Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лебедев, Экстремумы полей дробового шума в случае правильно меняющихся хвостов с показателем $\alpha \in (0, 1)$, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 2, 363–366

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp179>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:04:31

Оценим теперь $|\Delta_1|$.

Мы запишем $g(\varphi)$ в следующем виде: вместо вытекающих из лемм 3 и 4 неравенств

$$\exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\} \exp \left\{ -\frac{n+1}{8,62} \varphi^4 \right\} \leq g(\varphi) \leq \exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\}, \quad |\varphi| \leq 1,$$

мы запишем равенство $g(\varphi) = \exp \{ -N\varphi^2/2 \} (1 - \theta[(n+1)/8,62] \varphi^4)$, где θ — некоторая величина, зависящая от N и φ , и $0 \leq \theta \leq 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} |\Delta_1| &= \frac{2}{\pi} \left| \int_0^1 \frac{\sin a\varphi}{\varphi} \left(\exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\} - g(\varphi) \right) d\varphi \right| \\ &\leq \frac{2}{\pi} \left| \int_0^1 \frac{\sin a\varphi}{\varphi} \theta \frac{n+1}{8,62} \varphi^4 \exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\} d\varphi \right| \\ &\leq \frac{n+1}{8,62} \frac{2}{\pi} \int_0^1 \varphi^3 \exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\} d\varphi \\ &= \frac{n+1}{8,62} \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{N\varphi^2}{2} \frac{2}{N} N\varphi \frac{1}{N} \exp \left\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \right\} d\varphi = \frac{n+1}{8,62} \frac{2}{\pi} \int_0^{N/2} u e^{-u} du \frac{2}{N} \frac{1}{N} \\ &\leq \frac{n+1}{8,62} \frac{2}{\pi} \frac{2}{N^2} \int_0^\infty u e^{-u} du = \frac{n+1}{8,62} \frac{4}{\pi N^2}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Из формул (2.12)–(2.15) вытекает неравенство (0.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Uspensky J. V.* Introduction to Mathematical Probability. New York: McGraw-Hill, 1937, 240 p.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984, 528 с.
3. *Прудников А. В., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981, 798 с.
4. *Абрамовиц М., Стиган И.* (ред.) Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979, 830 с.

Поступила в редакцию
4.IV.2004

© 2007 г.

ЛЕБЕДЕВ А. В.*

ЭКСТРЕМУМЫ ПОЛЕЙ ДРОБОВОГО ШУМА В СЛУЧАЕ ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИХСЯ ХВОСТОВ С ПОКАЗАТЕЛЕМ $\alpha \in (0, 1)^1$

Рассматриваются поля дробового шума с правильно меняющимися хвостами распределений амплитуд, где показатель изменения $\alpha \in (0, 1)$. Исследуется асимптотическое поведение супремумов поля по ограниченным измеримым областям, растущим в смысле Ван Хова. Ранее полученный автором невырожденный предельный закон выведен при иных условиях.

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: alebedev@mech.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 03-01-00724, 04-01-00700 и гранта НШ-1758.2003.1.

Ключевые слова и фразы: поле дробового шума, экстремумы, правильно меняющиеся хвосты, невырожденный предельный закон, линейная нормировка.

В [1] автором был получен невырожденный предельный закон для экстремумов поля дробового шума в пространстве размерности d с правильно меняющимися хвостами распределений амплитуд, а именно $\bar{A}(x) \sim x^{-\alpha} L(x)$, $x \rightarrow \infty$, где $\alpha > 0$ и L — медленно меняющаяся функция [2]. Однако достаточное условие $\alpha(d-1) < 1$ представлялось слишком ограничительным при $d > 2$. Высказывалось предположение, что оно может являться следствием грубости оценок.

Далее область действия предельного закона для всех $d > 2$ будет равномерно расширена до интервала $0 < \alpha < 1$ за счет дополнительного условия на рост множеств, по которым берутся супремумы поля.

Напомним основные предположения, обозначения и результаты [1].

Рассмотрим евклидово пространство $E = \mathbf{R}^d$, $d \geq 1$, и пусть $\{\tau_k\}$ — стационарное пуассоновское точечное поле в E интенсивности $\lambda > 0$. Определим формально поле

$$X(t) = \sum_k \xi_k f(t - \tau_k), \quad t \in E, \quad (1)$$

где ξ_k — независимые неотрицательные случайные величины (называемые амплитудами), имеющие функцию распределения A с хвостом $\bar{A}(x) \sim x^{-\alpha} L(x)$, $x \rightarrow \infty$, $\alpha > 0$, L — медленно меняющаяся функция; $\{\xi_k\}$ и $\{\tau_k\}$ независимы; f — измеримая функция на E (называемая функцией отклика или влияния), обладающая следующими свойствами:

- а) $f(t) \geq 0$ для всех $t \in E$;
- б) $f(0) = 1$ и $f(t) \leq 1$ для всех $t \in E$;
- в) существует $\delta < \min\{1, \alpha\}$ такое, что $\int_E f(t)^\delta dt < \infty$;
- г) существует такая неубывающая неотрицательная функция $q(r)$, что $q(r) \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$, и $|f(t_1) - f(t_2)| \leq f(t_1) q(\|t_1 - t_2\|)$ для всех $t_1, t_2 \in E$;
- д) f не имеет точек локального максимума кроме $t = 0$.

Условия а)–в) обеспечивают существование поля дробового шума $X(t)$ в смысле абсолютной сходимости ряда (1) п.н. Поле это, очевидно, является однородным и в каждой точке имеет одинаковую функцию распределения Ψ . Согласно лемме 2 из [1], имеет место асимптотика

$$\bar{\Psi}(x) \sim \lambda I_\alpha \bar{A}(x), \quad x \rightarrow \infty, \quad I_\alpha = \int_E f(t)^\alpha dt. \quad (2)$$

Определим теперь для ограниченной измеримой по Лебегу области $G \subset E$ супремум поля $X(t)$ на ней:

$$M(G) = \sup_{t \in G} X(t).$$

Предположим, что задана последовательность таких областей, стремящаяся к бесконечности в смысле Ван Хова (что обозначим $G \rightarrow \infty$). Это понятие заключается в следующем. Рассмотрим разбиение пространства E правильной решеткой из одинаковых прямоугольных параллелепипедов P_n . Пусть $N^-(G)$ — число P_n , входящих в G , и $N^+(G)$ — число P_n , пересекающихся с G , тогда стремление к бесконечности в смысле Ван Хова означает, что для любого такого разбиения

$$\lim_{G \rightarrow \infty} N^+(G) = +\infty, \quad \lim_{G \rightarrow \infty} \frac{N^-(G)}{N^+(G)} = 1. \quad (3)$$

Рассмотрим правильные кубы C_n со стороной l . Например, это могут быть кубы вида $[i_1 l, (i_1 + 1) l] \times \dots \times [i_d l, (i_d + 1) l]$, $i_1, \dots, i_d \in \mathbf{Z}$, пронумерованные в произвольном порядке.

Обозначим лебегову меру множества G через $|G|$, тогда из (3) следует

$$N^-(G) \sim \frac{|G|}{l^d}, \quad N^+(G) \sim \frac{|G|}{l^d}, \quad G \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Основным результатом работы [1] является следующая теорема.

Теорема А. Пусть $\alpha(d-1) < 1$ и $u(s)$ — положительная неубывающая функция такая, что $s\bar{A}(u(s)) \rightarrow 1, s \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{G \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{M(G)}{u(\lambda|G|)} \leq x \right\} = \exp\{-x^{-\alpha}\} \quad \forall x > 0. \quad (5)$$

Заметим, что функция $u(s)$ всегда существует, согласно [2, § 1.5].

Введем дополнительное условие на рост областей G :

(У) существует такое $\sigma \in (0, 1/d)$, что предельные выражения (3), (4) сохраняют силу для некоторого семейства разбиений пространства на кубы C_n со стороны $l \leq |G|^\sigma$, когда $l, G \rightarrow \infty$.

Данное условие выполняется, в частности, для семейств подобных областей (с любым σ из указанного интервала).

Далее предполагается, что кубы разбиений и связанные с ними случайные величины индексированы не только своими «номерами», но и множествами G .

Следующая теорема расширяет область действия ранее полученного предельного закона при $d > 2$ (в то время как при $d = 1$ и $d = 2$ сильнее оказывается теорема А).

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha < 1$ и выполнено условие (У), тогда верно (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Далее полагаем $x > 0$. Обозначим $u_G = u(\lambda|G|)$.

Прежде всего заметим, что полученная в [1] предельная стохастическая оценка для $M(G)$ снизу, а именно

$$\begin{aligned} \limsup_{G \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{M(G) \leq xu_G\} &\leq \limsup_{G \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{ \sup_{\tau_k \in G} \xi_k \leq xu_G \right\} \\ &= \exp\left\{ - \lim_{G \rightarrow \infty} \lambda|G| \bar{A}(xu_G) \right\} = \exp\{-x^{-\alpha}\}, \end{aligned} \quad (6)$$

верна при любом $\alpha > 0$.

Теперь оценим $M(G)$ сверху. Выберем $0 < \rho < \alpha\sigma$ и рассмотрим разбиения на кубы C_n со стороны $l = [u_G^2]$. Из определения функции $u(s)$ следует $u_G \sim |G|^{1/\alpha} L_2(|G|)$, где L_2 — некоторая медленно меняющаяся функция [2, § 1.5]. Следовательно, $l = o(|G|^\sigma)$ при $l, G \rightarrow \infty$ и (3) выполняется.

Обозначим $\mu_n = M(C_n)$, $\eta_n = \sum_{\tau_k \in C_n} \xi_k$. Поскольку l целое, то граница любого куба C_n покрывается $m = (l+1)^d - (l-1)^d$ шарами радиуса $r = 1$ (центры которых обозначим $O_1, \dots, O_m$), откуда $m \sim 2dl^{d-1}$, $l \rightarrow \infty$. Обозначим $K_1 = 1 + q(1)$, $\zeta_n = \sum_{i=1}^m X(O_i)$. Согласно лемме 3 из [1], имеем

$$\mu_n \leq \eta_n + K_1 \zeta_n, \quad (7)$$

где η_n может быть представлено как сумма $V = l^d$ независимых одинаково распределенных случайных величин, соответствующих суммам величин ξ_k по кубам со стороны единица, составляющим C_n . Согласно [1], распределения этих случайных величин имеют хвосты, асимптотически эквивалентные $\lambda \bar{A}(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Поскольку $\rho < \alpha\sigma < \alpha/d$, то $u_G V^{-1/\alpha} \sim u_G^{1-d\rho/\alpha} \rightarrow \infty, G \rightarrow \infty$, и по теореме о больших отклонениях [3] получаем

$$\mathbf{P}\{\eta_n > xu_G\} \sim \lambda V \bar{A}(xu_G) \sim V|G|^{-1} x^{-\alpha}, \quad G \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Чтобы оценить хвост распределения ζ_n , применим к сумме неравенство Чебышёва для моментов порядка $\beta \in (\alpha - \rho, \alpha)$, которые конечны в силу (2). Обозначим $\Upsilon = \mathbf{E} X(O_i)^\beta$. Из субаддитивности функции $y = x^\beta, x \geq 0$, следует, что $\mathbf{E} \zeta_n^\beta \leq m \Upsilon$. Имеем

$$\mathbf{P}\{\zeta_n > xu_G\} \leq m \Upsilon (xu_G)^{-\beta} \sim 2d \Upsilon V x^{-\beta} u_G^{-(\beta+\rho)} = o(V|G|^{-1}), \quad G \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$. Из (7) следует оценка

$$\mathbf{P}\{\mu_n > xu_G\} \leq \mathbf{P}\{\eta_n > (1 - \varepsilon) xu_G\} + \mathbf{P}\{\zeta_n > K_1^{-1} \varepsilon xu_G\},$$

откуда с помощью (8) и (9) получаем

$$\limsup_{G \rightarrow \infty} \frac{|G|}{V} \mathbf{P}\{\mu_n > xu_G\} \leq (1 - \varepsilon)^{-\alpha} x^{-\alpha},$$

а в силу произвольности ε верно и неравенство

$$\limsup_{G \rightarrow \infty} \frac{|G|}{V} \mathbf{P}\{\mu_n > xu_G\} \leq x^{-\alpha}.$$

С учетом положительной ассоциированности поля $X(t)$ [1], а значит, и его максимумов на кубах, получаем

$$\begin{aligned} \liminf_{G \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{M(G) \leq xu_G\} &\geq \liminf_{G \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{M(G^+) \leq xu_G\} \geq \liminf_{G \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\mu_n \leq xu_G\}^{N^+(G)} \\ &= \exp \left\{ - \limsup_{G \rightarrow \infty} \frac{|G|}{V} \mathbf{P}\{\mu_n > xu_G\} \right\} \geq \exp\{-x^{-\alpha}\}, \end{aligned}$$

что в сочетании с (6) и доказывает теорему.

Заметим, что следствие 1 [1] теоремы А остается в силе. Иными словами, если функция f удовлетворяет только условиям а)-в), но для любого $\varepsilon > 0$ существует f_ε , удовлетворяющая а)-д), и $f \leq (1 + \varepsilon) f_\varepsilon$, то утверждение теоремы также верно (доказательство проводится аналогично).

Что касается условия монотонности роста областей G , упомянутого в [1], то оно в действительности не является необходимым, поскольку не используется в доказательствах обеих теорем.

К сожалению, вопрос о возможности расширения полученных результатов в область $\alpha \geq 1$ при $d \geq 2$ по-прежнему остается открытым.

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедев А. В. Экстремумы полей дробового шума в случае правильно меняющихся хвостов. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 4, с. 790–794.
2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
3. Ткачук С. Г. Теорема о больших уклонениях в $\mathbf{R}^s$ в случае устойчивого предельного закона. — Случайные процессы и статистические выводы. Вып. 4. Ташкент: Фан, 1974, с. 178–184.

Поступила в редакцию
20.1.2005

© 2007 г. **МАРТИКАЙНЕН А. И.***, **ФРОЛОВ А. Н.***, **ШТАЙНЕБАХ Й.****

О ВЕРОЯТНОСТЯХ МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ¹⁾

Исследовано асимптотическое поведение вероятностей малых уклонений обобщенных процессов восстановления.

Ключевые слова и фразы: вероятности малых уклонений, процесс восстановления, обобщенный пуассоновский процесс, закон повторного логарифма в форме Чжуна.

* С.-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Университетский пр-т, 28, 198504 Старый Петергоф, С.-Петербург, Россия; e-mail: Alexander.Martikainen@pobox.srbu.ru; e-mail: Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

** Mathematical Institute, University of Cologne, Weyertal 86-90, D-50931 Köln, Germany; e-mail: jost@math.uni-koeln.de

¹⁾ Работа первых двух авторов частично поддержана РФФИ, грант № 05-01-00486.