aligned}$$

где $I\{\mathcal{A}\}$ — индикатор события $\mathcal{A}$. Нетрудно понять вероятностный смысл этих мер: носитель сужения меры $\hat{\mathbf{P}}^-$ на $\mathcal{F}_k^-$ сконцентрирован лишь на тех реализациях случайной среды, сопровождающие случайные блуждания которых остаются отрицательными в течении первых k шагов (за исключением начальной точки), в то время как носитель сужения меры $\hat{\mathbf{P}}^+$ на $\mathcal{F}_k^+$ сконцентрирован только на реализациях среды, сопровождающие случайные блуждания которых в течение первых k шагов остаются неотрицательными.

На измеримом пространстве $(\Omega^- \times \Omega^+, \mathcal{F}^- \times \mathcal{F}^+)$ зададим вероятностную меру $\hat{\mathbf{P}} := \hat{\mathbf{P}}^- \times \hat{\mathbf{P}}^+$, полагая для $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_k^- \times \mathcal{F}_p^+$

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathcal{A}) := e^D \int_{\mathcal{A}} U(-S_k^-) V(S_p^+) I\{\mathcal{A}_{k,p}\} d(\mathbf{P}^- \times \mathbf{P}^+)$$

(более подробное описание этих мер можно найти в [11]).

Ниже мы будем использовать символы $\hat{\mathbf{E}}^\pm$, $\hat{\mathbf{E}}$ и $\mathcal{L}^\pm$, $\mathcal{L}$ для обозначения математических ожиданий и законов распределения относительно мер $\hat{\mathbf{P}}^\pm$ и $\hat{\mathbf{P}}$, соответственно.

Пусть $\mathbf{M} = \mathbf{M}([0, \infty))$ — множество всех (возможно, несобственных) вероятностных мер на $[0, \infty)$, снабженное топологией слабой сходимости, $\mathbf{M}_+$ — подмножество мер $\mathcal{M}$ в $\mathbf{M}$ с $\mathcal{M}(\{0\}) = 0$. Обозначим $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\{0, 1, \dots\})$ множество всех мер $\mu \in \mathbf{M}$ с носителями, принадлежащими множеству $\{0, 1, \dots\}$, и положим $\mathbf{m}_+ = \mathbf{m} \cap \mathbf{M}_+$. С каждой мерой $\mu \in \mathbf{m}$ мы свяжем соответствующую ей производящую функцию

$$h(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k) s^k$$

и для последовательности производящих функций

$$h^{(n)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{(n)}(k) s^k, \quad n \in \mathbf{N}_0$$

(здесь и далее верхний индекс используется для обозначения номера серии, а не порядка производной) будем писать $h^{(n)}(s) \xrightarrow{w} h(s)$, $s \in [0, 1)$, при $n \rightarrow \infty$, если $\mu^{(n)} \xrightarrow{w} \mu$, $n \rightarrow \infty$.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 мы исследуем структуру редуцированного критического ветвящегося процесса в случайной среде в моменты времени, близкие к точке глобального минимума сопровождающего случайного блуждания, и устанавливаем сходимость конечномерных распределений процесса $\{Z(k, n), 0 \leq k \leq n\}$ к конечномерным распределениям некоторого неоднородного ветвящегося процесса. В частности, мы покажем, что ближайший общий предок всех частиц, существующих в процессе в момент времени n , расположен «неподалеку» от момента $\tau(n)$ глобального минимума сопровождающего случайного блуждания на интервале $[0, n]$. В разделе 3 мы изучим структуру редуцированного критического процесса в случайной среде в моменты времени, находящиеся значительно правее точки $\tau(n)$. Наконец, в разделах 4 и 5 мы применим результаты, полученные в разделах 2 и 3, к исследованию структуры процесса $\{Z([nt], n), 0 \leq t \leq 1\}$.

2. Поведение редуцированного процесса вблизи точки глобального минимума сопровождающего случайного блуждания. В этом разделе мы изучим (в рамках quenched approach) структуру редуцированного процесса $\{Z(k, n), 0 \leq k \leq n\}$ в случайной среде вблизи момента $\tau(n)$ глобального минимума сопровождающего случайного блуждания на отрезке $[0, n]$ при $n \rightarrow \infty$. В качестве следствия наших результатов мы найдем распределение расстояния до ближайшего общего предка всех частиц, существующих в процессе в момент времени n .

Положим

$$\begin{aligned} f_{k,n}(s) &:= f_k(f_{k+1}(\dots(f_{n-1}(s))\dots)), & 0 \leq k \leq n-1, & & f_{n,n}(s) &:= s, \\ f_{n,m}(s) &:= f_{n-1}(f_{n-2}(\dots(f_m(s))\dots)), & n \geq m+1. & \end{aligned}$$

Ниже мы приводим несколько результатов, установленных в [10], на которые будем ссылаться в дальнейшем, предполагая при этом, что пара $\{f_n^-, f_n^+\}_{n \geq 0}$ задана на $(\Omega^- \times \Omega^+, \mathcal{F}^- \times \mathcal{F}^+)$ и что ей соответствует пара сопровождающих случайных блужданий $\{S_n^-, S_n^+\}_{n \geq 0}$. Сформулируем необходимые нам утверждения.

Если выполнены условия A1–A2, то для любого $m \in \mathbf{N}_0$ существует предел

$$q_m^+ := \lim_{n \rightarrow \infty} f_{m,n}^+(0) < 1 \quad (2)$$

$\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. (далее мы для краткости вместо q_0^+ будем писать q^+); более того, если положить

$$\zeta_{l,m}^-(s) := \frac{1 - f_{l,m}^-(s)}{e^{S_l^- - S_m^-}}, \quad m \in \mathbf{N}_0, \quad l \geq m+1, \quad (3)$$

то $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. существует и является положительным предел

$$\zeta_{\infty,m}^-(s) := \lim_{l \rightarrow \infty} \zeta_{l,m}^-(s) \leq 1, \quad (4)$$

причем

$$\lim_{s \uparrow 1} \zeta_{\infty,m}^-(s) = 0. \quad (5)$$

Для краткости положим $\zeta_l^-(s) := \zeta_{l,0}^-(s)$ и $\zeta^-(s) := \zeta_{\infty,0}^-(s)$. Заметим, что согласно (2)–(4) $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. предел

$$\zeta := \lim_{\min(l,r) \rightarrow \infty} \zeta_l^-(f_{0,r}^+(0)) = \zeta^-(q^+) \quad (6)$$

существует, положителен и не превосходит единицы. Пусть

$$\begin{aligned} h_{m,\pi}^{(n)}(s) &= h_m^{(n)}(s) := \mathbf{E}_\pi[s^{Z(\tau(n)+m,n)} \mid Z(n) > 0] \\ &:= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_m^{(n)}(k) s^k, \quad m \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Для $m \geq 0$ положим

$$h_m(s) := 1 - \frac{\zeta^-(f_{0,m}^+(1 - (1-s)(1-q_m^+)))}{\zeta}, \quad (7)$$

$$h_{-m}(s) := 1 - \frac{\zeta_{\infty,m}^-(1 - (1-s)(1-f_{m,0}^-(q^+)))}{e^{S_m^-} \zeta}. \quad (8)$$

Нам будет удобно записывать $h_m(s)$, $m \in \mathbf{Z}$, в виде

$$h_m(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \mu_m(k) s^k. \quad (9)$$

Ниже мы будем трактовать $\mu_m^{(n)}$ и μ_m как случайные меры, распределения которых на $\mathbf{m}$ индуцируются последовательностями сред, выбранных согласно вероятностным мерам $\mathbf{P}$ и $\hat{\mathbf{P}}$, соответственно. Для этих случайных объектов будем обозначать через $\mu_m^{(n)} \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \mu_m$, $n \rightarrow \infty$, следующий вид слабой сходимости случайных мер $\mu_m^{(n)}$ к μ_m при $n \rightarrow \infty$: для любой неслучайной ограниченной функции $J: \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{R}$ и любой неслучайной непрерывной функции $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ с компактным носителем

$$\mathbf{E}[g(\mu_m^{(n)}[J])] \longrightarrow \hat{\mathbf{E}}[g(\mu_m[J])], \quad n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Здесь для меры $\mu \in \mathbf{m}$ и функции $J: \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{R}$ мы полагаем $\mu[J] := \sum_{k \geq 0} J(k) \mu(k)$.

Иногда нам будет удобнее записывать (10) в терминах соответствующих производящих функций в виде $h_m^{(n)}(s) \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} h_m(s)$, $s \in [0, 1)$, $n \rightarrow \infty$. Эти же обозначения будут использоваться и в других аналогичных ситуациях.

Теперь мы можем сформулировать условную предельную теорему (в рамках quenched approach) о распределении числа частиц в редуцированном процессе в моменты времени, расположенные вблизи точки глобального минимума сопровождающего случайного блуждания.

Теорема 1. Если выполнены условия A1–A2, то для любого $t \in \mathbf{Z}$

$$\mu_m^{(n)} \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \mu_m, \quad n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

или, что то же самое,

$$h_m^{(n)}(s) \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} h_m(s), \quad s \in [0, 1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что для $t \geq 0$

$$h_m^{(n)}(s) = 1 - \frac{1 - f_{0, \tau(n)}(f_{\tau(n), \tau(n)+m}(1 - (1-s)(1 - f_{\tau(n)+m, n}(0))))}{1 - f_{0, \tau(n)}(f_{\tau(n), n}(0))}.$$

Ясно, что

$$\mathbf{E}[h_m^{(n)}(s) \mid \tau(n) = l] = \mathbf{E}[h_m^{(l, n-l)}(s) \mid \mathcal{A}_{l, n-l}], \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} h_m^{(l, n-l)}(s) &:= 1 - \frac{1 - f_{l, 0}^-(f_{0, m}^+(1 - (1-s)(1 - f_{m, n-l}^+(0))))}{1 - f_{l, 0}^-(f_{0, n-l}^+(0))} \\ &= 1 - \frac{\zeta_l^-(f_{0, m}^+(1 - (1-s)(1 - f_{m, n-l}^+(0))))}{\zeta_l^-(f_{0, n-l}^+(0))} \\ &=: \sum_{k=1}^{\infty} \mu_m^{(l, n-l)}(k) s^k, \end{aligned}$$

а $((f_n^-)_{n \geq 0}, (f_n^+)_{n \geq 0})$ — пара независимых последовательностей независимых одинаково распределенных производящих функций, заданных на $(\Omega^- \times \Omega^+, \mathcal{F}^- \times \mathcal{F}^+, \mathbf{P}^- \times \mathbf{P}^+)$. Фактически, равенство (13) означает, что для любого множества $\mathcal{B} \subseteq \mathbf{N}$

$$\{\mu_m^{(n)}(\mathcal{B}) \mid \tau(n) = l\} \stackrel{d}{=} \{\mu_m^{(l, n-l)}(\mathcal{B}) \mid \mathcal{A}_{l, n-l}\}. \quad (14)$$

Как мы знаем из (3)–(6), (7) и (9), $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. существует предел

$$\lim_{\min(l, n-l) \rightarrow \infty} h_m^{(l, n-l)}(s) = 1 - \frac{\zeta^-(f_{0,m}^+(1 - (1-s)(1 - q_m^+)))}{\zeta} = h_m(s),$$

или, что то же самое, $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. $\mu_m^{(l, n-l)} \xrightarrow{w} \mu_m$ при $\min(l, n-l) \rightarrow \infty$. Следовательно, для любой неслучайной ограниченной функции $J: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ и любой неслучайной непрерывной функции $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ с компактным носителем

$$\lim_{\min(l, n-l) \rightarrow \infty} g(\mu_m^{(l, n-l)}[J]) = g(\mu_m[J]) \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

Для того, чтобы вывести отсюда (12) и (11) для $m \in \mathbf{N}_0$, достаточно заметить, что ввиду (14)

$$\mathbf{E}[g(\mu_m^{(n)}[J]) \mid \tau(n) = l] = (\mathbf{E}^- \times \mathbf{E}^+)[g(\mu_m^{(l, n-l)}[J]) \mid \mathcal{A}_{l, n-l}],$$

и применить лемму 4 из [10].

Аналогично, для $m > 0$

$$h_{-m}^{(n)}(s) = 1 - \frac{1 - f_{0, \tau(n)-m}(1 - (1-s)(1 - f_{\tau(n)-m, \tau(n)}(f_{\tau(n), n}(0))))}{1 - f_{0, n}(0)}$$

и соотношение (13) по-прежнему справедливо, где теперь

$$\begin{aligned} h_{-m}^{(l, n-l)}(s) &:= 1 - \frac{1 - f_{l, m}^-(1 - (1-s)(1 - f_{m, 0}^-(f_{0, n-l}^+(0))))}{1 - f_{l, 0}^-(f_{0, n-l}^+(0))} \\ &= 1 - \frac{\zeta_{l, m}^-(1 - (1-s)(1 - f_{m, 0}^-(f_{0, n-l}^+(0))))}{\zeta_l^-(f_{0, n-l}^+(0))}. \end{aligned}$$

Ввиду (3)–(6) и (8) $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. существует предел

$$\lim_{\min(l, n-l) \rightarrow \infty} h_{-m}^{(l, n-l)}(s) = 1 - \frac{\zeta_{\infty, m}^-(1 - (1-s)(1 - f_{m, 0}^-(q^+)))}{e^{S_m^-} \zeta} = h_{-m}(s),$$

что и завершает доказательство соотношения (11) для всех m .

Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает следующее интересное следствие о распределении случайной величины $B(n) = \max\{0 \leq k \leq n: Z(k, n) = 1\}$, называемой моментом рождения ближайшего общего предка всех частиц, существующих в популяции в момент времени n .

Следствие 1. Если выполнены условия A1–A2, то для любого $m \in \mathbf{N}_0$

$$R_{-m} := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\pi(B(n) \geq \tau(n) - m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\pi(Z(\tau(n) - m, n) = 1) \\ \stackrel{d}{=} h'_{-m}(0) = (\zeta_{\infty, m}^-(s))'|_{s=f_{m,0}^-(q^+)}(1 - f_{m,0}^-(q^+)) \quad (15)$$

и

$$R_m := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\pi(B(n) \geq \tau(n) + m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\pi(Z(\tau(n) + m, n) = 1) \\ \stackrel{d}{=} h'_m(0) = (\zeta^-(f_{m,0}^+(s)))'|_{s=q_m^+}(1 - q_m^+). \quad (16)$$

Более того, с вероятностью 1

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R_{-m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\pi(Z(\tau(n) - m, n) = 1) = 1, \quad (17)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\pi(Z(\tau(n) + m, n) = 1) = 0. \quad (18)$$

Доказательство. Соотношения (15) и (16) несложно получить из теоремы 1 прямыми вычислениями.

Для доказательства (17) и (18) достаточно показать, что $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h_{-m}(s) = s \quad \text{и} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(s) = 0. \quad (19)$$

Чтобы проверить первое из этих предельных соотношений, заметим, что согласно (3)–(6)

$$e^{-S_m^-} \zeta_{\infty, m}^-(1 - (1 - s)(1 - f_{m,0}^-(q^+))) \leq (1 - s) e^{-S_m^-} (1 - f_{m,0}^-(q^+)) \\ \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (1 - s) \zeta \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

Следовательно, $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н.

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} h_{-m}(s) = \liminf_{m \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{\zeta_{\infty, m}^-(s(1 - f_{m,0}^-(q^+)) + f_{m,0}^-(q^+))}{e^{S_m^-} \zeta} \right] \geq s. \quad (20)$$

С другой стороны, ввиду (5) для $m > 0$

$$h_{-m}(1) = 1 - \frac{\zeta_{\infty, m}^-(1)}{e^{S_m^-} \zeta} = 1 \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.},$$

и из (2)–(6) имеем

$$h_{-m}(0) = 1 - \frac{\zeta_{\infty, m}^-(f_{m,0}^-(q^+))}{e^{S_m^-} \zeta} = 1 - \frac{1}{e^{S_m^-} \zeta} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1 - f_{l,m}^-(f_{m,0}^-(q^+))}{e^{S_l^- - S_m^-}} \\ = 1 - \frac{1}{\zeta} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1 - f_{l,0}^-(q^+)}{e^{S_l^-}} = 0 \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

Таким образом, для $m > 0$ $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н.

$$h_{-m}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{-m}(k) s^k \leq s.$$

Отсюда и из (20) следует первое из соотношений в (19).

Для доказательства второго заметим, что в соответствии с (2) $q_m^+ < 1$ $\hat{\mathbf{P}}^+$ -п.н., и, кроме того, в силу предложения 3.1 в [4] (см., в частности, формулу (3.6)) имеет место соотношение

$$\sum_{i=0}^{\infty} (1 - (f_i^+)'(0)) = \infty \quad \hat{\mathbf{P}}^+ \text{-п.н.}$$

Отсюда, согласно теореме 5 работы [1], следует, что для всех $s \in [0, 1)$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_{0,m}^+(s) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{0,m}^+(0) = q^+ \quad \hat{\mathbf{P}} \text{-п.н.}$$

и, таким образом, $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н.

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(s) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{\zeta^-(f_{0,m}^+(1 - (1-s)(1-q_m^+)))}{\zeta} \right] \\ &= 1 - \frac{\zeta^-(\lim_{m \rightarrow \infty} f_{0,m}^+(1 - (1-s)(1-q_m^+)))}{\zeta} \\ &= 1 - \frac{\zeta^-(q^+)}{\zeta} = 0. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

З а м е ч а н и е 1. Следствие 1 допускает следующую неформальную интерпретацию. Если популяция выжила к моменту времени $n \rightarrow \infty$, то момент рождения ближайшего общего предка всех частиц, существующих в момент времени n , расположен в окрестности точки $\tau(n)$. Так как при выполнении условия $A1$ $\tau(n)n^{-1}$ сходится по распределению при $n \rightarrow \infty$ к случайной величине, распределенной согласно обобщенному закону арксинуса на интервале $[0, 1]$, то в рассматриваемом нами случае полученные результаты разительно отличаются от соответствующих результатов для обычных критических ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона, в которых расстояние до ближайшего общего предка, нормированное на n , имеет равномерное распределение на интервале $[0, 1]$ (см., например, [19]).

Рассмотрим теперь распределение редуцированного процесса в окрестности точки $\tau(n)$ более детально. Для этого введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} w_{k,n,\pi}(s) &= w_{k,n}(s) := \mathbf{E}_{\pi}[s^{Z(k+1,n)} \mid Z(n) > 0, Z(k) = 1] \\ &= \mathbf{E}_{\pi}[s^{Z(k+1,n)} \mid Z(k,n) = 1], \quad 0 \leq k < n, \end{aligned} \quad (21)$$

и $w_{n,n}(s) := 1$. Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} w_{k,n}(s) &= \frac{f_k(f_{k+1,n}(0) + s(1 - f_{k+1,n}(0))) - f_{k,n}(0)}{1 - f_{k,n}(0)} \\ &= 1 - \frac{1 - f_k(1 - (1-s)(1 - f_{k+1,n}(0)))}{1 - f_{k,n}(0)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Для $0 \leq \tau(n) + m \leq n$ положим

$$a_m^{(n)}(s) := w_{\tau(n)+m,n}(s) = \mathbf{E}_\pi [s^{Z(\tau(n)+m+1,n)} \mid Z(\tau(n) + m, n) = 1] \quad (23)$$

и для $m \in \mathbf{N}_0$ обозначим

$$a_{-m}(s) := \frac{f_m^-(f_{m-1,0}^-(q^+) + s(1 - f_{m-1,0}^-(q^+))) - f_{m,0}^-(q^+)}{1 - f_{m,0}^-(q^+)},$$

$$a_m(s) := \frac{f_m^+(q_{m+1}^+ + s(1 - q_{m+1}^+)) - q_m^+}{1 - q_m^+}.$$

Следующая теорема описывает распределение числа частиц в редуцированном процессе, построенном по ветвящемуся процессу, порожденному одной частицей, родившейся в момент времени, расположенный вблизи точки глобального минимума сопровождающего случайного блуждания.

Теорема 2. Если выполнены условия A1–A2, то для любого $m \in \mathbf{Z}$

$$a_m^{(n)}(s) \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} a_m(s), \quad s \in [0, 1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Для доказательства этой теоремы к соотношениям (23) и (22) нужно применить (с незначительными изменениями) рассуждения, проводившиеся при доказательстве теоремы 1. Детали необходимых аргументов мы опускаем.

Пример. Нетрудно показать, используя формулу (2.2) в [12], что если выполнены условия A1–A2 и мера $\mathbb{P}$ сконцентрирована на вероятностных производящих функциях геометрических распределений, т.е. на функциях, имеющих вид $f(s) = q(1 - ps)^{-1}$, $p + q = 1$, $pq > 0$, то $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н.

$$\zeta_{\infty,m}^-(0) = \left(\sum_{j=m}^{\infty} e^{S_j^-} \right)^{-1} < \infty,$$

$$\zeta_{\infty,0}^-(f_{0,m}^+(0)) = \left(\sum_{j=1}^{m-1} e^{-S_j^+} + \sum_{j=0}^{\infty} e^{S_j^-} \right)^{-1} < \infty,$$

и

$$\zeta = \left(\sum_{j=1}^{\infty} e^{-S_j^+} + \sum_{j=0}^{\infty} e^{S_j^-} \right)^{-1} < \infty \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

Из этих соотношений несложно вывести, что при $n \rightarrow \infty$ для $m \geq 0$

$$h_{-m}^{(n)}(s) \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \frac{s(\zeta_{\infty,m}^-(0) - \zeta)}{\zeta_{\infty,m}^-(0) - s\zeta} \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

и

$$h_m^{(n)}(s) \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \frac{s(\zeta_{\infty,0}^-(f_{0,m}^+(0)) - \zeta)}{\zeta_{\infty,0}^-(f_{0,m}^+(0)) - s\zeta} \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

В частности,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\pi(B(n) - \tau(n) = \pm m) \stackrel{d}{=} \zeta^{-1} e^{\mp S_m^\pm}.$$

Рассмотрим теперь конечномерные распределения процесса $\{Z(k, n), 0 \leq k \leq n\}$. Для $0 \leq k < l \leq n$ положим

$$V_{k,l}^{(n)}(s_{k+1}, \dots, s_l) := \mathbf{E}_\pi \left[\prod_{i=k+1}^l s_i^{Z(i,n)} \mid Z(k, n) = 1 \right].$$

Следующая лемма показывает, что процесс $\{Z(k, n), 0 \leq k \leq n\}$ может рассматриваться как неоднородный процесс Гальтона–Ватсона в случайной среде с производящими функциями $\{w_{k,n}(s), 0 \leq k \leq n\}$ (см. определение (21)).

Лемма 1. *Имеет место соотношение*

$$\begin{aligned} V_{k,l}^{(n)}(s_{k+1}, \dots, s_l) \\ = w_{k,n} \left(s_{k+1} w_{k+1,n} (s_{k+2} w_{k+2,n} (\dots (s_{l-1} w_{l-1,n} (s_l)) \dots)) \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Доказательство. Для $k = n-1$ и $l = n$ утверждение леммы следует из (22). Предполагая теперь, что $0 \leq k < n-1$ и $l = n$, и замечая, что для $j \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\pi \left[\prod_{i=k+2}^n s_i^{Z(i,n)} \mid Z(k, n) = 1; Z(k+1, n) = j \right] \\ = \mathbf{E}_\pi \left[\prod_{i=k+2}^n s_i^{Z(i,n)} \mid Z(k+1, n) = j \right] \\ = \left(\mathbf{E}_\pi \left[\prod_{i=k+2}^n s_i^{Z(i,n)} \mid Z(k+1, n) = 1 \right] \right)^j = \left(V_{k+1,n}^{(n)}(s_{k+2}, \dots, s_n) \right)^j, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} V_{k,n}^{(n)}(s_{k+1}, s_{k+2}, \dots, s_n) \\ = \mathbf{E}_\pi \left[s_{k+1}^{Z(k+1,n)} \mathbf{E}_\pi \left[\prod_{i=k+2}^n s_i^{Z(i,n)} \mid Z(k+1, n); Z(k, n) = 1 \right] \mid Z(k, n) = 1 \right] \\ = \mathbf{E}_\pi \left[s_{k+1}^{Z(k+1,n)} (V_{k+1,n}^{(n)}(s_{k+2}, \dots, s_n))^{Z(k+1,n)} \mid Z(k, n) = 1 \right] \\ = w_{k,n}(s_{k+1} V_{k+1,n}^{(n)}(s_{k+2}, \dots, s_n)). \end{aligned}$$

Отсюда, используя индукционный переход, легко получить утверждение леммы для $0 \leq k < l = n$. Полагая $s_{l+1} = \dots = s_n = 1$ в только что доказанном утверждении, мы приходим к нужному нам утверждению для случая $0 \leq k < l < n$. Лемма доказана.

Для $0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_p \leq n$ положим

$$W_{k_0, k_1, \dots, k_p}^{(n)}(s_1, \dots, s_p) := \mathbf{E}_\pi \left[\prod_{i=1}^p s_i^{Z(k_i, n)} \mid Z(k_0, n) = 1 \right].$$

Заметим, что

$$W_{k_0, k_1}^{(n)}(s) = 1 - \frac{1 - f_{k_0, k_1}(1 - (1 - s)(1 - f_{k_1, n}(0)))}{1 - f_{k_0, n}(0)}. \quad (25)$$

Из леммы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. Для любых $0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_p \leq n$

$$\begin{aligned} & W_{k_0, k_1, \dots, k_p}^{(n)}(s_1, s_2, \dots, s_p) \\ &= W_{k_0, k_1}^{(n)}\left(s_1 W_{k_1, k_2}^{(n)}\left(s_2 W_{k_2, k_3}^{(n)}(\dots (s_{p-1} W_{k_{p-1}, k_p}^{(n)}(s_p)) \dots)\right)\right). \end{aligned}$$

Для $m \in \mathbf{N}_0$ положим

$$\begin{aligned} w_{-m}(s) &:= \frac{f_m^-(f_{m-1,0}^-(q^+) + s(1 - f_{m-1,0}^-(q^+))) - f_{m,0}^-(q^+)}{1 - f_{m,0}^-(q^+)}, \\ w_m(s) &:= \frac{f_m^+(q_{m+1}^+ + s(1 - q_{m+1}^+)) - q_m^+}{1 - q_m^+}, \end{aligned}$$

и для $k < l$, где $k, l \in \mathbf{Z}$, обозначим

$$h_{k,l}(s_k, s_{k+1}, \dots, s_l) := h_k\left(s_k w_{k+1}(s_{k+1} w_{k+2}(\dots (s_{l-1} w_l(s_l)) \dots))\right). \quad (26)$$

Теперь мы можем сформулировать многомерный вариант теоремы 1.

Теорема 3. Если выполнены условия A1–A2, то для любого $m \in \mathbf{N}_0$

$$V_{\tau(n)-m, \tau(n)+m}^{(n)}(s_{-m}, s_{-(m-1)}, \dots, s_m) \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} h_{-m, m}(s_{-m}, s_{-(m-1)}, \dots, s_m).$$

Доказательство. Утверждение теоремы нетрудно вывести из леммы 1 и теорем 1 и 2, и мы опускаем подробное доказательство.

Мы завершим этот раздел следующим нестрогим описанием наших результатов. В силу следствия 1

$$\Delta_m := h'_m(0) - h'_{m+1}(0) \stackrel{d}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_\pi(B(n) = \tau(n) + m),$$

где, напомним, $B(n)$ — момент рождения ближайшего общего предка всех частиц, существующих в популяции в момент времени n . Теорема 3, следствие 1 и определение (26) показывают, что при $n \rightarrow \infty$ конечномерные распределения критического редуцированного процесса $\{Z(\tau(n) + m, n), m \in \mathbf{Z}\}$ в случайной среде сходятся (в смысле $w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})$ -сходимости) к соответствующим конечномерным распределениям следующего нестандартного ветвящегося процесса $\{\Xi(m), m \in \mathbf{Z}\}$ в случайной среде, заданного на вероятностном пространстве $(\Omega^- \times \Omega^+, \mathcal{F}^- \times \mathcal{F}^+, \hat{\mathbf{P}})$. Для каждого $m \in \mathbf{Z}$ производящая функция закона размножения частиц m -го поколения равняется $w_m(s)$. Процесс начинается в $-\infty$ с одной частицы, которая с вероятностью Δ_{m_0} умирает в момент времени $m_0 \in (-\infty, +\infty)$, производя потомство в соответствии с производящей

функцией $w_{m_0}(s)$. Начиная с этого момента процесс развивается как ветвящийся процесс в случайной среде, в котором частицы, существующие в момент времени $t > t_0$, размножаются по закону, задаваемому производящей функцией $w_m(s)$. Это описание еще раз подчеркивает существенное отличие наших результатов от соответствующих предельных результатов для обычных редуцированных докритических и критических процессов Гальтона–Ватсона, установленных в [19] и [15].

3. Свойства редуцированных процессов в моменты времени, расположенные существенно правее $\tau(n)$. В этом разделе мы изучим поведение величины $Z(\tau(n) + t, n)$ в ситуации, когда $t = t(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Для $0 \leq k \leq n$ положим

$$\beta_n(k) := \frac{1}{\mathbf{E}_\pi[Z(k, n) \mid Z(n) > 0]} = \frac{e^{-S_k}(1 - f_{0,n}(0))}{1 - f_{k,n}(0)}. \quad (27)$$

В частности,

$$\mathbf{E}_\pi[Z(n) \mid Z(n) > 0] = \frac{e^{S_n}}{1 - f_{0,n}(0)} = \frac{1}{\beta_n(n)}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \Phi^{(n)}(\lambda) &:= \mathbf{E}_\pi[e^{-\lambda Z(n)\beta_n(n)} \mid Z(n) > 0] \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathbf{P}_\pi(Z(n)\beta_n(n) \in dx \mid Z(n) > 0) =: \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathcal{M}^{(n)}(dx). \end{aligned}$$

Для меры $\mathcal{M} \in \mathbf{M}$ и функции $J: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ положим $\mathcal{M}[J] := \int J(x) \mathcal{M}(dx)$, если указанный интеграл существует.

Следующее утверждение является комбинацией следствия 1 и теоремы 1, доказанных в работе [10].

Теорема 4. *Если выполнены условия A1–A2, то существует случайная мера $\mathcal{M}$ (являющаяся с вероятностью 1 собственной и невырожденной) такая, что*

$$\mathcal{M}^{(n)} \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \mathcal{M}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (28)$$

или же, в терминах преобразований Лапласа,

$$\Phi^{(n)}(\lambda) \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \Phi(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathcal{M}(dx), \quad n \rightarrow \infty, \quad (29)$$

где (28) (так же, как и (29)) означает, что

$$\mathbf{E}[g(\mathcal{M}^{(n)}[J])] \rightarrow \hat{\mathbf{E}}[g(\mathcal{M}[J])], \quad n \rightarrow \infty,$$

для любых неслучайных непрерывных функций $J, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ с компактными носителями.

Для $m \in \mathbf{Z}$ обозначим

$$\mathcal{M}_m^{(n)}(dx) := \mathbf{P}_\pi \left(Z(\tau(n) + m, n) \beta_n(\tau(n) + m) \in dx \mid Z(n) > 0 \right) \quad (30)$$

и

$$Y_m^{(n)}(\lambda) := \mathbf{E}_\pi \left[e^{-\lambda Z(\tau(n) + m, n) \beta_n(\tau(n) + m)} \mid Z(n) > 0 \right] = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathcal{M}_m^{(n)}(dx),$$

где по определению $Z(\tau(n) + m, n) = Z(n, n) = Z(n)$, если $\tau(n) + m > n$, и $Z(\tau(n) + m, n) = Z(0)$, если $\tau(n) + m < 0$. Очевидно, что

$$Y_m^{(n)}(\lambda) = W_{0, \tau(n) + m}^{(n)}(e^{-\lambda \beta_n(\tau(n) + m)}). \quad (31)$$

Теорема 5. Пусть выполнены условия A1–A2. Если $n \geq m = m(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\mathcal{M}_m^{(n)} \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \mathcal{M}, \quad n \rightarrow \infty,$$

или, в терминах преобразований Лапласа,

$$Y_m^{(n)}(\lambda) \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \Phi(\lambda), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\mathcal{M}$ и $\Phi(\lambda)$ те же, что и в теореме 4.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется ряд вспомогательных утверждений. Для $l, m, k \in \mathbf{N}$, где $m \leq k$, введем следующее обозначение (вспомните соотношения (3)–(4)):

$$\Gamma(l, m, k) := \frac{e^{-S_m^+ - S_l^-} (1 - f_{l,0}^-(f_{0,k}^+(0)))}{1 - f_{m,k}^+(0)} = \frac{e^{-S_m^+} \zeta_l^-(f_{0,k}^+(0))}{1 - f_{m,k}^+(0)}.$$

Лемма 2. Если выполнены условия A1–A2, то $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Gamma(l, m, k) = 0.$$

Доказательство. Ясно, что

$$\Gamma(l, m, k) \leq e^{-S_m^+} (1 - f_{m,k}^+(0))^{-1}.$$

В силу леммы 5 работы [10] (см. также [12])

$$\frac{1}{1 - f_{m,k}^+(0)} \leq e^{-S_k^+ + S_m^+} + \sum_{j=m}^{k-1} \eta_{j+1}^+ e^{-S_j^+ + S_m^+},$$

где $\eta_{j+1}^+ = (f_j^+)''(1)/((f_j^+)'(1))^2$. Поэтому

$$\Gamma(l, m, k) \leq \sum_{j=m}^{\infty} (\eta_{j+1}^+ + 1) e^{-S_j^+}.$$

Согласно лемме 2.7 статьи [4],

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\eta_{j+1}^+ + 1) e^{-S_j^+} < \infty \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.} \quad (32)$$

Следовательно, $\lim_{m \rightarrow \infty} \Gamma(l, m, k) = 0$ $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. Лемма доказана.

Для $l, m, k \in \mathbf{N}$, где $m \leq k$, обозначим

$$R_m^{(l,k)}(\lambda) := 1 - \frac{1 - f_{l,0}^-(f_{0,m}^+(1 - (1 - e^{-\lambda\Gamma(l,m,k)})(1 - f_{m,k}^+(0))))}{1 - f_{l,0}^-(f_{0,k}^+(0))}. \quad (33)$$

Лемма 3. Если выполнены условия A1–A2, то $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н.

$$\lim_{\min(l,m) \rightarrow \infty} R_m^{(l,k)}(\lambda) = \Phi(\lambda).$$

Доказательство. Так как $m \leq k$, то соотношение (6) влечет

$$\lim_{\min(l,m) \rightarrow \infty} \frac{\zeta_l^-(f_{0,m}^+(0))}{\zeta_l^-(f_{0,k}^+(0))} = 1 \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

Из этого предельного представления и предыдущей леммы вытекает, что

$$\begin{aligned} (1 - e^{-\lambda\Gamma(l,m,k)})(1 - f_{m,k}^+(0)) &= \lambda\Gamma(l, m, k)(1 + \varepsilon_1(\lambda; l, m, k))(1 - f_{m,k}^+(0)) \\ &= \lambda e^{-S_m^+} \zeta_l^-(f_{0,k}^+(0))(1 + \varepsilon_1(\lambda; l, m, k)) \\ &= \lambda e^{-S_m^+} \zeta_l^-(f_{0,m}^+(0))(1 + \varepsilon_2(\lambda; l, m, k)), \end{aligned}$$

где $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. $\lim_{\min(l,m) \rightarrow \infty} \varepsilon_j(\lambda; l, m, k) = 0$, $j = 1, 2$, для любого $\lambda > 0$. Следовательно,

$$1 - (1 - e^{-\lambda\Gamma(l,m,k)})(1 - f_{m,k}^+(0)) = \exp \left\{ -\lambda e^{-S_m^+} \zeta_l^-(f_{0,m}^+(0))(1 + \varepsilon_3(\lambda; l, m, k)) \right\},$$

где $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. $\lim_{\min(l,m) \rightarrow \infty} \varepsilon_3(\lambda; l, m, k) = 0$ для любого $\lambda > 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} R_m^{(l,k)}(\lambda) &= 1 - \frac{1 - f_{l,0}^-(f_{0,m}^+(\exp\{-\lambda e^{-S_m^+} \zeta_l^-(f_{0,m}^+(0))(1 + \varepsilon_3(\lambda; l, m, k))\}))}{(1 - f_{l,0}^-(f_{0,m}^+(0)))(1 + \varepsilon_4(l, m, k))}, \quad (34) \end{aligned}$$

где $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. $\lim_{\min(l,m) \rightarrow \infty} \varepsilon_4(l, m, k) = 0$. Из соотношений (3.1) и (3.6) работы [10] (в слегка измененных обозначениях) следует, что $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. для всех $\lambda > 0$

$$\lim_{\min(l,m) \rightarrow \infty} \frac{1 - f_{l,0}^-(f_{0,m}^+(\exp\{-\lambda e^{-S_m^+} \zeta_l^-(f_{0,m}^+(0))\}))}{1 - f_{l,0}^-(f_{0,m}^+(0))} = 1 - \Phi(\lambda).$$

Это равенство и представление (34) влекут утверждение леммы.

Для $0 \leq m_1 < m_2 \leq k$ и $l \in \mathbf{N}_0$ положим

$$Q_{m_1, m_2}^{(l,k)}(\lambda) := 1 - \frac{1 - f_{m_1, m_2}^+(1 - (1 - e^{-\lambda\Gamma(l, m_2, k)})(1 - f_{m_2, k}^+(0)))}{1 - f_{m_1, k}^+(0)}. \quad (35)$$

Лемма 4. Если выполнены условия A1–A2, то для любого $\lambda > 0$

$$\lim_{m_1 \rightarrow \infty} \frac{\ln Q_{m_1, m_2}^{(l,k)}(\lambda)}{\Gamma(l, m_1, k)} = \lambda \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} & \frac{1 - f_{m_1, m_2}^+(1 - (1 - e^{-\lambda \Gamma(l, m_2, k)})(1 - f_{m_2, k}^+(0)))}{1 - f_{m_1, k}^+(0)} \\ & \leq \frac{e^{S_{m_2}^+ - S_{m_1}^+}(1 - e^{-\lambda \Gamma(l, m_2, k)})(1 - f_{m_2, k}^+(0))}{1 - f_{m_1, k}^+(0)} \\ & \leq \frac{\lambda e^{S_{m_2}^+ - S_{m_1}^+} \Gamma(l, m_2, k)(1 - f_{m_2, k}^+(0))}{1 - f_{m_1, k}^+(0)} = \lambda \Gamma(l, m_1, k), \end{aligned}$$

и, следовательно, дробь в (35) стремится к нулю $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. при $m_1 \rightarrow \infty$ согласно лемме 2. Применяя лемму 2 еще раз, мы видим, что

$$(1 - e^{-\lambda \Gamma(l, m_2, k)})(1 - f_{m_2, k}^+(0)) = \lambda e^{-S_{m_2}^+} \zeta_l^-(f_{0, k}^+(0))(1 + \varepsilon(\lambda, l, m_2, k)),$$

где $\lim_{m_2 \rightarrow \infty} \varepsilon(\lambda, l, m_2, k) = 0$ $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. Ввиду (32) $S_{m_2}^+ \rightarrow +\infty$ $\hat{\mathbf{P}}^+$ -п.н. при $m_2 \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$e^{-S_{m_2}^+} \zeta_l^-(f_{0, k}^+(0)) \leq e^{-S_{m_2}^+} \xrightarrow{m_2 \rightarrow \infty} 0 \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

Полученные результаты, монотонность функции $f_{m_1, m_2}^+(s)$ по s и эквивалентность $\ln(1 - x) \sim x$ при $x \rightarrow +0$ убеждают нас в том, что для доказательства леммы достаточно показать, что $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н.

$$\begin{aligned} & \lim_{m_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(l, m_1, k)} \frac{1 - f_{m_1, m_2}^+(1 - \lambda e^{-S_{m_2}^+} \zeta_l^-(f_{0, k}^+(0)))}{1 - f_{m_1, k}^+(0)} \\ & = \lim_{m_1 \rightarrow \infty} \frac{1 - f_{m_1, m_2}^+(1 - \lambda e^{-S_{m_2}^+} \zeta_l^-(f_{0, k}^+(0)))}{e^{-S_{m_1}^+} \zeta_l^-(f_{0, k}^+(0))} = \lambda. \end{aligned} \quad (36)$$

Согласно лемме 5 работы [10] (см. также [12]),

$$\begin{aligned} 1 - f_{m_1, m_2}^+(1 - x) &= (e^{S_{m_1}^+ - S_{m_2}^+} x^{-1} + D_{m_1, m_2}(x))^{-1} \\ &= e^{S_{m_2}^+ - S_{m_1}^+} x (1 + x e^{S_{m_2}^+ - S_{m_1}^+} D_{m_1, m_2}(x))^{-1}, \end{aligned} \quad (37)$$

где функция $D_{m_1, m_2}(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq D_{m_1, m_2}(x) \leq \sum_{j=m_1}^{m_2-1} \eta_{j+1}^+ e^{-(S_j^+ - S_{m_1}^+)} := D.$$

При $x = \lambda e^{-S_{m_2}^+} \zeta_l^-(f_{0, k}^+(0)) \leq \lambda e^{-S_{m_2}^+}$ указанные соотношения приводят к оценкам

$$1 \geq \frac{1 - f_{m_1, m_2}^+(1 - \lambda e^{-S_{m_2}^+} \zeta_l^-(f_{0, k}^+(0)))}{\lambda e^{-S_{m_1}^+} \zeta_l^-(f_{0, k}^+(0))} \geq (1 + \lambda e^{-S_{m_1}^+} D)^{-1}, \quad (38)$$

где в соответствии с леммой 2.7 работы [4]

$$e^{-S_{m_1}^+} D = e^{-S_{m_1}^+} \sum_{j=m_1}^{m_2-1} \eta_{j+1}^+ e^{-(S_j^+ - S_{m_1}^+)} \leq \sum_{j=m_1}^{\infty} \eta_{j+1}^+ e^{-S_j^+} \longrightarrow 0 \quad \widehat{\mathbf{P}}\text{-п.н.} \quad (39)$$

при $m_1 \rightarrow \infty$. Теперь равенство (36) следует из соотношений (37)–(39). Лемма доказана.

Для $p \geq 2$ и $0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_{p+1} \leq k$ положим

$$Q_{m_1, m_2, m_3}^{(l, k)}(\lambda_2, \lambda_3) := Q_{m_1, m_2}^{(l, k)} \left(\lambda_2 + \frac{\ln Q_{m_2, m_3}^{(l, k)}(\lambda_3)}{\Gamma(l, m_2, k)} \right)$$

и определим рекурсивно

$$\begin{aligned} & Q_{m_1, m_2, \dots, m_{p+1}}^{(l, k)}(\lambda_2, \dots, \lambda_{p+1}) \\ & := Q_{m_1, m_2, \dots, m_p}^{(l, k)} \left(\lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_p + \frac{\ln Q_{m_p, m_{p+1}}^{(l, k)}(\lambda_{p+1})}{\Gamma(l, m_p, k)} \right). \end{aligned}$$

Лемма 5. Если выполнены условия A1–A2, то $\widehat{\mathbf{P}}$ -п.н. для любых $p \geq 2$ и $\lambda_2, \dots, \lambda_p > 0$

$$\lim_{m_1 \rightarrow \infty} \frac{\ln Q_{m_1, m_2, \dots, m_p}^{(l, k)}(\lambda_2, \dots, \lambda_p)}{\Gamma(l, m_1, k)} = \sum_{j=2}^p \lambda_j.$$

Доказательство. Утверждение данной леммы следует из леммы 4 по индукции.

Лемма 6. Если выполнены условия A1–A2, то $\widehat{\mathbf{P}}$ -п.н. для любых $p \geq 2$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p > 0$ и $0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_p \leq k$

$$\lim_{\min(l, m_1) \rightarrow \infty} R_{m_1}^{(l, k)} \left(\lambda_1 + \frac{\ln Q_{m_1, m_2, \dots, m_p}^{(l, k)}(\lambda_2, \dots, \lambda_p)}{\Gamma(l, m_1, k)} \right) = \Phi \left(\sum_{j=1}^p \lambda_j \right).$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из лемм 5, 4 и 3.

Доказательство теоремы 5. Из (25) и (31) вытекает, что

$$\begin{aligned} Y_m^{(n)}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathcal{M}_m^{(n)}(dx) \\ &= 1 - \frac{1 - f_{0, \tau(n)+m}(1 - (1 - e^{-\lambda \beta_n(\tau(n)+m)})(1 - f_{\tau(n)+m, n}(0)))}{1 - f_{0, n}(0)}. \end{aligned} \quad (40)$$

Покажем, что для любых неслучайных непрерывных функций $J, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ с компактными носителями

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}[g(\mathcal{M}_m^{(n)}[J])] = \widehat{\mathbf{E}}[g(\mathcal{M}[J])]. \quad (41)$$

Несложно проверить, используя (40) и (33), что

$$\mathbf{E}[g(\mathcal{M}_m^{(n)}[J]) \mid \tau(n) = l] = \mathbf{E}[g(\mathcal{M}_m^{(l, n-l)}[J]) \mid \mathcal{A}_{l, n-l}],$$

где $\mathcal{M}_m^{(l,n-l)}$ — мера с преобразованием Лапласа $R_m^{(l,n-l)}(\lambda)$. Согласно лемме 3, $\widehat{\mathbf{P}}$ -п.н. $\mathcal{M}_m^{(l,n-l)}[J] \rightarrow \mathcal{M}[J]$ при $\min(l, m) \rightarrow \infty$. Отсюда и из леммы 3 работы [10] вытекает, что для любых неслучайных непрерывных функций $J, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ с компактными носителями

$$\begin{aligned} & \lim_{\min(l,m) \rightarrow \infty} \mathbf{E}[g(\mathcal{M}_m^{(n)}[J]) \mid \tau(n) = l] \\ &= \lim_{\min(l,m) \rightarrow \infty} \mathbf{E}[g(\mathcal{M}_m^{(l,n-l)}[J]) \mid \mathcal{A}_{l,n-l}] = \widehat{\mathbf{E}}[g(\mathcal{M}[J])]. \end{aligned} \quad (42)$$

Для завершения доказательства (41) осталось лишь применить при $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ формулу полной вероятности

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[g(\mathcal{M}_m^{(n)}[J])] &= \sum_{0 \leq l \leq n\varepsilon} \mathbf{E}[g(\mathcal{M}_m^{(l,n-l)}[J]) \mid \mathcal{A}_{l,n-l}] \mathbf{P}(\tau(n) = l) \\ &+ \sum_{n\varepsilon < l < n(1-\varepsilon)} \mathbf{E}[g(\mathcal{M}_m^{(l,n-l)}[J]) \mid \mathcal{A}_{l,n-l}] \mathbf{P}(\tau(n) = l) \\ &+ \sum_{n(1-\varepsilon) \leq l \leq n} \mathbf{E}[g(\mathcal{M}_m^{(l,n-l)}[J]) \mid \mathcal{A}_{l,n-l}] \mathbf{P}(\tau(n) = l), \end{aligned}$$

устремить $n \rightarrow \infty$, применить для оценки средней суммы равенство (42), а для оценки первой и последней сумм воспользоваться ограниченностью функции g и заметить, что согласно обобщенному закону арксинуса

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tau(n) \in [0, n\varepsilon] \cup [n(1-\varepsilon), n]) = 0.$$

Теорема 5 доказана.

Теперь мы получим многомерное обобщение теоремы 5. Пусть для $0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_p \leq n - \tau(n)$

$$Y_{m_1, \dots, m_p}^{(n)}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) := \mathbf{E}_\pi \left[\prod_{i=1}^p e^{-\lambda_i Z(\tau(n) + m_i, n)} \beta_n(\tau(n) + m_i) \mid Z(0, n) = 1 \right].$$

Полагая $s_i = s_i(\lambda_i, n) := \exp\{-\lambda_i \beta_n(\tau(n) + m_i)\}$, $i = 1, \dots, p$, несложно увидеть, что

$$Y_{m_1, \dots, m_p}^{(n)}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = W_{0, \tau(n) + m_1, \dots, \tau(n) + m_p}^{(n)}(s_1, \dots, s_p) \quad (43)$$

и, следовательно,

$$Y_{m_1, \dots, m_p}^{(n)}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = W_{0, \tau(n) + m_1}^{(n)}(s_1 W_{\tau(n) + m_1, \dots, \tau(n) + m_p}^{(n)}(s_2, \dots, s_p)). \quad (44)$$

Теорема 6. Пусть выполнены условия A1–A2. Если $m_1 = m_1(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$Y_{m_1, \dots, m_p}^{(n)}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \widehat{\mathbf{P}})} \Phi \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \right).$$

Доказательство. Случай $p = 1$ был рассмотрен в теореме 5. Предположим теперь, что $p \geq 2$. Обозначим $\mathcal{M}_{m_1, \dots, m_p}^{(n)}(dx_1, \dots, dx_p)$ меру с преобразованием Лапласа $Y_{m_1, \dots, m_p}^{(n)}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$. Покажем, что для любых неслучайных непрерывных функций $J: \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p$ и $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ с компактными носителями

$$\begin{aligned} \lim_{m_1(n) \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[g \left(\int J(x_1, \dots, x_p) \mathcal{M}_{m_1, \dots, m_p}^{(n)}(dx_1, \dots, dx_p) \right) \right] \\ = \widehat{\mathbf{E}} \left[g \left(\int J(x_1, \dots, x_p) \mathcal{M}(dx_1, \dots, dx_p) \right) \right], \end{aligned}$$

где $\mathcal{M}(dx_1, \dots, dx_p)$ — мера с преобразованием Лапласа $\Phi(\sum_{i=1}^p \lambda_i)$.

Используя (43), (25), (44) и следствие 2, можно показать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[g \left(\int J(x_1, \dots, x_p) \mathcal{M}_{m_1, \dots, m_p}^{(n)}(dx_1, \dots, dx_p) \right) \mid \tau(n) = l \right] \\ = \mathbf{E} \left[g \left(\int J(x_1, \dots, x_p) \mathcal{M}_{m_1, \dots, m_p}^{(l, n-l)}(dx_1, \dots, dx_p) \right) \mid \mathcal{A}_{l, n-l} \right], \end{aligned}$$

где $\mathcal{M}_{m_1, \dots, m_p}^{(l, n-l)}(dx_1, \dots, dx_p)$ — мера с преобразованием Лапласа

$$R_{m_1}^{(l, n-l)} \left(\lambda_1 + \frac{\ln Q_{m_1, m_2, \dots, m_p}^{(l, k)}(\lambda_2, \dots, \lambda_p)}{\Gamma(l, m_1, k)} \right).$$

Из леммы 6 следует, что $\widehat{\mathbf{P}}$ -п.н. при $\min(l, m_1) \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \int J(x_1, \dots, x_p) \mathcal{M}_{m_1, \dots, m_p}^{(l, n-l)}(dx_1, \dots, dx_p) \\ \xrightarrow{w} \int J(x_1, \dots, x_p) \mathcal{M}(dx_1, \dots, dx_p). \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 3 в [10] вытекает, что при выборе J и g в соответствии в нашими требованиями

$$\begin{aligned} \lim_{\min(l, m) \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[g \left(\int J(x_1, \dots, x_p) \mathcal{M}_{m_1, \dots, m_p}^{(l, n-l)}(dx_1, \dots, dx_p) \right) \mid \mathcal{A}_{l, n-l} \right] \\ = \widehat{\mathbf{E}} \left[g \left(\int J(x_1, \dots, x_p) \mathcal{M}(dx_1, \dots, dx_p) \right) \right]. \end{aligned}$$

Теперь для завершения доказательства теоремы 6 осталось повторить конец доказательства теоремы 5.

4. Редуцированные процессы в моменты времени nt , $0 < t < 1$. До сих пор мы изучали поведение редуцированного процесса или в окрестности случайной точки $\tau(n)$, или в моменты времени, находящиеся значительно правее этой случайной точки. Используя полученные результаты, мы можем теперь доказать условную предельную теорему, описывающую свойства редуцированного процесса в неслучайные (но растущие) моменты времени. Для $t \in (0, 1]$ положим

$$\mathcal{M}^{(n)}(t; dx) := \mathbf{P}_\pi(Z(nt, n) \beta_n(nt) \in dx \mid Z(n) > 0).$$

Пусть

$$\Phi^{(n)}(t, \lambda) := \mathbf{E}_\pi[e^{-\lambda Z(nt, n)\beta_n(nt)} \mid Z(n) > 0] = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mathcal{M}^{(n)}(t; dx).$$

Обозначим δ_1 вероятностную меру с единичным атомом в точке 1, и пусть τ — случайная величина, задаваемая соотношением (1).

Теорема 7. Если выполнены условия A1 и A2, то для любого $t \in (0, 1)$

$$\mathcal{M}^{(n)}(t; \cdot) \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \mathcal{M}I\{\tau \leq t\} + \delta_1 I\{\tau > t\}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где случайная мера $\mathcal{M}$ и случайная величина τ не зависят друг от друга, или, в терминах преобразований Лапласа,

$$\Phi^{(n)}(t, \lambda) \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \Phi(\lambda) I\{\tau \leq t\} + e^{-\lambda} I\{\tau > t\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (45)$$

З а м е ч а н и е 2. Можно показать, что если мера $\mathbb{P}$ сконцентрирована на множестве геометрических вероятностных производящих функций, то выражение, стоящее в правой части (45), имеет вид $(1 + \lambda)^{-1} I\{\tau \leq t\} + e^{-\lambda} I\{\tau > t\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 7. Для $\varepsilon > 0$ введем множество

$$\mathcal{C}_\varepsilon := \{|\tau(n) - nt| \leq nt\varepsilon\} \cup \{0 \leq \tau(n) \leq n\varepsilon\} \cup \{(1 - \varepsilon) \leq \tau(n) \leq n\}.$$

Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(n)}(t; \cdot) &= \mathcal{M}^{(n)}(t; \cdot) I\{n\varepsilon < \tau(n) < nt(1 - \varepsilon)\} + \mathcal{M}^{(n)}(t; \cdot) I\{\mathcal{C}_\varepsilon\} \\ &\quad + \mathcal{M}^{(n)}(t; \cdot) I\{nt(1 + \varepsilon) < \tau(n) < n(1 - \varepsilon)\}, \end{aligned}$$

что приводит к равенству

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[g(\mathcal{M}^{(n)}(t; \cdot)[J])] &= \mathbf{E}[g(\mathcal{M}_{nt-\tau(n)}^{(n)}[J]) I\{n\varepsilon < \tau(n) < nt(1 - \varepsilon)\}] \\ &\quad + \mathbf{E}[g(\mathcal{M}^{(n)}(t; \cdot)[J]) I\{\mathcal{C}_\varepsilon\}] \\ &\quad + \mathbf{E}[g(\mathcal{M}_{nt-\tau(n)}^{(n)}[J]) I\{nt(1 + \varepsilon) < \tau(n) < n(1 - \varepsilon)\}], \end{aligned}$$

где мера $\mathcal{M}_m^{(n)}$ та же, что и в (30). Ввиду теоремы 5 и обобщенного закона арксинуса

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[g(\mathcal{M}_{nt-\tau(n)}^{(n)}[J]) I\{nt\varepsilon < \tau(n) < nt(1 - \varepsilon)\}] \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[g(\mathcal{M}_{nt-\tau(n)}^{(n)}[J]) I\{nt\varepsilon < n - \tau(n) < nt(1 - \varepsilon)\}] \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=\lfloor nt\varepsilon \rfloor + 1}^{\lfloor nt(1-\varepsilon) \rfloor - 1} \mathbf{E}[g(\mathcal{M}_m^{(n)}[J]) \mid \tau(n) = nt - m] \mathbf{P}(\tau(n) = nt - m) \\ &= \mathbf{E}[g(\mathcal{M}[J])] \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbf{P}(nt\varepsilon < \tau(n) < nt(1 - \varepsilon)) \\ &= \mathbf{E}[g(\mathcal{M}[J])] \mathbf{P}(\tau \leq t). \end{aligned} \quad (46)$$

Используя обобщенный закон арксинуса еще раз, получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[g(\mathcal{M}^{(n)}(t; \cdot)[J]) I\{\mathcal{C}_\varepsilon\}] \\ & \leq \sup_x g(x) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\mathcal{C}_\varepsilon) \\ & = \sup_x g(x) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbf{P}(\tau \in [0, \varepsilon] \cup [t(1 - \varepsilon), t(1 + \varepsilon)] \cup (1 - \varepsilon, 1]) = 0. \end{aligned}$$

Наконец, аналогично (46)

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[g(\mathcal{M}_{nt-\tau(n)}^{(n)}[J]) I\{nt(1 + \varepsilon) < \tau(n) < n(1 - \varepsilon)\}] \\ & = \mathbf{E}[g(J(1))] \mathbf{P}(\tau \leq t) \end{aligned}$$

ввиду следствия 4 статьи [10] и следствия 1 настоящей работы, согласно которым

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\beta_n(nt) \notin [1 - \varepsilon, 1]; nt(1 + \varepsilon) < \tau(n) < n(1 - \varepsilon)) = 0.$$

Комбинация полученных оценок доказывает теорему 7.

Проводя похожие рассуждения, можно доказать следующую многомерную предельную теорему.

Теорема 8. Пусть $0 < t_1 < \dots < t_k \leq 1$. Если выполнены условия $A1$ и $A2$, то для любого набора $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k$, при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}_\pi \left[\exp \left\{ - \sum_{i=1}^k \lambda_i Z(nt_i, n) \beta_n(nt_i) \right\} \middle| Z_n > 0 \right] \xrightarrow{w(\mathbf{P}, \hat{\mathbf{P}})} \Phi \left(\sum_{i=i_\tau}^k \lambda_i \right) e^{-\sum_{i=1}^{i_\tau-1} \lambda_i},$$

где $i_\tau = \min\{i: \tau < t_i\}$.

З а м е ч а н и е 3. Применяя рассуждения, аналогичные использовавшимся при доказательстве следствия 1.3 в [6], можно показать, что если вероятностные производящие функции законов размножения являются геометрическими с вероятностью 1, то

$$\Phi \left(\sum_{i=i_\tau}^k \lambda_i \right) = \frac{1}{1 + \sum_{i=i_\tau}^k \lambda_i} \quad \hat{\mathbf{P}}\text{-п.н.}$$

Утверждение теоремы 8 допускает следующую не вполне строгую интерпретацию. Конечномерные распределения последовательности процессов $\{Z(nt, n) \beta_n(nt), 0 \leq t \leq 1\}$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к конечномерным распределениям процесса $\{Z_\infty(t), 0 \leq t \leq 1\}$, который с вероятностью 1 имеет лишь один скачок на интервале $[0, 1]$. А именно,

$$Z_\infty(t) = I\{\tau \leq t\} + Z_\infty I\{\tau > t\},$$

где τ — случайная точка, распределенная согласно обобщенному закону арксинуса с параметром ρ на интервале $[0, 1]$, а (случайное) преобразование Лапласа распределения случайной величины Z_∞ равно $\Phi(\lambda)$, причем

величины τ и Z_∞ независимы. В частности, если вероятностные производящие функции законов размножения частиц являются геометрическими с вероятностью 1, то $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. случайная величина Z_∞ имеет экспоненциальное распределение с параметром 1.

5. Случай устойчивых сопровождающих случайных блужданий. Теорема 7 и определение (27) показывают, что случайная величина $Z(nt, n)$ пропорциональна (с точностью до случайного положительного и конечного множителя) величине $\mathbf{E}_\pi[Z(nt, n) | Z(n) > 0] = 1/\beta_n(nt)$. Но что можно сказать об асимптотическом поведении нормирующей функции $\beta_n(nt)$, $0 < t < 1$, при $n \rightarrow \infty$? К сожалению, нам удалось ответить на этот вопрос лишь в случае, когда условие A1 заменено более сильным ограничением. Именно, будем предполагать, что распределение величин $X_i, i = 1, 2, \dots$, порождающих сопровождающее случайное блуждание ветвящегося процесса в случайной среде, принадлежит области притяжения устойчивого закона. Для более точного описания наших предположений обозначим $\mathcal{A} = \{\alpha, \theta\}$ подмножество в $\mathbf{R}^2$, задаваемое соотношением

$$\mathcal{A} := \{0 < \alpha < 1; |\theta| < 1\} \cup \{1 < \alpha < 2; |\theta| \leq 1\} \cup \{(1, 0); (2, 0)\}.$$

Пусть $C(\alpha, \theta)$ — множество функций распределения, принадлежащих области притяжения устойчивого закона с характеристической функцией

$$\chi(t) := \exp \left\{ -c|t|^\alpha \left(1 + i\theta \frac{t}{|t|} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right\}, \quad c > 0, \quad (\alpha, \theta) \in \mathcal{A}.$$

Условие A3. Существуют $(\alpha, \theta) \in \mathcal{A}$ такие, что $G(x) := \mathbf{P}\{X < x\} \in C(\alpha, \theta)$ и, кроме того, $\mathbf{E}X = 0$ при $1 < \alpha \leq 2$.

Заметим, что при выполнении условия A3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{S_n > 0\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\alpha} \operatorname{arctg} \left(-\theta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \right) \in (0, 1),$$

т.е. условие A1 Спичера–Дони также выполнено.

Теорема 9. Если выполнены условия A2–A3, то для любого $t \in (0, 1)$

$$\{e^{S_{\tau(nt, n)} - S_{\tau(n)}} \beta_n(nt) \mid \tau(n) < nt\} \xrightarrow{w} \frac{\zeta^-(q^+)}{\zeta^{*-}(q^{*+})}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $(\zeta^-(s), q^+) \stackrel{d}{=} (\zeta^{*-}(s), q^{*+})$ (см. (2)–(6)) и множество $\{\zeta^-(s), \zeta^{*-}(s), q^+, q^{*+}\}$ состоит из независимых элементов (случайных функций и случайных величин).

З а м е ч а н и е 4. Теоремы 9 и 7 показывают, что если условия A2–A3 выполнены и момент $\tau(n)$ расположен левее точки наблюдения nt , то $Z(nt, n)$ имеет порядок $e^{S_{\tau(nt, n)} - S_{\tau(n)}}$ (с точностью до случайного множителя, отделенного от нуля и бесконечности).

Появление условия АЗ требует введения дополнительных обозначений.

Известно [14], что при выполнении условия АЗ существует функция $l(n)$, медленно меняющаяся на бесконечности и такая, что для $w_n := n^{1/\alpha} l(n)$, $\Gamma := \min\{n \geq 1: S_n \geq 0\}$ и $\gamma := \min\{n \geq 1: S_n < 0\}$ имеет место следующая условная сходимость при $n \rightarrow \infty$, в пространстве $D[0, 1]$, оснащенном топологией Скорохода:

$$\left\{ \tilde{S}_n(t) := \frac{S_{nt}}{w_n}, 0 \leq t \leq 1 \mid \gamma > n \right\} \Rightarrow \{W^+(t), 0 \leq t \leq 1\}$$

и

$$\{\tilde{S}_n(t), 0 \leq t \leq 1 \mid \Gamma > n\} \Rightarrow \{W^-(t), 0 \leq t \leq 1\},$$

где W^+ и W^- — положительная и отрицательная извилины строго устойчивого процесса Леви порядка α .

Лемма 7. Пусть $\{T_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность равномерно ограниченных случайных величин таких, что для любого n случайная величина T_n измерима относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_n$, и пусть $\tilde{S}_n = \tilde{S}_n(1)$. Если выполнено условие АЗ, то

1) если $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n =: T$ существует $\hat{\mathbf{P}}^+$ -п.н., то

$$\mathcal{L}((T_n; \tilde{S}_n) \mid \gamma > n) \xrightarrow{w} \widehat{\mathcal{L}}^+(T) \mathcal{L}(W^+(1)), \quad n \rightarrow \infty; \quad (47)$$

2) если $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n =: T$ существует $\hat{\mathbf{P}}^-$ -п.н., то

$$\mathcal{L}((T_n; \tilde{S}_n) \mid \Gamma > n) \xrightarrow{w} \widehat{\mathcal{L}}^-(T) \mathcal{L}(W^-(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (48)$$

Доказательство. Докажем соотношение (47). Согласно лемме 9 работы [10], при выполнении условий леммы 7 для любого r

$$\mathcal{L}((T_r; \tilde{S}_n) \mid \gamma > n) \xrightarrow{w} \widehat{\mathcal{L}}^+(T_r) \mathcal{L}(W^+(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (49)$$

Далее, для непрерывных в $\mathbf{R}$ функций $0 \leq g_1(x) \leq c_1$ и $0 \leq g_2(x) \leq 1$ имеем

$$\left| \mathbf{E} \left[g_1(T_n) g_2(\tilde{S}_n) - g_1(T_r) g_2(\tilde{S}_n) \mid \gamma > n \right] \right| \leq \mathbf{E} \left[|g_1(T_n) - g_1(T_r)| \mid \gamma > n \right]. \quad (50)$$

Поскольку $\mathbf{P}^+$ -п.н. $\lim_{n \rightarrow \infty} |g_1(T_n) - g_1(T_r)| = |g_1(T) - g_1(T_r)|$, то в силу леммы 2.5 статьи [4] и условий нашей леммы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[|g_1(T_n) - g_1(T_r)| \mid \gamma > n \right] = \hat{\mathbf{E}}^+ [|g_1(T) - g_1(T_r)|]. \quad (51)$$

Отсюда, используя теорему об ограниченной сходимости и непрерывность функции g_1 , получаем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{E}}^+ [|g_1(T) - g_1(T_r)|] = \hat{\mathbf{E}}^+ [|g_1(T) - g_1(T)|] = 0. \quad (52)$$

Объединяя соотношения (49)–(52), находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[g_1(T_n) g_2(\tilde{S}_n) \mid \gamma > n] = \hat{\mathbf{E}}^+[g_1(T)] \mathbf{E}[g_2(W^+(1))],$$

что доказывает первую часть леммы.

Соотношение (48) может быть доказано при помощи аналогичных рассуждений.

Пусть $\mathbf{P}(t_1, t_2) := \mathbf{P}\{t_2^{1/\alpha} W_2^+(1) > -t_1^{1/\alpha} W_1^-(1)\}$, где W_1^- и W_2^+ — независимые отрицательная и положительная извилины строго устойчивого процесса Леви порядка α .

Лемма 8. Пусть $\{T_{r,l}\}_{r \geq 1, l \geq 1}$ — двойная последовательность равномерно ограниченных случайных величин таких, что для любых r, l случайная величина $T_{r,l}$ измерима относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_r^- \times \mathcal{F}_l^+$. Если выполнено условие АЗ и $\lim_{\min(l,r) \rightarrow \infty} T_{r,l} =: T$ существует $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н., то для любого $\delta \in (0, \frac{1}{2})$

$$\mathbf{E}[T_{nt_1, nt_2} \mid \{S_{nt_2}^+ > -S_{nt_1}^-\} \cap \mathcal{A}_{nt_1, nt_2}] \longrightarrow \hat{\mathbf{E}}[T], \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно по $0 < \delta \leq t_1, t_2 \leq 1 - \delta$.

Доказательство. Для фиксированного l имеем

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E}[T_{nt_1, nt_2} I\{S_{nt_2}^+ > -S_{nt_1}^-\} \mid \mathcal{A}_{nt_1, nt_2}] - \hat{\mathbf{E}}[T] \mathbf{P}(t_1, t_2) \right| \\ & \leq \left| \mathbf{E}[(T_{nt_1, nt_2} - T_{l,l}) I\{S_{nt_2}^+ > -S_{nt_1}^-\} \mid \mathcal{A}_{nt_1, nt_2}] \right| \\ & \quad + \left| \mathbf{E}[T_{l,l} I\{S_{nt_2}^+ > -S_{nt_1}^-\} \mid \mathcal{A}_{nt_1, nt_2}] - \hat{\mathbf{E}}[T_{l,l}] \mathbf{P}(t_1, t_2) \right| \\ & \quad + |\hat{\mathbf{E}}[T_{l,l}] - \hat{\mathbf{E}}[T]| \mathbf{P}(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (53)$$

Из леммы 10 работы [10] нетрудно вывести, что

$$\mathbf{E}[T_{l,l} I\{S_{nt_2}^+ > -S_{nt_1}^-\} \mid \mathcal{A}_{nt_1, nt_2}] \longrightarrow \hat{\mathbf{E}}[T_{l,l}] \mathbf{P}(t_1, t_2) \quad (54)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $0 < \delta \leq t_1, t_2 \leq 1 - \delta$. В силу условий доказываемой леммы

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |\hat{\mathbf{E}}[T_{l,l}] - \hat{\mathbf{E}}[T]| \mathbf{P}(t_1, t_2) \leq \lim_{l \rightarrow \infty} |\hat{\mathbf{E}}[T_{l,l}] - \hat{\mathbf{E}}[T]| \longrightarrow 0 \quad (55)$$

равномерно по $0 < \delta \leq t_1, t_2 \leq 1 - \delta$. Наконец,

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E}[(T_{l,l} - T_{nt_1, nt_2}) I\{S_{nt_2}^+ > -S_{nt_1}^-\} \mid \mathcal{A}_{nt_1, nt_2}] \right| \\ & \leq \mathbf{E}[|T_{l,l} - T_{nt_1, nt_2}| \mid \mathcal{A}_{nt_1, nt_2}], \end{aligned} \quad (56)$$

и, следуя доказательству леммы 3 статьи [10], нетрудно понять, что правая часть (56) стремится к нулю равномерно по $0 < \delta \leq t_1, t_2 \leq 1 - \delta$, если сначала $n \rightarrow \infty$, а затем $l \rightarrow \infty$. Для завершения доказательства леммы достаточно объединить соотношения (53)–(56) и заметить, что $\mathbf{P}(t_1, t_2) \geq \mathbf{P}(1 - \delta, \delta) > 0$ при $0 < \delta \leq t_1, t_2 \leq 1 - \delta$.

Пусть

$$\begin{aligned} u_1(nt) &:= \frac{1 - f_{0,\tau(nt)}(s)}{e^{S_{\tau(nt)}}}; & u_2(nt) &:= f_{\tau(nt),nt}(0); \\ u_3(nt) &:= \frac{1 - f_{nt,\tau(nt,n)}(s)}{e^{S_{\tau(nt,n)} - S_{nt}}}; & u_4(nt) &:= f_{\tau(nt,n),n}(0) \end{aligned}$$

и $\mathbf{u}(n) = \mathbf{u}(n, t) := (u_1(nt), u_2(nt), u_3(nt), u_4(nt))$. Вспоминая определения и свойства (2)–(4), введем четырехмерный вектор

$$\mathbf{u}(\infty) := (\zeta^-(s), q^+, \zeta^{*-}(s), q^{*+}),$$

компоненты которого независимы, причем $\zeta^{*-}(s) \stackrel{d}{=} \zeta^-(s)$, $q^{*+} \stackrel{d}{=} q^+$. Таким образом, для соответствующих множеств $\mathcal{C}_i, i = 1, 2, 3, 4$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{(\zeta^-(s), q^+, \zeta^{*-}(s), q^{*+}) \in (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4)\} \\ = \hat{\mathbf{P}}^-(\zeta^-(s) \in \mathcal{C}_1) \hat{\mathbf{P}}^+(q^+ \in \mathcal{C}_2) \hat{\mathbf{P}}^-(\zeta^-(s) \in \mathcal{C}_3) \hat{\mathbf{P}}^+(q^+ \in \mathcal{C}_4). \end{aligned}$$

Лемма 9. Если выполнены условия A2–A3, то для любого $t \in (0, 1)$

$$\{\mathbf{u}(n) \mid \tau(n) < nt\} \xrightarrow{w} \mathbf{u}(\infty), \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Ясно, что для $0 \leq k_1 < nt \leq k_2 \leq n$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(k_1, k_2, t, n) &:= \left\{ \min_{0 \leq j < nt} S_j \leq \min_{nt \leq j \leq n} S_j \right\} \\ &\cap \left\{ \min_{0 \leq l < k_1} S_l > S_{k_1}, \min_{k_1 \leq l < nt} S_l \geq S_{k_1} \right\} \\ &\cap \left\{ \min_{0 \leq l < k_2} S_l > S_{k_2}, \min_{k_2 \leq l < nt} S_l \geq S_{k_2} \right\} \\ &= \{\tau(n) = k_1, \tau(nt, n) = k_2\}. \end{aligned}$$

Полагая $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\exp\{-(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}(n))\}; \tau(n) < nt] \\ = \sum_{0 \leq k_1 < nt} \sum_{nt \leq k_2 \leq n} \mathbf{E}[\exp\{-(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}(n))\}; \mathcal{B}(k_1, k_2, t, n)]. \end{aligned}$$

Заметим, что, согласно обобщенному закону арксинуса, вклад в двойную сумму всех слагаемых, взятых по множеству

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\varepsilon(n) &:= \{0 \leq k_1 < nt\varepsilon\} \cup \{nt(1 - \varepsilon) \leq k_1 < nt\} \\ &\cup \{nt \leq k_2 < nt(1 + \varepsilon)\} \cup \{n(1 - \varepsilon) \leq k_2 \leq n\}, \end{aligned}$$

стремится к нулю, если сначала $n \rightarrow \infty$, а затем $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим четыре независимых реализации случайной среды $(f_k^{(i)})_{k \geq 0}$, $i = 1, 2, 3, 4$, соответствующие им независимые сопровождающие случайные блуждания $(S_k^{(i)})_{k \geq 0}$, $i = 1, 2, 3, 4$, вектор

$$\mathbf{u}^*(n) = \mathbf{u}^*(n, t, k_1, k_2) := (u_1^*(k_1), u_2^*(nt - k_1), u_3^*(k_2 - nt), u_4^*(n - k_2))$$

с независимыми компонентами

$$\begin{aligned} u_1^*(k_1) &:= \frac{1 - f_{k_1,0}^{(1)}(s)}{e^{S_{k_1}^{(1)}}} = \zeta_{k_1}^-(s), & u_2^*(nt - k_1) &:= f_{0,nt-k_1}^{(2)}(0), \\ u_3^*(k_2 - nt) &:= \frac{1 - f_{k_2-nt,0}^{(3)}(s)}{e^{S_{k_2-nt}^{(3)}}} := \zeta_{k_2-nt}^{*-}(s), & u_4^*(n - k_2) &:= f_{0,n-k_2}^{(4)}(0) \end{aligned}$$

и множество

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^*(k_1, k_2, t, n) &:= \{S_{nt-k_1}^{(2)} \geq -S_{k_2-nt}^{(3)}\} \\ &\cap \left\{ \max_{1 \leq j \leq k_1} S_j^{(1)} < 0, \min_{0 \leq j < nt-k_1} S_j^{(2)} \geq 0 \right\} \\ &\cap \left\{ \max_{1 \leq j \leq k_2-nt} S_j^{(3)} < 0, \min_{0 \leq j < n-k_2} S_j^{(4)} \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Используя принцип двойственности, несложно проверить, что

$$\mathbf{E}[\exp\{-(\lambda, \mathbf{u}(n))\}; \mathcal{B}(k_1, k_2, t, n)] = \mathbf{E}[\exp\{-(\lambda, \mathbf{u}^*(n))\}; \mathcal{B}^*(k_1, k_2, t, n)].$$

Обозначим $\Gamma^{(i)} := \min\{n \geq 1: S_n^{(i)} \geq 0\}$, $\gamma^{(i)} = \min\{n \geq 1: S_n^{(i)} < 0\}$ и положим

$$T_{nt-k_1, k_2-nt} := \exp\{-\lambda_2 u_2^*(nt - k_1) - \lambda_3 u_3^*(k_2 - nt)\}$$

и

$$\mathcal{B}_1^*(k_1, k_2, t, n) := \{S_{nt-k_1}^{(2)} \geq -S_{k_2-nt}^{(3)}\} \cap \{\gamma^{(2)} > nt - k_1\} \cap \{\Gamma^{(3)} > k_2 - nt\}.$$

В силу независимости рассматриваемых случайных блужданий, имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}[\exp\{-(\lambda, \bar{\mathbf{u}}^*(n))\}; \mathcal{B}^*(k_1, k_2, t, n)] \\ &= \mathbf{E}[\exp\{-\lambda_1 u_1^*(k_1)\} \mid \Gamma^{(1)} > k_1] \mathbf{E}[T_{nt-k_1, k_2-nt} \mid \mathcal{B}_1^*(k_1, k_2, t, n)] \\ &\quad \times \mathbf{E}[\exp\{-\lambda_4 u_4^*(n - k_2)\} \mid \gamma^{(4)} > n - k_2] \mathbf{P}(\mathcal{B}^*(k_1, k_2, t, n)). \quad (57) \end{aligned}$$

Мы знаем (см. (2)–(4)), что $\lim_{k \rightarrow \infty} u_i^*(k) = \zeta^-(s)$ $\hat{\mathbf{P}}^-$ -п.н. для $i = 1, 3$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} u_i^*(k) = q^+$ $\hat{\mathbf{P}}^+$ -п.н. для $i = 2, 4$. В частности, это означает, что $\hat{\mathbf{P}}$ -п.н. существует предел

$$T := \lim_{\min(nt-k_1, k_2-nt) \rightarrow \infty} T_{nt-k_1, k_2-nt} = e^{-\lambda_2 q^+ - \lambda_3 \zeta^-(s)},$$

и по лемме 8

$$\mathbf{E}[T_{nt-k_1, k_2-nt} \mid \mathcal{B}_1^*(k_1, k_2, t, n)] \longrightarrow \hat{\mathbf{E}}[e^{-\lambda_2 q^+ - \lambda_3 \zeta^-(s)}], \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно по

$$(k_1, k_2) \in \mathcal{C}_\varepsilon^*(n) := \{(l_1, l_2): l_1 \in [nt\varepsilon, nt(1-\varepsilon)], l_2 \in [nt(1+\varepsilon), n(1-\varepsilon)]\}.$$

Аналогично, в силу леммы 3 статьи [10]

$$\lim_{k_1 \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\exp\{-\lambda_1 u_1^*(k_1)\} \mid \Gamma^{(1)} > k_1] = \widehat{\mathbf{E}}^-[\exp\{-\lambda_1 \zeta^-(s)\}],$$

$$\lim_{n-k_2 \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\exp\{-\lambda_4 u_1^*(n-k_2)\} \mid \gamma^{(4)} > n-k_2] = \widehat{\mathbf{E}}^+[\exp\{-\lambda_4 q^+\}].$$

Следовательно, при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[\exp\{-(\lambda, \bar{u}^*(n))\} \mid \mathcal{B}^*(k_1, k_2, t, n)] \\ & \longrightarrow (\widehat{\mathbf{E}} \times \widehat{\mathbf{E}}) [\exp\{-\lambda_1 \zeta^-(s) - \lambda_2 q^+ - \lambda_3 \zeta^{*-}(s) - \lambda_4 q^{*+}\}] \\ & = \mathbf{E}[\exp\{-(\lambda, \bar{u}(\infty))\}] \end{aligned}$$

равномерно по $(k_1, k_2) \in \mathcal{C}_\varepsilon^*(n)$.

Таким образом, для любого $\delta > 0$ и всех достаточно больших n мы получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[\exp\{-(\lambda, \bar{u}(n))\}; \tau(n) < nt] \\ & = \sum_{0 \leq k_1 < nt} \sum_{nt \leq k_2 \leq n} \mathbf{E}[\exp\{-(\lambda, \bar{u}^*(n))\}; \mathcal{B}^*(k_1, k_2, t, n)] \\ & \leq \mathbf{P}(\mathcal{C}_\varepsilon(n)) + (1 + \delta) \mathbf{E}[\exp\{-(\lambda, \bar{u}(\infty))\}] \sum_{(k_1, k_2) \in \mathcal{C}_\varepsilon^*(n)} \mathbf{P}\{\mathcal{B}^*(k_1, k_2, t, n)\} \\ & = \mathbf{P}(\mathcal{C}_\varepsilon(n)) + (1 + \delta) \mathbf{E}[\exp\{-(\lambda, \bar{u}(\infty))\}] \mathbf{P}((\tau(n), \tau(nt, n)) \in \mathcal{C}_\varepsilon^*(n)). \end{aligned}$$

При помощи таких же рассуждений нетрудно получить аналогичную оценку снизу. Отсюда легко следует утверждение леммы, поскольку

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}((\tau(n), \tau(nt, n)) \in \mathcal{C}_\varepsilon^*(n)) = 1$$

и величина δ может быть выбрана сколь угодно малой.

Доказательство теоремы 9. Пусть

$$L(t, n) := \frac{e^{S_{\tau(nt, n)} - S_{nt}} (1 - f_{0, nt}(0))}{e^{S_{\tau(nt)}} (1 - f_{nt, n}(0))}.$$

Непосредственные вычисления дают

$$\alpha_n(nt) := e^{S_{\tau(nt, n)} - S_{\tau(n)}} \frac{\beta_n(nt)}{L(t, n)} = \frac{1 - f_{0, n}(0)}{1 - f_{0, nt}(0)}.$$

Согласно следствию 3 работы [10] для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\alpha_n(nt) - 1| > \varepsilon \mid \tau(n) < nt\} = 0.$$

Следовательно, для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что при $n \rightarrow \infty$

$$\{L(t, n) \mid \tau(n) < nt\} \xrightarrow{w} \frac{\zeta^-(q^+)}{\zeta^{*-}(q^{*+})}.$$

Но этот факт является очевидным следствием леммы 9.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Athreya K. B., Karlin S.* On branching processes with random environments. I. Extinction probabilities. — *Ann. Math. Statist.*, 1971, v. 42, № 5, p. 1499–1520.
2. *Athreya K. B., Karlin S.* On branching processes with random environments. II. Limit theorems. — *Ann. Math. Statist.*, 1971, v. 42, № 6, p. 1843–1858.
3. *Athreya K. B., Ney P. E.* *Branching Processes*. New York–Heidelberg: Springer-Verlag, 1972, 287 p.
4. *Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A.* Criticality for branching processes in random environment. — *Ann. Probab.*, 2005, v. 33, № 2, p. 645–673.
5. *Borovkov K. A., Vatutin V. A.* Reduced critical branching processes in random environment. — *Stochastic Process. Appl.*, 1997, v. 71, № 2, p. 225–240.
6. *Ватутин В. А.* Редуцированные ветвящиеся процессы в случайной среде: критический случай. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2002, т. 47, в. 1, с. 21–38.
7. *Vatutin V. A., Dyakonova E. E.* Reduced branching processes in random environment. — *Mathematics and Computer Science. II: Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities*. Ed. by B. Chauvin et al. Basel: Birkhäuser, 2002, p. 455–467.
8. *Vatutin V. A., Dyakonova E. E.* Yaglom type limit theorem for branching processes in random environment. — *Mathematics and Computer Science. III: Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities*. Ed. by M. Drmota et al. Basel: Birkhäuser, 2004, p. 375–385.
9. *Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е.* Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде. I: Предельные теоремы. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2003, т. 48, в. 2, с. 274–300.
10. *Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е.* Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде. II: конечномерные распределения. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, т. 49, в. 2, с. 231–268.
11. *Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е.* Ветвящиеся процессы в случайной среде и бутылочные горлышки в эволюции популяций. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, т. 51, в. 1, с. 22–46.
12. *Geiger J., Kersting G.* The survival probability of a critical branching process in random environment. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 2000, т. 45, в. 3, с. 607–615.
13. *Doney R. A.* Spitzer's condition and the ladder variables in random walks. — *Probab. Theory Related Fields*, 1995, v. 101, № 4, p. 577–580.
14. *Durrett R.* Conditioned limit theorems for some null recurrent Markov processes. — *Ann. Probab.*, 1978, v. 6, № 5, p. 798–828.
15. *Зубков А. М.* Предельные распределения расстояния до ближайшего общего предка. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1975, т. 20, в. 3, с. 614–623.
16. *Снуцер Ф.* *Принципы случайного блуждания*. М.: Мир, 1969, 472 с.
17. *Fleischmann K., Vatutin V. A.* Reduced subcritical branching processes in a random environment. — *Adv. Appl. Probab.*, 1999, v. 31, № 1, p. 88–111.
18. *Fleischmann K., Prehn U.* Ein Grenzwertsatz für subkritische Verzweigungsprozesse mit endlich vielen Typen von Teilchen. — *Math. Nachr.*, 1974, v. 64, p. 357–362.
19. *Fleischmann K., Siegmund-Schultze R.* The structure of reduced critical Galton–Watson processes. — *Math. Nachr.*, 1977, v. 79, p. 233–241.

Поступила в редакцию
27.III.2006