Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Гаас, Пуассоновские предельные совместные распределения в схеме случайного размещения частиц двух типов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 2, 351–358

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp177>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:59:52

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2007 г.

ГААС В. В.*

ПУАССОНОВСКИЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОВМЕСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
В СХЕМЕ СЛУЧАЙНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ ДВУХ ТИПОВ¹⁾

Рассматривается схема независимых полиномиальных размещений частиц двух типов по ячейкам. Доказана теорема о сходимости совместных распределений чисел ячеек, которые содержат заданные числа частиц разных типов, к распределению случайного вектора с независимыми компонентами, имеющими пуассоновские распределения.

Ключевые слова и фразы: схема размещения частиц, совместное распределение, предельная теорема Пуассона.

1. Введение. В работе исследуется задача независимого размещения частиц двух типов по N ячейкам. Пусть $a_k^{(i)}$ — вероятность попадания частицы типа i в k -ю ячейку, $X_k^{(i)}(n_i)$ — число частиц типа i , попавших в k -ю ячейку после размещения n_i частиц типа i , а $\mu_r^{(i)}(n_i) = \sum_{k=1}^N I\{X_k^{(i)}(n_i) = r\}$ — количество ячеек, в которые попало r частиц типа i ($i = 1, 2, k = 1, \dots, N$). Для фиксированного набора $\{(r_{j,1}, r_{j,2}), j = 1, \dots, J\}$ пар неотрицательных целых чисел ниже описаны предельные при $N, n_1 = n_1(N), n_2 = n_2(N) \rightarrow \infty$, совместные распределения случайных величин

$$\mu_{r_{j,1}, r_{j,2}}(n_1, n_2) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^N I\{X_k^{(1)}(n_1) = r_{j,1}, X_k^{(2)}(n_2) = r_{j,2}\}, \quad j = 1, \dots, J,$$

т.е. чисел ячеек, в которых после размещения n_1 частиц типа 1 и n_2 частиц типа 2 оказалось $r_{j,1}$ частиц типа 1 и $r_{j,2}$ частиц типа 2. При этом предполагается, что

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq N} N a_k^{(i)} < C, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

и что для каждого $i = 1, 2$

$$\text{либо } n_i \max_{k=1, \dots, N} a_k^{(i)} \rightarrow 0, \quad (2a)$$

$$\text{либо } n_i \min_{k=1, \dots, N} a_k^{(i)} \rightarrow \infty. \quad (2b)$$

Будем говорить, что последовательность параметров $\{N, n_i, \{a_k^{(i)}\}\}$ лежит в левой области, если выполняется условие (2a), и в правой, если верно (2b). По аналогии с ситуацией размещения частиц одного типа можно ввести понятия центральной, левой

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: gaasv@inbox.ru

¹⁾ Работа поддержана Программой Отделения математических наук РАН «Современные проблемы теоретической математики», грантом НШ-4129.2006.1 Программы поддержки ведущих научных школ России и грантом РФФИ № 05-01-00035-а.

и правой промежуточных областей. Сами же выборочные статистики $\mu_{r_{j,1}, r_{j,2}}(n_1, n_2)$ будем называть двухтипными, а статистики вида $\mu_r^{(i)}(n_i)$ — однотипными.

Основной результат работы — теорема 2 — состоит в том, что при выполнении условий (1), (2) и некоторых условий на наборы пар $(r_{j,1}, r_{j,2})$ распределение вектора

$$\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_J) = (\mu_{r_{1,1}, r_{1,2}}(n_1, n_2), \dots, \mu_{r_{J,1}, r_{J,2}}(n_1, n_2))$$

сходится к распределению вектора с независимыми компонентами, имеющими пуассоновские распределения.

Впервые схема размещения частиц двух типов рассматривалась в [4], где методом перевала в левой и центральной областях были доказаны теоремы о пуассоновской и нормальной аппроксимациях распределений чисел ячеек, свободных от частиц одного или обоих типов. В [3] доказаны функциональные предельные теоремы для величин $X_k^{(i)}$ в центральной области. Результаты настоящей работы анонсированы в [1]. Они легко обобщаются на случай, когда размещаются частицы нескольких разных типов.

2. Условия сходимости к многомерному распределению Пуассона.

Сформулируем и докажем многомерное обобщение теоремы Севастьянова [5] о сходимости к распределению Пуассона на случай сумм зависимых случайных векторов. Аналогичное обобщение в несколько другой форме (приспособленное к доказательству сходимости конечномерных распределений нарастающих сумм зависимых индикаторов) было предложено В. Г. Михайловым в [2].

Пусть $\bar{\xi}^{(N)} = (\xi_1^{(N)}, \dots, \xi_J^{(N)})$, $N \geq 1$, — последовательность случайных векторов с целыми неотрицательными компонентами, каждый из которых представлен в виде

$$\bar{\xi}^{(N)} = \sum_{k=1}^N \bar{\eta}_k^{(N)}, \quad \bar{\eta}_k^{(N)} = (\eta_{1,k}^{(N)}, \dots, \eta_{J,k}^{(N)}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где компоненты $\eta_{j,k}^{(N)}$ ($j = 1, \dots, J$, $k = 1, \dots, N$) случайных векторов $\bar{\eta}_k^{(N)}$, $k = 1, \dots, N$, принимают лишь значения 0 и 1.

Для произвольного мультииндекса $\bar{m} = (m_1, \dots, m_J) \in \{0, 1, 2, \dots\}^J$ будем рассматривать упорядоченные наборы $\alpha_j = (\alpha_j(1), \dots, \alpha_j(m_j)) \in \{1, \dots, N\}^{m_j}$ ($\alpha_j = \emptyset$ при $m_j = 0$), $j = 1, \dots, J$, и составленный из них набор $\alpha = (\alpha_1(1), \dots, \alpha_1(m_1), \alpha_2(1), \dots, \alpha_J(m_J))$. Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\bar{m}, N) = \{1, \dots, N\}^{|\bar{m}|}$ — множество всех наборов α , соответствующих мультииндексу $\bar{m}$; здесь $|\bar{m}| = m_1 + \dots + m_J$.

Будем называть набор неповторным, если среди его элементов нет совпадающих. Пусть $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\bar{m}, N) \subset \mathbf{A}$ — множество таких наборов $\alpha(\bar{m}, N) = (\alpha_1, \dots, \alpha_J)$, что каждый набор α_j неповторный, а $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\bar{m}, N) \subset \mathbf{B}$ — множество неповторных наборов $\alpha = \alpha(\bar{m}, N)$. Далее, чтобы не усложнять формулы, мы не будем использовать верхний индекс (N) , связанный со схемой серий (3).

Для схемы серий (3) и произвольного набора α обозначим

$$b_k^{(j)} = \mathbf{P}\{\eta_{j,k} = 1\}, \quad \hat{b}_\alpha = \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^{m_j} b_{\alpha_j(k)}^{(j)}$$

и $b_\alpha = \mathbf{P}\{\eta_{j,\alpha_j(k)} = 1, j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, m_j\}$.

Если случайные величины $(\eta_{j,k}, j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, N)$ независимы, то $b_\alpha = \hat{b}_\alpha$.

Теорема 1. Пусть для схемы серий (3) выполняются условия

$$\max_{\substack{k=1, \dots, N \\ j=1, \dots, J}} b_k^{(j)} \rightarrow 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N b_k^{(j)} = \lambda_j \quad \text{при } j = 1, \dots, J, \quad (4)$$

для любого мультииндекса $\bar{m}$

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{B}(\bar{m}, N) \setminus \mathbf{C}(\bar{m}, N)} b_\alpha \rightarrow 0 \quad (5)$$

и существуют такие исключительные множества $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\overline{m}, N) \subset \mathbf{C}(\overline{m}, N)$, что

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{D}} b_{\alpha} \rightarrow 0, \quad \sum_{\alpha \in \mathbf{D}} \hat{b}_{\alpha} \rightarrow 0, \quad (6)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}} \left| \frac{b_{\alpha}}{\hat{b}_{\alpha}} - 1 \right| \rightarrow 0. \quad (7)$$

Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_j = s_j, j = 1, \dots, J\} = \prod_{j=1}^J \frac{\lambda_j^{s_j}}{s_j!} e^{-\lambda_j} \quad (8)$$

для любых наборов неотрицательных целых чисел $(s_1, \dots, s_J)$.

Доказательство. Покажем, что для любого мультииндекса $\overline{m} \in \{1, \dots, N\}^J$

$$\mathbf{E} \prod_{j=1}^J \xi_j^{[m_j]} \rightarrow \prod_{j=1}^J \lambda_j^{m_j}; \quad (9)$$

из (9) и формулы Тейлора для функции нескольких переменных следует, что $\mathbf{E} z_1^{\xi_1} \dots z_J^{\xi_J} \rightarrow \exp\{\sum_{j=1}^J (z_j - 1)\lambda_j\}$, а это эквивалентно утверждению теоремы. Нетрудно проверить, что для мультииндекса $\overline{m}$

$$\mathbf{E} \prod_{j=1}^J \xi_j^{[m_j]} = \sum_{\alpha \in \mathbf{B}} b_{\alpha}. \quad (10)$$

Разобьем эту сумму на 3 части:

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{B}} b_{\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathbf{B} \setminus \mathbf{C}} b_{\alpha} + \sum_{\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}} b_{\alpha} + \sum_{\alpha \in \mathbf{D}} b_{\alpha}. \quad (11)$$

Из (7) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_0 , что при $N > N_0$

$$(1 - \varepsilon) \hat{b}_{\alpha} \leq b_{\alpha} \leq (1 + \varepsilon) \hat{b}_{\alpha} \quad (12)$$

для любого $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}$. Тогда

$$(1 - \varepsilon) \sum_{\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}} \hat{b}_{\alpha} \leq \sum_{\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}} b_{\alpha} \leq (1 + \varepsilon) \sum_{\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}} \hat{b}_{\alpha}. \quad (13)$$

Первая и третья суммы в (13) стремятся к 0 при $N \rightarrow \infty$ по условиям (5) и (6). Далее, имеем

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}} \hat{b}_{\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathbf{A}} \hat{b}_{\alpha} - \sum_{\alpha \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{C}} \hat{b}_{\alpha} - \sum_{\alpha \in \mathbf{D}} \hat{b}_{\alpha}. \quad (14)$$

Так как по условию (4)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \mathbf{A}} \hat{b}_{\alpha} = \prod_{j=1}^J \lambda_j^{m_j}, \quad (15)$$

а в каждом наборе $\alpha \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{C}$ есть хотя бы 2 совпадающих элемента, то в силу (6)

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{C}} \hat{b}_{\alpha} \leq |\overline{m}| \max_{\substack{k=1, \dots, N \\ j=1, \dots, J}} b_k^{(j)} \left(\prod_{j=1}^J \lambda_j^{m_j} \right) \frac{1}{\min_j \lambda_j} \rightarrow 0, \quad (16)$$

если $\min_j \lambda_j > 0$, иначе в силу (15) $\sum_{\alpha \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{C}} \hat{b}_{\alpha} \leq \sum_{\alpha \in \mathbf{A}} \hat{b}_{\alpha} \rightarrow 0$. Тогда из (10), (11), (13)–(16) следует (9), что доказывает теорему.

3. Сходимость к пуассоновским распределениям. Докажем сходимость распределения вектора выборочных статистик к двумерному пуассоновскому распределению в левой и правой областях.

Теорема 2. Если при $N \rightarrow \infty$ для каждого $i = 1, 2$ выполнено условие (1) и одно из условий (2a) и (2b), а для случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_J)$ (где $\xi_j = \mu_{r_{j,1}, r_{j,2}}$ и все пары $(r_{j,1}, r_{j,2})$ с неотрицательными компонентами фиксированы и различны) выполнены условия

$$\mathbf{E}\xi_j \rightarrow \lambda_j \in (0, \infty), \quad (17)$$

то для любого набора $\bar{s} = (s_1, \dots, s_J) \in \{1, \dots, N\}^J$

$$\mathbf{P}\{\xi_j = s_j, j = 1, \dots, J\} \rightarrow \prod_{j=1}^J e^{-\lambda_j} \frac{\lambda_j^{s_j}}{s_j!}. \quad (18)$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1. Пусть $\eta_{j,k} = I(X_k^{(1)} = r_{j,1}, X_k^{(2)} = r_{j,2})$; тогда $\xi_j = \sum_{k=1}^N \eta_{j,k}$, $j = 1, \dots, J$. Построим исключительное множество $\mathbf{D}$ из таких наборов α , у которых хотя бы для одного элемента $\alpha_j(k)$ выполняется условие

$$a_{\alpha_j(k)}^{(1)} > (n_1)^{-3/4} \quad \text{или} \quad a_{\alpha_j(k)}^{(2)} > (n_2)^{-3/4}. \quad (19)$$

По определению

$$\begin{aligned} b_k^{(j)} &= \mathbf{P}\{X_k^{(1)} = r_{j,1}, X_k^{(2)} = r_{j,2}\} \\ &= C_{n_1}^{r_{j,1}} (a_k^{(1)})^{r_{j,1}} (1 - a_k^{(1)})^{n_1 - r_{j,1}} C_{n_2}^{r_{j,2}} (a_k^{(2)})^{r_{j,2}} (1 - a_k^{(2)})^{n_2 - r_{j,2}} \\ &\leq \prod_{i=1,2} \frac{(n_i a_k^{(i)})^{r_{j,i}} e^{-(n_i - r_{j,i}) a_k^{(i)}}}{r_{j,i}!}. \end{aligned} \quad (20)$$

Если выполнено условие (2a), то $e^{-(n_i - r_{j,i}) a_k^{(i)}} \leq 1$ при достаточно больших n_i , т.е.

$$\frac{(n_i a_k^{(i)})^{r_{j,i}} e^{-(n_i - r_{j,i}) a_k^{(i)}}}{r_{j,i}!} \leq \left(n_i \max_k a_k^{(i)} \right)^{r_{j,i}} \rightarrow 0, \quad n_i \rightarrow \infty. \quad (21a)$$

Если же выполнено условие (2b), то

$$\begin{aligned} \frac{(n_i a_k^{(i)})^{r_{j,i}} e^{-(n_i - r_{j,i}) a_k^{(i)}}}{r_{j,i}!} &\leq C_2 (n_i a_k^{(i)})^{r_{j,i}} e^{-n_i a_k^{(i)}} \\ &\leq C_2 \left(n_i \min_k a_k^{(i)} \right)^{r_{j,i}} e^{-n_i \min_k a_k^{(i)}} \rightarrow 0, \quad n_i \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (21b)$$

Из (20), (21a) и (21b) следует первое из соотношений (4).

В случае $\alpha \in \mathbf{B} \setminus \mathbf{C}$ существуют такие $j_1 \neq j_2$ и k_1, k_2 , что $\alpha_{j_1}(k_1) = \alpha_{j_2}(k_2)$. А в силу условий теоремы выполнено хотя бы одно из условий

$$r_{j_1,1} \neq r_{j_2,1}, \quad r_{j_1,2} \neq r_{j_2,2}. \quad (22)$$

Пусть, например, выполняется первое условие в (22). Тогда в ячейке с номером $\alpha_{j_1}(k_1) = \alpha_{j_2}(k_2)$, с одной стороны, должно оказаться $r_{j_1,1}$ частиц типа 1, с другой — $r_{j_2,1}$, чего в силу (22) быть не может. Таким образом,

$$b_\alpha = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbf{B} \setminus \mathbf{C}, \quad (23)$$

откуда следует условие (5) теоремы 1.

Пусть $F_i = \prod_{j=1}^J (r_{j,i}!)^{m_j}$, $M_i = \sum_{j=1}^J m_j r_{j,i}$, $M = M_1 + M_2$.

Если $\mathbf{D} \neq \emptyset$ и $\alpha \in \mathbf{D}$, то существуют такие i_0, j_0, k_0 , что $a_{\alpha_{j_0}(k_0)}^{(i_0)} > (n_{i_0})^{-3/4}$. Тогда $n_{i_0} a_{\alpha_{j_0}(k_0)}^{(i_0)} \geq n_{i_0}^{1/4} \rightarrow \infty$, т.е. выполнено (2b). Пусть $\mathbf{R}$ — множество индексов i , для которых выполняется (2b), а $n = \min_{i \in \mathbf{R}} n_i$, тогда

$$\begin{aligned} b_{\alpha_{j_0}(k_0)}^{(j_0)} &= \prod_{i=1,2} \mathbf{P}\{X_{\alpha_{j_0}(k_0)}^{(i)} = r_{j_0,i}\} \leq \mathbf{P}\{X_{\alpha_{j_0}(k_0)}^{(i_0)} = r_{j_0,i_0}\} \\ &\leq C_4 n_{i_0}^{r_{j_0,i_0}} (1 - n_{i_0}^{-3/4})^{n_{i_0}} \leq C_4 n_{i_0}^{r_{j_0,i_0}} e^{-n_{i_0}^{1/4}} \leq C_4 n^M e^{-n^{1/4}} \end{aligned} \quad (24)$$

при достаточно большом N , и так как $\hat{b}_\alpha = \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^{m_j} b_{\alpha_j(k)}^{(j)}$, то

$$\hat{b}_\alpha \leq C_4 n^M e^{-n^{1/4}}. \quad (25)$$

Из того, что $n_i > N$ для каждого $i \in \mathbf{R}$ при достаточно большом N и множество $\mathbf{R}$ ограничено, следует, что $n > N$ при достаточно больших N . Тогда при достаточно больших N в $\mathbf{D}$ содержится не более $N^{|\overline{m}|} \leq n^{|\overline{m}|}$ наборов (так как $|\overline{m}| = m_1 + \dots + m_J$), и в силу (25)

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{D}} \hat{b}_\alpha \leq C_4 n^{M+|\overline{m}|} e^{-n^{1/4}} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty. \quad (26)$$

При $\alpha \in \mathbf{C}$

$$b_\alpha = \prod_{i=1,2} \left(\frac{n_i^{[M_i]}}{F_i} \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^{m_j} (a_{\alpha_j(k)}^{(i)})^{r_{j,i}} \left(1 - \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{m_j} a_{\alpha_j(k)}^{(i)} \right)^{n_i - M_i} \right). \quad (27)$$

Так как каждый из сомножителей в правой части (27) не превосходит 1, а если $\alpha \in \mathbf{D}$, то $\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{m_j} a_{\alpha_j(k)}^{(i)} \geq n_i^{-3/4}$ хотя бы для одного $i = i_0$, то при достаточно больших N

$$b_\alpha \leq C_5 n_{i_0}^M (1 - n_{i_0}^{-3/4})^{n_{i_0}} \leq C_5 n^M e^{-n^{1/4}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{D}} b_\alpha \leq C_5 n^{M+|\overline{m}|} e^{-n^{1/4}} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Из (26) и (28) следует условие (6).

Для проверки условия (7) воспользуемся тем, что при $x \leq \frac{1}{2}$

$$-x - x^2 \leq \ln(1 - x) \leq -x. \quad (29)$$

Если $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}$, то $S_i = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{m_j} a_{\alpha_j(k)}^{(i)} \leq |\overline{m}| n_i^{-3/4}$ для любого i , значит, $S_i \leq \frac{1}{2}$ при достаточно больших n_i . Поэтому с помощью (29) из (27) получаем

$$\begin{aligned} \prod_{i=1,2} \left(\frac{n_i^{[M_i]}}{F_i} \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^{m_j} (a_{\alpha_j(k)}^{(i)})^{r_{j,i}} e^{-n_i(S_i + S_i^2)} \right) &\leq b_\alpha \\ &\leq \prod_{i=1,2} \left(\frac{n_i^{[M_i]}}{F_i} \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^{m_j} (a_{\alpha_j(k)}^{(i)})^{r_{j,i}} e^{-n_i - M_i S_i} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Так как $S_i \leq M n_i^{-3/4}$, то левое неравенство в (30) можно заменить на

$$\prod_{i=1,2} \left(\frac{n_i^{[M_i]}}{F_i} \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^{m_j} (a_{\alpha_j(k)}^{(i)})^{r_{j,i}} e^{-n_i S_i - M^2 n_i^{-1/2}} \right) \leq b_\alpha. \quad (31)$$

Аналогично,

$$\prod_{i=1,2} \left(\frac{n_i^{[r_{j,i}]} a_k^{(i)} e^{-n_i a_k^{(i)} - n_i^{-1/2}}}{r_{j,i}!} \right) \leq b_k^{(j)} \leq \prod_{i=1,2} \left(\frac{n_i^{[r_{j,i}]} a_k^{(i)} e^{-(n_i - r_{j,i}) a_k^{(i)}}}{r_{j,i}!} \right). \quad (32)$$

Наконец, пользуясь тем, что $\hat{b}_\alpha = \prod_{j=1}^J \prod_{k=1}^{m_j} b_{\alpha_j(k)}^{(j)}$, получаем

$$\prod_{i=1,2} \frac{n_i^{[M_i]} e^{-M^2(n_i^{-3/4} + n_i^{-1/2})}}{\prod_{j=1}^J (n_i^{[r_{j,i}]} m_j)} \leq \frac{b_\alpha}{\hat{b}_\alpha} \leq \prod_{i=1,2} \frac{n_i^{[M_i]} e^{M^2(n_i^{-3/4} + n_i^{-1/2})}}{\prod_{j=1}^J (n_i^{[r_{j,i}]} m_j)}. \quad (33)$$

Так как $e^{M^2(n_i^{-3/4} + n_i^{-1/2})} \rightarrow 1$ и

$$1 \geq \frac{n_i^{[M_i]}}{\prod_{j=1}^J (n_i^{[r_{j,i}]} m_j)} \geq \frac{(n_i - M_i)^{M_i}}{n_i^{M_i}} = \left(1 - \frac{M_i}{n_i}\right)^{M_i} \rightarrow 1$$

при $n_i \rightarrow \infty$, то из (33) следует условие (7). Теорема доказана.

4. Примеры. В работе [4] рассматривались совместные распределения двухтиповых и некоторых однотипных статистик. Первый пример показывает связь последних со статистиками, исследованными в настоящей работе.

Пример 1. Если для $i = 2$ выполнено условие (2а) и $\mathbf{E}\mu_{r,0} \leq \lambda < \infty$, то $\mathbf{P}\{\mu_r^{(1)} \neq \mu_{r,0}\} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

В самом деле,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mu_{r,0} \neq \mu_r^{(1)}\} &\leq \sum_{k=1}^N \mathbf{P}\{X_k^{(1)} = r, X_k^{(2)} \geq 1\} \\ &\leq \left(1 - \left(1 - \max_{k=1, \dots, N} (a_k^{(2)})\right)^{n_2}\right) \sum_{k=1}^N \mathbf{P}\{X_k^{(1)} = r, X_k^{(2)} = 0\} \\ &\sim \max_{k=1, \dots, N} (a_k^{(2)}) n_2 \mathbf{E}\mu_{r,0} \leq \frac{C n_2}{N} \mathbf{E}\mu_{r,0} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим несколько примеров, связанных с соотношением (17) теоремы 2. При описании предельных распределений вектора статистик ξ предполагалось существование пределов математического ожидания каждой из них. Опишем условия существования и положительности таких пределов.

Пример 2. Пусть пары $(r_{1,1}, r_{1,2})$ и $(r_{2,1}, r_{2,2})$ таковы, что $r_{1,1} = r_{2,1}$, а $r_{1,2} > r_{2,2}$. Тогда $\mathbf{E}\xi_1 = o(\mathbf{E}\xi_2)$ при $N \rightarrow \infty$, если для $i = 2$ выполняется (2а), и $\mathbf{E}\xi_2 = o(\mathbf{E}\xi_1)$ при $N \rightarrow \infty$, если для $i = 2$ выполняется условие (2б). Поэтому $\mathbf{E}\xi_1$ и $\mathbf{E}\xi_2$ не могут одновременно иметь конечные положительные пределы.

Действительно, если для $i = 2$ выполняется (2а), то в силу оценки (20)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\xi_1 &= \sum_{k=1}^N \mathbf{P}\{X_k^{(1)}(n_1) = r_{1,1}, X_k^{(2)}(n_2) = r_{1,2}\} \\ &\leq \sum_{k=1}^N \mathbf{P}\{X_k^{(1)}(n_1) = r_{2,1}, X_k^{(2)}(n_2) = r_{2,2}\} \frac{r_{2,2}!}{r_{1,2}!} n_2^{r_{1,2} - r_{2,2}} \left(\max_k a_k^{(2)}\right)^{r_{1,2} - r_{2,2}} \\ &\leq C_3 \mathbf{E}\xi_2 \left[n_2 \max_k a_k^{(2)}\right]^{r_{1,2} - r_{2,2}} = o(\mathbf{E}\xi_2). \end{aligned}$$

Если же для $i = 2$ верно (2б), то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\xi_2 &= \sum_{k=1}^N \mathbf{P}\{X_k^{(1)}(n_1) = r_{2,1}, X_k^{(2)}(n_2) = r_{2,2}\} \\ &\leq \sum_{k=1}^N \frac{\mathbf{P}\{X_k^{(1)}(n_1) = r_{1,1}, X_k^{(2)}(n_2) = r_{1,2}\} r_{1,2}!}{r_{2,2}! (n_2 - r_{1,2})^{r_{1,2} - r_{2,2}} (\min_k a_k^{(2)})^{r_{1,2} - r_{2,2}}} \leq \frac{C_4 \mathbf{E}\xi_1}{[n_2 \min_k a_k^{(2)}]^{r_{1,2} - r_{2,2}}} = o(\mathbf{E}\xi_1). \end{aligned}$$

Таким образом, случайные величины $\mu_{r_{j,1}, r_{j,2}}, j = 1, \dots, J$, могут одновременно иметь конечные положительные пределы математических ожиданий только тогда, когда пары $(r_{j,1}, r_{j,2})$ отличаются друг от друга по каждой компоненте.

Пример 3. Для схемы равновероятных размещений частиц ($a_k^{(i)} = 1/N$, $i \in \{1, 2\}$, $k = 1, \dots, N$) при выполнении условий (2а) и $n_1/n_2 \rightarrow c \in (0, \infty)$ соотношения (17) выполняются или не выполняются одновременно для всех пар $(r_{j,1}, r_{j,2})$, для которых $r_{j,1} + r_{j,2} = r$.

Так как при указанных условиях

$$E\xi_j = \sum_{k=1}^N P\{X_k^{(1)}(n_1) = r_{j,1}, X_k^{(2)}(n_2) = r_{j,2}\} = \frac{N}{N^{r_{j,1}} N^{r_{j,2}}} \frac{n_1^{r_{j,1}} n_2^{r_{j,2}}}{r_{j,1}! r_{j,2}!} (1 + o(1)),$$

то

$$E\xi_j \sim \frac{1}{c^{r_{j,2}} r_{j,1}! r_{j,2}!} N \left(\frac{n_1}{N} \right)^{r_{j,1} + r_{j,2}}, \quad (34)$$

и если хотя бы для одной пары, у которой $r_{j,1} + r_{j,2} = r$, выполняется соотношение (17), то для всех остальных оно тоже выполняется. Тогда, как следует из (34), $n_1 = C_3 N^{(r-1)/r} (1 + o(1))$, $n_2 = C_4 N^{(r-1)/r} (1 + o(1))$. По аналогии с обычными размещениями можно говорить, что тройка (N, n_1, n_2) принадлежит левой r -области.

Различия одностипных и двустипных выборочных статистик демонстрирует следующее обобщение примера 3.

Пример 4. В схеме равновероятных размещений соотношение (17) выполняется для всех пар $(r_{j,1}, r_{j,2})$, удовлетворяющих условию $r_{j,1} + ar_{j,2} = b$, где $b > 1$ и $b - a > 0$, если количества размещаемых частиц имеют вид $n_1 = C_1 N^{(b-1)/b} (1 + o(1))$ и $n_2 = C_2 N^{1-a+a(b-1)/b} (1 + o(1))$.

Доказательство аналогично доказательству примера 3.

Пример 5. Если в схеме равновероятного размещения все пары $(r_{j,1}, r_{j,2})$ таковы, что $r_{j,1} + r_{j,2} = r$, а числа размещаемых частиц имеют вид $n_1 = N(x_1 \ln N + y_1 \ln \ln N + c_1 + o(1))$ и $n_2 = N(x_2 \ln N + y_2 \ln \ln N + c_2 + o(1))$ (т.е. (2b) выполнено для $i = 1, 2$), причем $x_1 + x_2 = 1$, $x_1, x_2 > 0$, то соотношение (17) выполняется тогда и только тогда, когда $y_1 + y_2 = r$.

Действительно, так как n_i , $i = 1, 2$, принадлежат правой области, то

$$E\xi_j \sim \frac{N^{1-r_{j,1}-r_{j,2}}}{r_{j,1}! r_{j,2}!} n_1^{r_{j,1}} n_2^{r_{j,2}} e^{-(n_1+n_2)/N};$$

правая часть по условию эквивалентна выражению

$$\begin{aligned} & \frac{N}{r_{j,1}! r_{j,2}!} (x_1 \ln N)^{r_{j,1}} (x_2 \ln N)^{r_{j,2}} N^{-x_1-x_2} (\ln N)^{-y_1-y_2} e^{-c_1-c_2} \\ &= \frac{x_1^{r_{j,1}} x_2^{r_{j,2}} e^{-c_1-c_2}}{r_{j,1}! r_{j,2}!} (\ln N)^{r-y_1-y_2}, \end{aligned}$$

и она сходится к конечному положительному числу тогда и только тогда, когда $y_1 + y_2 = r$.

Ситуация $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ и $y_1 = y_2 = r/2$ является аналогией правой r -области для одностипных выборочных статистик, хотя, в отличие от левых областей, не совпадает с ней.

Пример 6. Пусть в схеме равновероятного размещения условие (2b) выполняется для $i = 1, 2$, а числа бросаемых частиц имеют вид $n_1 = Nx_1(N)$, $n_2 = Nx_2(N)$. Если при этом хотя бы для двух пар $(r_{j,1}, r_{j,2})$ выполняются соотношения (17), то

$$\liminf \frac{1}{\ln \ln N} \ln(\min(x_1, x_2)) > 0 \quad \text{и} \quad \limsup \frac{1}{\ln N} \max(x_1, x_2) \leq 1.$$

В самом деле, пусть соотношения (17) выполняются для $j = 1, 2$. В этом случае для равновероятного размещения

$$E\xi_j \sim N^{1-r_{j,1}-r_{j,2}} C_{n_1}^{r_{j,1}} C_{n_2}^{r_{j,2}} e^{-n_1/N - n_2/N} \sim \frac{N}{r_{j,1}! r_{j,2}!} x_1^{r_{j,1}} x_2^{r_{j,2}} e^{-x_1-x_2}.$$

Следовательно,

$$\frac{E\xi_1}{E\xi_2} \sim \frac{r_{2,1}! r_{2,2}!}{r_{1,1}! r_{1,2}!} x_1^{r_{1,1}-r_{2,1}} x_2^{r_{1,2}-r_{2,2}} \longrightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Пользуясь примером 2, можно показать, что $r_{1,1} \neq r_{2,1}$ и $r_{1,2} \neq r_{2,2}$, откуда следует, что $x_2(N) \sim C_1 x_1(N)^{C_2}$ при некоторых положительных константах C_1 и C_2 и $N \rightarrow \infty$ (здесь $C_2 > 0$, поскольку $x_i(N) \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$, при $N \rightarrow \infty$).

Тогда

$$E\xi_1 \sim \exp\{\ln N - x_1 - C_1 x_1^{C_2} - C_3 \ln x_1 + C_4\}. \quad (35)$$

Не ограничивая общности, предположим, что $C_2 \leq 1$. Если при этом $x_1(N)/\ln N > C_5 > 1$ для некоторой константы C_5 по какой-то подпоследовательности $\{N_1, N_2, \dots\} \subset \{1, 2, \dots\}$, то правая часть (35) стремится к 0 по этой подпоследовательности. Если же по какой-то подпоследовательности $\ln x_2(N)/\ln \ln N \rightarrow 0$, то $x_1 = o(\ln N)$, так как $\ln x_2 \sim C_2 \ln x_1$. В этом случае правая часть (35) стремится к бесконечности, что противоречит условиям.

Наконец, приведем пример, в котором для $i = 1$ выполнено (2а), а для $i = 2$ выполнено (2б).

Пример 7. Пусть в схеме равномерного размещения

$$n_1 = N(\ln N + r \ln \ln N + c_1 + o(1)) \quad \text{и} \quad n_2 = c_2 N(\ln N)^{-x}(1 + o(1))$$

для некоторых положительных x и c_2 и вещественного c_1 . Тогда соотношения (17) выполняются для всех пар $(r_{j,1}, r_{j,2})$, у которых $r_{j,1} - x r_{j,2} = r$.

Действительно, по определению $E\xi_j = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}\{X_k^{(1)} = r_{j,1}, X_k^{(2)} = r_{j,2}\}$, что по условию равно

$$\begin{aligned} & NC_{n_1}^{r_{j,1}} \left(\frac{1}{N}\right)^{r_{j,1}} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n_1 - r_{j,1}} C_{n_2}^{r_{j,2}} \left(\frac{1}{N}\right)^{r_{j,2}} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n_2 - r_{j,2}} \\ & \sim N^{1-r_{j,1}-r_{j,2}} \frac{n_1^{r_{j,1}}}{r_{j,1}!} e^{-n_1/N} \frac{n_2^{r_{j,2}}}{r_{j,2}!} e^{-n_2/N} \\ & \sim N^{1-r_{j,1}-r_{j,2}} \frac{N^{r_{j,1}} (\ln N)^{r_{j,1}}}{r_{j,1}!} \frac{(\ln N)^{-r} e^{-c_1}}{N} \frac{c_2^{r_{j,2}} N^{r_{j,2}}}{r_{j,2}!} \frac{1}{(\ln N)^{x r_{j,2}}} \\ & = \frac{e^{-c_1} c_2^{r_{j,2}}}{r_{j,1}! r_{j,2}!} (\ln N)^{-r+r_{j,1}-x r_{j,2}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Выражение в правой части (36) стремится при $N \rightarrow \infty$ к конечному положительному числовому значению тогда и только тогда, когда $r_{j,1} - x r_{j,2} = r$.

Автор признателен А. М. Зубкову за постановку задачи и внимание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаас В. В. Пуассоновская предельная теорема для совместных распределений в схеме случайного размещения частиц двух типов. — *Обозр. прикл. и промышл. матем.*, 2006, т. 13, в. 2, с. 284.
2. Михайлов В. Г. Явные оценки в претельных теоремах для сумм случайных индикаторов. — *Обозр. прикл. и промышл. матем.*, 1994, т. 1, в. 4, с. 580–617.
3. Миразмедов Ш. А. Случайные разложимые статистики в обобщенной схеме. — *Дискретн. матем.*, 1989, т. 1, в. 4, с. 46–62.
4. Попова Т. Ю. Предельные теоремы в одной модели размещения частиц двух типов. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1968, т. 13, в. 3, с. 542–548.
5. Севастьянов Б. А. Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых случайных величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1972, т. 17, в. 4, с. 733–738.

Поступила в редакцию
26.XII.2006