Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. П. Иванова, В. Я. Кондратьев, Одна оценка вероятности разорения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 2, 359–363

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp178>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:35:40

© 2007 г.

ИВАНОВА Г.П.*, КОНДРАТЬЕВ В.Я.*

ОДНА ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ¹⁾

Неравенство для вероятности разорения игрока при игре с бесконечно богатым противником выводится из одной формулы Лапласа.

Ключевые слова и фразы: вероятность разорения, классическая задача о разорении.

Введение. Целью данной работы является решение одной из задач о разорении игрока, предложенной Я. В. Успенским в VIII главе книги «Введение в математическую вероятность» ([1, с. 160–161]).

Задача. Два игрока A и B играют последовательно не более, чем n партий. Их ставки равны единице. Вероятности выигрыша для A и B в одной конкретной партии равны $\frac{1}{2}$. Капитал игрока A равен a единиц, капитал игрока B считаем бесконечно большим.

Требуется определить вероятность $y_{a,n}$ того, что игрок A разорится в какой-либо партии с номером k , $1 \leq k \leq n$, $a \geq 1$.

Для $y_{a,n}$ Успенским была предложена формула

$$y_{a,n} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du + \Delta, \quad (0.1)$$

где

$$t = \frac{a}{\sqrt{2\left(n + \frac{2}{3}\right)}}, \quad (0.2)$$

$$|\Delta| < \frac{1}{2\pi n} + \frac{2}{n} \exp \left\{ -\frac{\pi^2 n}{32} \right\} = \Delta'. \quad (0.3)$$

Эта формула приведена без доказательства.

В настоящей работе получена более точная оценка остаточного члена Δ в формуле (0.1) для вычисления вероятности разорения игрока A , а именно,

$$|\Delta| \leq \frac{4(n+1)}{8,62\pi N^2} + \frac{4}{N\pi} e^{-N/2} = \Delta'', \quad N = n + \frac{2}{3}. \quad (0.4)$$

(Нетрудно показать, что $\Delta'' < 1/(6n)$ при $n \geq 8$.)

Заметим, что формулу (0.1) для $y_{a,n}$ можно переписать в виде $y_{a,n} = 2(1 - \Phi(\tau))$, где Φ — стандартная нормальная функция распределения, а $\tau = t\sqrt{2} = a\left(\sqrt{n + \frac{2}{3}}\right)^{-1} = a/\sqrt{N}$.

Первое слагаемое в Δ'' равно

$$\frac{1}{2\pi n} \frac{8(n^2 + n)}{8,62(n + 2/3)^2} \leq \frac{1}{2\pi n} 0,93.$$

Второе слагаемое в Δ'' не превосходит ($\gamma = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{32} > 0,19$)

$$\frac{2}{n} \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{32} n \right\} \frac{2}{\pi} e^{-\gamma n} < \frac{2}{n} \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{32} n \right\} 0,64 e^{-0,19n}.$$

Отсюда видно, насколько величина Δ'' меньше Δ' .

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия.

1. Уравнение для $y_{a,n}$; связь с суммами случайных величин. Обозначим X_k изменение капитала игрока A в результате k -й партии. Случайные величины $X_1, X_2, \dots$ являются независимыми и принимают значения 1 и -1 с вероятностью $\frac{1}{2}$ каждое. Сумма $S_k = X_1 + \dots + X_k$ равна изменению капитала игрока A в результате k первых партий.

Очевидно, что при $a > 0$ и $n \geq 1$

$$y_{a,n} = P \left\{ \min_{1 \leq k \leq n} S_k \leq -a \right\}. \quad (1.1)$$

Вероятности $y_{a,n}$ удовлетворяют соотношениям (ср. [2, гл. XIV])

$$y_{a,n} = \frac{1}{2} y_{a+1, n-1} + \frac{1}{2} y_{a-1, n-1}, \quad (1.2)$$

$$y_{0,n} = 1, \quad n \geq 0, \quad (1.3)$$

$$y_{a,0} = 0, \quad a > 0. \quad (1.4)$$

Указанные соотношения определяют однозначно $y_{a,n}$ для всех положительных a и n .

Для $y_{a,n}$ в случае, когда a и n имеют одинаковую четность, Лаплас в своей «Аналитической теории вероятностей» («Théorie analytique des probabilités», 1812, с. 235) предложил следующую точную формулу:

$$y_{a,n} = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin a\varphi}{\sin \varphi} (\cos \varphi)^{n+1} d\varphi \quad (1.5)$$

и изучил поведение интеграла в (1.5) при $n \rightarrow \infty$.

Формулы Успенского (0.1)–(0.3) придают строгий смысл рассуждениям Лапласа.

2. Оценка вероятности разорения игрока при игре с бесконечно богатым противником. Перепишем подынтегральную функцию в интеграле (1.5) в виде

$$\frac{\sin a\varphi}{\varphi} g(\varphi), \quad (2.1)$$

где $g(\varphi) = \varphi (\sin \varphi)^{-1} (\cos \varphi)^{n+1}$.

2.1. Мы оценим теперь функцию $g(\varphi)$ сверху на интервале $(0, \pi/2)$ и снизу на интервале $(0, 1)$. В обоих случаях мы пользуемся известными разложениями функций $\ln \cos \varphi$ и $\ln(\sin \varphi / \varphi)$ в степенные ряды.

Лемма 1. При $|\varphi| < \pi/2$

$$\ln \cos \varphi = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1} (2^{2k} - 1) |B_{2k}|}{k(2k)!} \varphi^{2k} \quad (2.2)$$

$$= -\frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^4}{12} - \frac{\varphi^6}{45} - \frac{17\varphi^8}{2520} - \sum_{k=5}^{\infty} \frac{2^{2k-1} (2^{2k} - 1) |B_{2k}|}{k(2k)!} \varphi^{2k}, \quad (2.3)$$

где B_{2k} — числа Бернулли.

Лемма 2. При $|\varphi| < \pi$

$$\ln \frac{\sin \varphi}{\varphi} = -\frac{\varphi^2}{6} - \frac{\varphi^4}{180} - \frac{\varphi^6}{2835} - \frac{\varphi^8}{37800} - \sum_{k=5}^{\infty} \frac{2^{2k-1} |B_{2k}|}{k(2k)!} \varphi^{2k}. \quad (2.4)$$

См. [4, с. 40, (4.3.1), (4.3.2) и с. 607–613].

Лемма 3. При $|\varphi| < \pi/2$

$$0 \leq g(\varphi) \leq \exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\}, \quad N = n + \frac{2}{3}. \quad (2.5)$$

Доказательство леммы 3. Мы имеем

$$\ln g(\varphi) = (n+1) \ln \cos \varphi - \ln \frac{\sin \varphi}{\varphi}. \quad (2.6)$$

Применим формулы (2.3) и (2.4) и сгруппируем слагаемые с одинаковыми показателями φ :

$$\begin{aligned} -\frac{(n+1)\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^2}{6} &= \frac{-3(n+1)\varphi^2 + \varphi^2}{6} = \frac{-3n\varphi^2 - 3\varphi^2 + \varphi^2}{6} \\ &= \frac{-3\varphi^2(n+2/3)}{6} = -\frac{n+2/3}{2}\varphi^2 = -\frac{N}{2}\varphi^2, \\ -\frac{(n+1)\varphi^4}{12} + \frac{\varphi^4}{180} &< 0, \\ -\frac{(n+1)\varphi^6}{45} + \frac{\varphi^6}{2835} &< 0, \\ -\frac{(n+1)17\varphi^8}{2520} + \frac{\varphi^8}{37800} &< 0, \end{aligned}$$

и т.д. Поскольку все слагаемые ряда для функции (2.6) отрицательны, то в качестве верхней оценки функции (2.6) можно взять

$$-\frac{n+2/3}{2}\varphi^2 = -\frac{N}{2}\varphi^2.$$

Следовательно, мы доказали, что

$$0 \leq \frac{\varphi(\cos \varphi)^{n+1}}{\sin \varphi} < \exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\}, \quad |\varphi| < \frac{\pi}{2}.$$

Лемма 4. При $|\varphi| \leq 1$

$$g(\varphi) \geq \exp \left\{ -\frac{N}{2}\varphi^2 - \frac{n+1}{8,62}\varphi^4 \right\}. \quad (2.7)$$

При доказательстве леммы 4 нам потребуется следующая лемма.

Лемма 5. При $2k \geq 10$

$$|B_{2k}| \leq \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} 1,001. \quad (2.8)$$

Доказательство леммы 5. Рассмотрим функцию

$$\zeta(2k) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}}$$

(дзета-функция Римана). Ясно, что $\zeta(2k)$ убывает с ростом k . Кроме того, имеет место соотношение

$$|B_{2k}| = \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k)$$

(см. ([4, с. 610, (23.2.16) и с. 614])) и при $k \geq 5$ справедливо $\zeta(2k) \leq \zeta(10) = 1,00099 \dots \leq 1,001$, откуда следует утверждение леммы 5.

Доказательство леммы 4. Мы исходим из формулы (2.6). В разложении функции $(n+1) \ln \cos \varphi$ выпишем явно члены до порядка φ^8 , а в разложении $\ln \sin \varphi / \varphi$ возьмем только член с φ^2 . Мы получим при $|\varphi| \leq 1$

$$\begin{aligned} (n+1) \ln \cos \varphi - \ln \frac{\sin \varphi}{\varphi} &\geq -\frac{N}{2}\varphi^2 - (n+1)\frac{\varphi^4}{12} - (n+1)\frac{\varphi^6}{45} - (n+1)\frac{17\varphi^8}{2520} \\ &\quad - (n+1) \sum_{k=5}^{\infty} \frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)|B_{2k}|}{k(2k)!} \varphi^{2k} \\ &\geq -\frac{N}{2}\varphi^2 - (n+1)\varphi^4 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{45} + \frac{17}{2520} + \sum_{k=5}^{\infty} \frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)|B_{2k}|}{k(2k)!} \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Согласно (2.8), имеем при $k \geq 5$

$$\frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)}{k(2k)!} |B_{2k}| \leq \frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)}{k(2k)!} \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} 1,001 \leq \frac{1}{k} \left(\frac{4}{\pi^2} \right)^k 1,001.$$

Следовательно, $\sum_{k=5}^{\infty}$ в правой части (2.9) не превосходит

$$\alpha = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{\pi^2} \right)^5 \frac{1}{1 - 4/\pi^2} 1,001 = 0,003680919.$$

Кроме того,

$$\beta = \frac{1}{12} + \frac{1}{45} + \frac{17}{2510} = 0,112301587.$$

Мы видим, что коэффициент при φ^4 в правой части (2.9) не превосходит по абсолютной величине

$$(n+1)(\alpha + \beta) < (n+1) 0,115982506 = (n+1) \frac{1}{8,62198993} < (n+1) \frac{1}{8,62}.$$

Лемма 4 доказана.

2.2. Оценка остаточного члена Δ в формуле $y_{a,n} = 1 - 2\pi^{-1/2} \int_0^t e^{-u^2} du + \Delta$. Сначала придадим интегралу другой вид.

Лемма 6. При любых $a > 0$, $N > 0$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a\varphi}{\varphi} \exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\} d\varphi, \quad (2.10)$$

где $t = a/\sqrt{2N}$.

Доказательство. Равенство (2.10) известно (см. [3, с. 452, (2.5.36.6)]).

Мы приходим к равенству

$$\begin{aligned} y_{a,n} &= 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin a\varphi}{\sin \varphi} (\cos \varphi)^{n+1} d\varphi \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin a\varphi}{\varphi} g(\varphi) d\varphi = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du + \Delta \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a\varphi}{\varphi} \exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\} d\varphi + \Delta. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Отсюда выводим

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a\varphi}{\varphi} \exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\} d\varphi - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin a\varphi}{\varphi} g(\varphi) d\varphi \\ &= \left(\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin a\varphi}{\varphi} \exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\} d\varphi - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin a\varphi}{\varphi} g(\varphi) d\varphi \right) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\sin a\varphi}{\varphi} \exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\} d\varphi - \frac{2}{\pi} \int_1^{\pi/2} \frac{\sin a\varphi}{\varphi} g(\varphi) d\varphi \\ &= \Delta_1 + I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Оценим Δ_1 и интегралы I_1, I_2 по отдельности. Ясно, что

$$|I_1| \leq \frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{1}{\varphi} \exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\} d\varphi,$$

а по лемме 3 также и

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{1}{\varphi} \exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\} d\varphi < \frac{2}{\pi N} \int_1^{\infty} N\varphi \exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\} d\varphi \\ &= \frac{2}{\pi N} \int_{N/2}^{\infty} e^{-u} du = \frac{2}{\pi N} e^{-N/2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 7. Справедлива оценка

$$|I_1| + |I_2| \leq \frac{4}{\pi N} e^{-N/2}. \quad (2.14)$$

Оценим теперь $|\Delta_1|$.

Мы запишем $g(\varphi)$ в следующем виде: вместо вытекающих из лемм 3 и 4 неравенств

$$\exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\} \exp \left\{ -\frac{n+1}{8,62} \varphi^4 \right\} \leq g(\varphi) \leq \exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\}, \quad |\varphi| \leq 1,$$

мы запишем равенство $g(\varphi) = \exp \{ -N\varphi^2/2 \} (1 - \theta[(n+1)/8,62] \varphi^4)$, где θ — некоторая величина, зависящая от N и φ , и $0 \leq \theta \leq 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} |\Delta_1| &= \frac{2}{\pi} \left| \int_0^1 \frac{\sin a\varphi}{\varphi} \left(\exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\} - g(\varphi) \right) d\varphi \right| \\ &\leq \frac{2}{\pi} \left| \int_0^1 \frac{\sin a\varphi}{\varphi} \theta \frac{n+1}{8,62} \varphi^4 \exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\} d\varphi \right| \\ &\leq \frac{n+1}{8,62} \frac{2}{\pi} \int_0^1 \varphi^3 \exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\} d\varphi \\ &= \frac{n+1}{8,62} \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{N\varphi^2}{2} \frac{2}{N} N\varphi \frac{1}{N} \exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\} d\varphi = \frac{n+1}{8,62} \frac{2}{\pi} \int_0^{N/2} ue^{-u} du \frac{2}{N} \frac{1}{N} \\ &\leq \frac{n+1}{8,62} \frac{2}{\pi} \frac{2}{N^2} \int_0^\infty ue^{-u} du = \frac{n+1}{8,62} \frac{4}{\pi N^2}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Из формул (2.12)–(2.15) вытекает неравенство (0.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Uspensky J. V.* Introduction to Mathematical Probability. New York: McGraw-Hill, 1937, 240 p.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984, 528 с.
3. *Прудников А. В., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981, 798 с.
4. *Абрамовиц М., Стиган И.* (ред.) Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979, 830 с.

Поступила в редакцию
4.IV.2004

© 2007 г.

ЛЕБЕДЕВ А. В.*

ЭКСТРЕМУМЫ ПОЛЕЙ ДРОБОВОГО ШУМА В СЛУЧАЕ ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИХСЯ ХВОСТОВ С ПОКАЗАТЕЛЕМ $\alpha \in (0, 1)^1$

Рассматриваются поля дробового шума с правильно меняющимися хвостами распределений амплитуд, где показатель изменения $\alpha \in (0, 1)$. Исследуется асимптотическое поведение супремумов поля по ограниченным измеримым областям, растущим в смысле Ван Хова. Ранее полученный автором невырожденный предельный закон выведен при иных условиях.

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: alebedev@mech.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 03-01-00724, 04-01-00700 и гранта НШ-1758.2003.1.