Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, А. А. Могульский, О больших и сверхбольших отклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 4, 641–673

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp18>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:01:55

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.

Выходит 4 раза в год

Москва • Наука • ТВП

Том 51

Выпуск 4, 2006 год

октябрь, ноябрь, декабрь

© 2006 г. БОРОВКОВ А. А.*, МОГУЛЬСКИЙ А. А.*

О БОЛЬШИХ И СВЕРХБОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ СУММ
НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ ПРИ
ВЫПОЛНЕНИИ УСЛОВИЯ КРАМЕРА. II¹⁾

Настоящая работа является продолжением [1]. В ней для одномерного случая исследуется задача об асимптотике вероятности попадания сумм независимых одинаково распределенных случайных величин в полуинтервал $[x, x + \Delta)$ в области сверхбольших уклонений, когда относительные (нормированные) уклонения $\alpha = x/n$ неограниченно возрастают вместе с числом слагаемых n и в то же время находятся в области аналитичности функции уклонений одного слагаемого. В первой части работы в многомерном случае найдены достаточные условия, при которых в области сверхбольших уклонений имеют место интегро-локальные и локальные теоремы того же универсального вида, что и в области больших и нормальных уклонений.

Во второй части работы рассматриваются те же задачи для трех классов наиболее распространенных одномерных распределений, для которых удастся получить простые достаточные условия, позволяющие найти при $x/n \rightarrow \infty$ асимптотику изучаемых вероятностей в упомянутой выше универсальной форме. Это так называемые классы экспоненциально и «суперэкспоненциально» убывающих регулярно меняющихся распределений. Для них найдены также предельные теоремы для преобразований Крамера с параметром, близким к «критическому». Установлена характеристика нормального распределения с помощью преобразования Крамера. Получены асимптотические разложения для функции уклонений.

Ключевые слова и фразы: функция уклонений, большие уклонения, сверхбольшие уклонения, интегро-локальная теорема, семи-

* Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия; e-mail: borovkov@math.nsc.ru; mogul@math.nsc.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантами РФФИ № 05-01-00810, НШ № 2139.2003.1 и INTAS № 02-51-5019.

Библиотека

математического института

им. В.А. Стеклова РАН

экспоненциальные распределения, суперэкспоненциальные распределения, характеристика нормального закона, предельные теоремы для преобразования Крамера, асимптотические разложения функции уклонений.

§ 6. Три класса быстро убывающих регулярно меняющихся распределений. Асимптотические свойства преобразований Крамера

В этом параграфе мы введем в рассмотрение три основных класса распределений $\mathbf{F}(\cdot) = \mathbf{P}\{\xi \in \cdot\}$ случайных величин ξ с быстро убывающими «регулярно меняющимися» правыми хвостами $V(t) = \mathbf{P}\{\xi \geq t\}$ и установим ряд свойств преобразования Крамера над распределениями из этих классов.

6.1. Классы экспоненциально и суперэкспоненциально убывающих регулярных распределений. Для удобства мы будем ассоциировать эти классы с известными классами правильно меняющихся и семиэкспоненциальных распределений (см. [4]). Везде ниже через $l = l(t)$ мы будем обозначать правильно меняющуюся при $t \rightarrow \infty$ функцию

$$l(t) = t^\beta L(t), \quad t \geq 0, \quad (6.1)$$

где $L(t)$ — медленно меняющаяся (м.м.) при $t \rightarrow \infty$ функция. Там, где это потребуется, показатель β функции l мы будем обозначать через $\beta(l)$.

Обозначим через $\mathcal{R}$ класс *правильно меняющихся на бесконечности распределений*, т.е. таких распределений, что

$$\mathbf{P}\{\xi \geq t\} := V(t) = l(t), \quad t \geq 0, \quad (6.2)$$

где функция $l(t)$ определена в (6.1), $\beta = \beta(l) < 0$.

Через $\mathcal{S}$ обозначим класс *семиэкспоненциальных распределений*, т.е. распределений, для которых

$$V(t) = e^{-l(t)}, \quad t \geq 0, \quad (6.3)$$

где $\beta(l) \in (0, 1]$,

$$0 < l(t) = o(t), \quad (6.4)$$

и, кроме того, выполнено следующее условие регулярности: при $t \rightarrow \infty$, $s = o(t)$

$$l(t+s) - l(t) = s \frac{\beta l(t)}{t} (1 + o(1)) + o(1). \quad (6.5)$$

Другими словами,

$$l(t+s) - l(t) \sim s \frac{\beta l(t)}{t}, \quad \text{если} \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{sl(t)}{t} > 0,$$

и

$$l(t+s) - l(t) = o(1), \quad \text{если} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{sl(t)}{t} = 0.$$

Достаточным для выполнения (6.5) является следующее условие.

[D₁]. Функция $L(t)$ для некоторого $t_0 < \infty$ и всех $t \geq t_0 > 0$ дифференцируема и

$$L'(t) = o\left(\frac{L(t)}{t}\right) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Действительно, в силу [D₁]

$$l'(t) = \frac{\beta l(t)}{t} (1 + o(1)), \quad (6.6)$$

поэтому, используя (6.6) и равенство $l(t+s) - l(t) = \int_t^{t+s} l'(u) du$, мы получим соотношение (6.5), в котором будет отсутствовать последний поправочный член $o(1)$.

Если ξ является случайной величиной с арифметическим распределением, то аргументы t и s в (6.2)–(6.5) принимают лишь целочисленные значения.

Правильно меняющиеся и семиэкспоненциальные распределения мы будем называть *регулярными*. Введем теперь в рассмотрение классы экспоненциально убывающих распределений, ассоциированные с классами $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}\mathcal{e}$.

1. Класс $\mathcal{ER}$ распределений, для которых

$$V(t) = e^{-\lambda_+ t} l(t), \quad t \geq 0, \quad (6.7)$$

где $\lambda_+ \in (0, \infty)$, но в отличие от (6.2) параметр $\beta = \beta(l)$ здесь может принимать и неотрицательные значения.

2. Класс $\mathcal{ESe}$ распределений, для которых

$$V(t) = e^{-\lambda_+ t l(t)}, \quad t \geq 0, \quad (6.8)$$

где $\lambda_+ \in (0, \infty)$, функция $l \in \mathcal{R}$ удовлетворяет (6.5), $\beta = \beta(l) \in [0, 1]$, $l(t) = o(t)$, но в отличие от (6.3), (6.4) здесь функция $l(t)$ может быть как отрицательной, так и положительной.

Рассмотрим, наконец, класс суперэкспоненциально убывающих распределений (т.е. класс распределений, правый хвост которых убывает быстрее любой экспоненты).

3. Класс $\mathcal{SE}$ суперэкспоненциальных распределений вида

$$V(t) = e^{-l(t)}, \quad t \geq 0, \quad (6.9)$$

где $\beta = \beta(l) > 1$, так что выполнено свойство

$$l(t) \gg t,$$

в известном смысле дополнительное к (6.4).

В соотношениях (6.7)–(6.9) для арифметических распределений действует прежнее соглашение: эти соотношения для названных распределений имеют место лишь для целых t .

Распределения из классов $\mathcal{ER}$, $\mathcal{ESe}$ мы будем называть *регулярными экспоненциально убывающими* распределениями; распределения из класса $\mathcal{SE}$ — *регулярными суперэкспоненциально убывающими* (или просто *суперэкспоненциальными*) распределениями.

Ясно, что распределения с «чисто экспоненциально» убывающим хвостом $se^{-\lambda+t}$ при $t \geq t_0 > 0$ и арифметическое распределение с хвостом $V(k) = se^{-\lambda+k}$ при $k \geq k_0 > 0$ лежат в классе $\mathcal{ER}$, а распределение с хвостом вида se^{-vt^2} при $t \geq t_0 > 0$ и нормальное распределение — в классе $\mathcal{SE}$.

Рассмотрим теперь условия гладкости, которые мы будем использовать для введенных классов распределений. Эти условия мы будем приводить в терминах функций $l(t) = t^\beta L(t)$, которые определяют классы $\mathcal{ER}$, $\mathcal{ESe}$, $\mathcal{SE}$.

Условие (6.5) и более сильное условие $[D_1]$ уже были сформулированы выше (условие (6.5) фигурирует в определении класса $\mathcal{SE}$). Следующее условие является широким аналогом условия существования гладкой второй производной функции $l = l(t)$.

$[D_2]$. Функция $L(t)$ удовлетворяет условию $[D_1]$ и при $t \rightarrow \infty$, $s = o(t)$

$$l(t+s) - l(t) = sl'(t) + s^2 \frac{\beta(\beta-1)l(t)}{2t^2} (1 + o(1)) + o(1). \quad (6.10)$$

Если существует $l''(t) = \beta(\beta-1)l(t)t^{-2}(1 + o(1))$ при $t \rightarrow \infty$, то соотношение (6.10) будет выполнено; при этом последнее слагаемое $o(1)$ в (6.10) будет отсутствовать:

$$l(t+s) - l(t) = \int_t^{t+s} \left[l'(t) + \int_t^v l''(u) du \right] dv = sl'(t) + s^2 \frac{\beta(\beta-1)l(t)}{2t^2} (1 + o(1)).$$

Главная цель настоящей работы состоит в проверке условий теорем 3.4, 4.1 из [1] для распределений из классов $\mathcal{ER}$, $\mathcal{ESe}$, $\mathcal{SE}$, что позволит весьма полно описывать вероятности сверхбольших отклонений сумм случайных величин из названных классов. Для этого нам потребуется ряд свойств преобразования Крамера над распределениями из определенных выше классов.

6.2. Предельные теоремы для преобразования Крамера.

Напомним ряд обозначений и фактов из [1]. Функция $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\xi}$ конечна в интервале (λ_-, λ_+) и обращается в ∞ за пределами отрезка $[\lambda_-, \lambda_+]$. Условие $[C]$ из [1] в одномерном случае есть неравенство $\lambda_- < \lambda_+$. Функция уклонений

$$\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda} \{ \lambda\alpha - \ln \varphi(\lambda) \}$$

аналитична в интервале (α_-, α_+) , где

$$\alpha_- \equiv \lim_{\lambda \downarrow \lambda_-} \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)}, \quad \alpha_+ \equiv \lim_{\lambda \uparrow \lambda_+} \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)}. \quad (6.11)$$

Рассмотрим наряду с распределением $\mathbf{F}$ случайной величины ξ распределение

$$\mathbf{F}_\lambda(dv) = \frac{e^{\lambda v}}{\varphi(\lambda)} \mathbf{F}(dv), \quad \lambda_- < \lambda < \lambda_+,$$

которое, как и (1.3), есть, очевидно, преобразование Крамера над $\mathbf{F}$, и обозначим, как и в [1], $\mathbf{F}^{(\alpha)} = \mathbf{F}_{\lambda(\alpha)}$. Случайную величину с распределением $\mathbf{F}_\lambda$ обозначим ξ_λ . Очевидно, что распределение $\mathbf{F}_\lambda$ абсолютно непрерывно относительно $\mathbf{F}$ и наоборот, т.е. ξ_λ, ξ имеют одну и ту же «структуру». В задаче А, которую мы рассматриваем, множество $(\mathcal{A}') = (\alpha_-, \alpha_+)$ (см. § 1) не ограничено справа, поэтому с необходимостью $\alpha_+ = \infty$. Поскольку $a_\lambda \equiv \mathbf{E}\xi_\lambda = \varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)$, то условие $\alpha_+ = \infty$ в терминах случайной величины ξ_λ можно записать в виде $\lim_{\lambda \uparrow \lambda_+} a_\lambda = \infty$, а уравнение

$$\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \alpha \quad (6.12)$$

при любом $\alpha > \alpha_-$ имеет единственное решение $\lambda(\alpha)$. Функция $\lambda(\alpha)$ будет играть важную роль в §§ 7, 9.

Обозначим $b_\lambda^2 = \mathbf{D}\xi_\lambda$,

$$\zeta_\lambda = \frac{\xi_\lambda - a_\lambda}{b_\lambda},$$

так что случайная величина ζ_λ имеет нулевое среднее и единичную дисперсию.

Преобразование Крамера для распределений из определенных выше классов обладает рядом замечательных свойств, которые будут названы в леммах 6.1–6.4, теоремах 6.1 и 6.2.

Леммы 6.1 и 6.2, приведенные ниже, посвящены случаю, когда распределение $\mathbf{F}$ лежит в классе $\mathcal{ER}$.

Лемма 6.1. Пусть $\mathbf{F} \in \mathcal{ER}$, $\beta \in (-2, -1)$ (при этом с необходимостью $\varphi(\lambda_+) < \infty$, $\alpha_+ = \infty$) и $\lambda = \lambda_+ - 1/\mu$. Тогда при $\mu \rightarrow \infty$ имеет место слабая сходимость

$$\xi_\lambda \Rightarrow \xi_{\lambda_+},$$

и, кроме того,

$$a_\lambda \sim c_1 L(\mu) \mu^{\beta+2}, \quad b_\lambda^2 \sim c_2 L(\mu) \mu^{\beta+3}, \quad \mu \rightarrow \infty, \quad (6.13)$$

где функция L — из представлений (6.1), (6.7), положительные константы c_1, c_2 известны в явном виде (см. (8.2), (8.7)). Поэтому имеет место слабая сходимость

$$\zeta_\lambda \Rightarrow 0 \quad \text{при } \mu \rightarrow \infty,$$

а для случайных величин ζ_λ^2 отсутствует свойство равномерной по $\lambda \leq \lambda_+$ интегрируемости.

В то же время для возрастающей функции $M(\mu) = \mu^{\beta_1}$ при $\beta_1 > -\beta - 1$ выполнено соотношение

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathbf{E}(|\zeta_\lambda|^2; |\zeta_\lambda| \geq \sqrt{M(\mu)}) = 0. \quad (6.14)$$

В арифметическом случае для любых $\delta > 0$, $M < \infty$, $t \in [\delta, M]$ таких, что $tb_\lambda \in \mathbf{Z}$, распределение ξ_λ удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{b_\lambda l(b_\lambda)} \mathbf{P}\left\{\frac{\xi_\lambda}{b_\lambda} = t\right\} = \frac{1 - e^{-\lambda_+}}{\varphi(\lambda_+)} t^\beta (1 + o(1)) \quad \text{при } \mu \rightarrow \infty. \quad (6.15)$$

Если в нерешетчатом случае дополнительно функция $L(t)$ удовлетворяет условию $[D_1]$, то для любых $\delta > 0$, $M < \infty$ распределение случайной величины ξ_λ/b_λ абсолютно непрерывно при $t \geq \delta$ и достаточно больших μ , а плотность $f_{\xi_\lambda/b_\lambda}(t)$ при $t \in [\delta, M]$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{b_\lambda l(b_\lambda)} f_{\xi_\lambda/b_\lambda}(t) = \frac{\lambda_+}{\varphi(\lambda_+)} t^\beta (1 + o(1)) \quad \text{при } \mu \rightarrow \infty. \quad (6.16)$$

В случае $\mathbf{F} \in \mathcal{ER}$ при $\beta < -2$ выполняется $\alpha_+ < \infty$ и, стало быть, этот случай при $\alpha = x/n > \alpha_+$ относится к задаче В (см. [1]). Если $\beta > -1$, то, очевидно, $\varphi(\lambda_+) = \infty$, $\alpha_+ = \infty$ и мы имеем дело с задачей А. Случай $\mathbf{F} \in \mathcal{ER}$ для $\beta \in (-2, -1)$, рассмотренный в лемме 6.1, является в известном смысле «промежуточным» между задачами А и В (см. [1]), и, как будет показано ниже, ему присущи свойства обеих задач А и В. Как следует из леммы 6.1, случайная величина $\zeta^{(\alpha)} = \zeta_{\lambda(\alpha)}$ для $\beta \in (-2, -1)$ при любом $\alpha_* > 0$ не удовлетворяет условию равномерной по $\alpha \geq \alpha_*$ интегрируемости $\zeta_{\lambda(\alpha)}^2$, что делает невозможным применение теоремы 3.4. Однако для достаточно быстро растущей функции $M(\mu)$ выполнено соотношение (6.14), и при подходящем $n = n(\lambda)$ для суммы $\zeta_\lambda(1) + \dots + \zeta_\lambda(n)$ выполнено условие Линдеберга. Последнее позволяет с помощью теоремы 4.1 указать функцию $M(n) \rightarrow \infty$ такую, что для уклонений $\alpha = x/n \leq M(n)$ сохраняется «привычная» форма (3.5), (3.7) асимптотики изучаемой вероятности (см. теорему 7.1 ниже).

Итак, в лемме 6.1 для $\mathbf{F} \in \mathcal{ER}$ рассмотрен случай $\varphi(\lambda_+) < \infty$, при котором свойство равномерной интегрируемости ζ_λ^2 при $\lambda \leq \lambda_+$ отсутствует. В лемме 6.2, приведенной ниже, рассмотрен альтернативный случай $\varphi(\lambda_+) = \infty$, в котором упомянутое выше свойство равномерной интегрируемости семейства $\{\zeta_\lambda^2; \lambda \leq \lambda_+\}$ всегда присутствует.

Лемма 6.2. Пусть $\mathbf{F} \in \mathcal{ER}$, $\beta(l) \in (-1, \infty)$, $\lambda = \lambda_+ - 1/\mu$. Тогда при $\mu \rightarrow \infty$ имеет место слабая сходимость

$$\zeta_\lambda \Rightarrow \zeta$$

вместе со всеми моментами, где случайная величина ζ имеет центрированное гамма-распределение с параметрами $(\beta + 1, \beta + 1)$, т.е. плот-

ность ζ имеет вид

$$f_{\zeta}(t) = \begin{cases} \frac{(\beta+1)^{\beta+1}(t+1)^{\beta}e^{-(\beta+1)(t+1)}}{\Gamma(\beta+1)}, & \text{если } t \geq -1, \\ 0, & \text{если } t < -1. \end{cases}$$

При этом для $\mu \rightarrow \infty$

$$\varphi(\lambda) \sim c\mu l(\mu), \quad a_{\lambda} \sim (\beta+1)\mu, \quad b_{\lambda}^2 \sim (\beta+1)\mu^2, \quad (6.17)$$

где константа $c > 0$ найдена в явном виде, функция l — из представления (6.7) для распределения $\mathbf{F}$.

В арифметическом случае для любых $\delta > 0$, $M < \infty$, $t \in [-1+\delta, M]$ таких, что $a_{\lambda} + tb_{\lambda} \in \mathbf{Z}$, имеет место соотношение

$$\mathbf{P}\{\zeta_{\lambda} = t\} = \frac{1}{b_{\lambda}} f_{\zeta}(t)(1 + o(1)) \quad \text{при } \mu \rightarrow \infty. \quad (6.18)$$

Если в нерешетчатом случае дополнительно функция $L(t)$ удовлетворяет условию $[D_1]$, то для любых $\delta > 0$, $M < \infty$ и всех достаточно больших μ распределение случайной величины ζ_{λ} абсолютно непрерывно в области $t \geq -1 + \delta$ с плотностью $f_{\zeta_{\lambda}}(t)$, которая удовлетворяет соотношениям

$$f_{\zeta_{\lambda}}(t) = f_{\zeta}(t)(1 + o(1)) \quad \text{при } t \in [-1 + \delta, M], \quad \mu \rightarrow \infty, \quad (6.19)$$

$$\limsup_{\mu \rightarrow \infty} \sup_{t \geq -1 + \delta} f_{\zeta_{\lambda}}(t) < \infty. \quad (6.20)$$

Рассмотрим теперь класс $\mathcal{E}\mathcal{S}e$.

Лемма 6.3. Пусть $\mathbf{F} \in \mathcal{E}\mathcal{S}e$, $\beta(l) \in (0, 1)$; при этом функция $L(t)$ положительна и для нее выполнено условие $[D_2]$; $\lambda = \lambda_+ - 1/\mu$. Тогда при $\mu \rightarrow \infty$ имеет место слабая сходимость

$$\zeta_{\lambda} \Rightarrow \zeta$$

вместе со всеми моментами, где случайная величина ζ имеет стандартное нормальное распределение. При этом функции a_{λ} , b_{λ}^2 правильно меняются как функции аргумента $\mu \rightarrow \infty$ с показателями $(1 - \beta)^{-1}$, $(2 - \beta)/(1 - \beta)$ соответственно.

В нерешетчатом случае для любого $M < \infty$ распределение ζ_{λ} при $t \geq -M$ и достаточно больших μ абсолютно непрерывно с плотностью $f_{\lambda}(t)$, удовлетворяющей соотношениям:

$$\text{для } |t| \leq M \quad f_{\lambda}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} (1 + o(1)), \quad \mu \rightarrow \infty; \quad (6.21)$$

$$\limsup_{\mu \rightarrow \infty} \sup_{t \geq -M} f_{\lambda}(t) < \infty.$$

В арифметическом случае для $|t| \leq M$ таких, что $a_{\lambda} + tb_{\lambda} \in \mathbf{Z}$, при любом $M < \infty$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{\zeta_{\lambda} = t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b_{\lambda}} e^{-t^2/2} (1 + o(1)), \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (6.22)$$

З а м е ч а н и е 6.1. 1. Если $\mathbf{F} \in \mathcal{E}\mathcal{S}\mathcal{e}$, $\beta(l) > 0$ и при этом функция $l(L)$ отрицательна, то мы имеем дело с задачей В (см. [1]).

2. В условиях леммы 6.3 для любого $\nu \in (0, \beta/2)$ и $M(\mu) = \mu^{\varphi/(1-\beta)}$ соотношения (6.21), (6.22) с заменой в них t^2 на $t^2(1 + o(1))$ сохранятся для t из расширяющегося отрезка $[-M(\mu), M(\mu)]$; при этом в нерешетчатом случае вариация абсолютно непрерывной компоненты распределения ζ_λ не меньше, чем $1 - \exp\{-\mu^{(\beta-\nu)/(1-\beta)}(1 + o(1))\}$, при $\mu \rightarrow \infty$.

В справедливости п. 2 замечания 6.1 можно убедиться, анализируя доказательство леммы 6.3, приведенное в п. 8.4.

Перейдем теперь к рассмотрению класса $\mathcal{S}\mathcal{E}$.

Лемма 6.4. Пусть $\mathbf{F} \in \mathcal{S}\mathcal{E}$; $\beta(l) > 1$, если $\mathbf{F}$ — нерешетчатое распределение, и $\beta \in (1, 2)$, если $\mathbf{F}$ — арифметическое распределение. Пусть, кроме того, функция $L(t)$ (см. (6.9) и (6.1)) удовлетворяет условию $[D_2]$. Тогда при $\lambda \rightarrow \infty$ имеет место слабая сходимость

$$\zeta_\lambda \Rightarrow \zeta$$

вместе со всеми моментами, где случайная величина ζ имеет стандартное нормальное распределение. При этом функции a_λ, b_λ^2 правильно меняются при $\lambda \rightarrow \infty$ с показателями $(\beta - 1)^{-1}$, $(2 - \beta)/(\beta - 1)$ соответственно.

В нерешетчатом случае для любого $M < \infty$ распределение ζ_λ при $t \geq -M$ и достаточно больших λ абсолютно непрерывно с плотностью $f_\lambda(t)$, удовлетворяющей соотношениям:

$$\text{для } |t| \leq M \quad f_\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} (1 + o(1)), \quad \lambda \rightarrow \infty; \quad (6.23)$$

$$\limsup_{\mu \rightarrow \infty} \sup_{t \geq -M} f_\lambda(t) < \infty.$$

В арифметическом случае для $|t| \leq M$ таких, что $a_\lambda + tb_\lambda \in \mathbf{Z}$, при любом $M < \infty$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{\zeta_\lambda = t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b_\lambda} e^{-t^2/2} (1 + o(1)) \quad \text{при } \mu \rightarrow \infty. \quad (6.24)$$

З а м е ч а н и е 6.2. В условиях леммы 6.4 для любого $\nu \in (0, \beta/2)$ и $M(\lambda) = \lambda^{\nu/(\beta-1)}$ соотношения (6.23), (6.24) с заменой в них t^2 на $t^2(1 + o(1))$ сохранятся для t из расширяющегося отрезка $[-M(\lambda), M(\lambda)]$; при этом в нерешетчатом случае вариация абсолютно непрерывной компоненты распределения ζ_λ не меньше, чем $1 - \exp\{-\lambda^{(\beta-\nu)(\beta-1)^{-1}}(1 + o(1))\}$, при $\lambda \rightarrow \infty$.

В справедливости замечания 6.2 можно убедиться, анализируя доказательство леммы 6.4.

Доказательства лемм 6.1–6.4 приведены в § 8.

6.3. Характеризация нормального распределения с помощью преобразования Крамера. Из леммы 6.4 следует, что для нерешетчатых распределений $\mathbf{F} \in \mathcal{S}^{\mathcal{E}}$ при некоторых дополнительных условиях выполнено соотношение $b_{\lambda}^2 \equiv \mathbf{D}\xi_{\lambda} = \lambda^{(\beta-2)/(\beta-1)} L_b(\lambda)$, где $L_b(\lambda)$ — м.м. функция при $\lambda \rightarrow \infty$. Это значит, что при $\beta = 2$ дисперсия $\mathbf{D}\xi_{\lambda}$ может оказаться постоянной при всех λ . Нетрудно видеть, что этим свойством обладает нормальное распределение. Более того, это свойство оказывается *характеристическим* для нормальности распределения: *нормальное распределение оказывается единственным распределением, дисперсия которого инвариантна относительно преобразования Крамера.*

Теорема 6.1. Пусть для распределения $\mathbf{F}$ невырожденной случайной величины ξ выполнено условие Крамера [C], т.е. $\lambda_- < \lambda_+$. Тогда три следующих утверждения эквивалентны:

- а) дисперсия $\mathbf{D}\xi_{\lambda}$ не зависит от λ в некоторой окрестности точки $\lambda_0 \in (\lambda_-, \lambda_+)$;
- б) распределение случайной величины $\xi_{\lambda} - \mathbf{E}\xi_{\lambda}$ не зависит от λ в некоторой окрестности точки $\lambda_0 \in (\lambda_-, \lambda_+)$;
- с) распределение $\mathbf{F}$ нормально.

При этом если выполнено хотя бы одно из утверждений а), б), с), то $\lambda_+ = \infty$, $\lambda_- = -\infty$ и для всех $\lambda \in \mathbf{R}^1$ распределение случайной величины $\xi_{\lambda} - \mathbf{E}\xi_{\lambda}$ не зависит от λ (и является нормальным с нулевым средним).

Доказательство. Если распределение $\mathbf{F}$ случайной величины ξ нормально со средним a и дисперсией b^2 , то преобразование Лапласа над распределением $\mathbf{F}$ имеет вид $\varphi(\lambda) = e^{\lambda^2 b^2/2 + a\lambda}$. Преобразование Лапласа над распределением ξ_{λ} имеет вид

$$\varphi_{\lambda}(\mu) = \frac{\varphi(\lambda + \mu)}{\varphi(\lambda)} = e^{\mu^2 b^2/2 + (\lambda b^2 + a)\mu},$$

т.е. ξ_{λ} тоже имеет нормальное распределение с той же дисперсией b^2 и с новым средним $\lambda b^2 + a$. Поэтому центрированная случайная величина $\xi_{\lambda} - \mathbf{E}\xi_{\lambda}$ имеет распределение, не зависящее от λ . Мы убедились, что с) влечет б). Поскольку очевидно, что из б) следует а), то нам осталось доказать, что из а) следует с).

Так как

$$\mathbf{D}\xi_{\lambda} = \frac{\varphi''(\lambda) - (\varphi'(\lambda))^2}{\varphi(\lambda)} = (\ln \varphi(\lambda))'',$$

то из а) следует, что для некоторого непустого интервала (c_1, c_2)

$$(\ln \varphi(\lambda))'' = b^2 = \text{const} > 0 \quad \text{при } \lambda \in (c_1, c_2).$$

Стало быть, функция $\ln \varphi(\lambda)$ при $\lambda \in (c_1, c_2)$ имеет вид

$$\ln \varphi(\lambda) = c + a\lambda + \lambda^2 \frac{b^2}{2},$$

где с необходимостью $c = 0$. Это означает, что распределение $\mathbf{F}$ нормально.

Теорема 6.1 доказана.

Покажем теперь, что справедлив и многомерный аналог теоремы 6.1, а именно следующая теорема.

Теорема 6.2. Пусть для распределения $\mathbf{F}$ невырожденного случайного вектора $\xi \in \mathbf{R}^d$ выполнено условие Крамера [С], т.е. множество $\mathcal{A}$ конечности преобразование Лапласа $\varphi(\lambda)$ имеет непустую внутренность ($\mathcal{A}$). Тогда три следующих утверждения эквивалентны:

А) ковариационная матрица

$$B_{\lambda}^2 = \mathbf{E}(\xi_{\lambda} - \mathbf{E}\xi_{\lambda})^T (\xi_{\lambda} - \mathbf{E}\xi_{\lambda})$$

не зависит от λ в некоторой окрестности точки $\lambda_0 \in (\mathcal{A})$;

В) распределение случайного вектора $\xi_{\lambda} - \mathbf{E}\xi_{\lambda}$ не зависит от λ в некоторой окрестности точки $\lambda_0 \in (\mathcal{A})$;

С) распределение $\mathbf{F}$ нормально.

При этом если выполнено хотя бы одно из утверждений А), В), С), то $\mathcal{A} = \mathbf{R}^d$ и для всех $\lambda \in \mathbf{R}^d$ распределение случайного вектора $\xi_{\lambda} - \mathbf{E}\xi_{\lambda}$ не зависит от λ (и является нормальным с нулевым средним).

Доказательство. Очевидно, что из утверждения С) следует утверждение В), а из утверждения В) — утверждение А). Докажем, что из утверждения А) следует утверждение С). Для произвольного вектора $e \in \mathbf{R}^d$, $|e| = 1$, рассмотрим случайную величину $\xi^{(e)} = \langle e, \xi \rangle$. Тогда, очевидно, $\xi_{\lambda}^{(e)} = \langle e, \xi_{\lambda} \rangle$, и для случайной величины $\xi_{\lambda}^{(e)}$ утверждение а) теоремы 6.1 является следствием утверждения А) для случайного вектора ξ . Поэтому, в силу теоремы 6.1, для случайной величины $\xi^{(e)}$ справедливо утверждение с) о том, что распределение $\xi^{(e)}$ нормально. В силу произвольности единичного вектора e из нормальности распределения $\xi^{(e)}$ вытекает нормальность распределения ξ . Теорема 6.2 доказана.

§ 7. Вероятности сверхбольших отклонений для распределений из классов $\mathcal{ER}$, $\mathcal{ESe}$, $\mathcal{SE}$

В настоящем параграфе мы получим интегро-локальные и локальные теоремы в задаче А (см. § 1) о вероятностях сверхбольших отклонений для сумм $S(n) = \xi(1) + \dots + \xi(n)$, где слагаемые $\xi(i)$ независимы и имеют распределение $\mathbf{F}$ из классов $\mathcal{ER}$, $\mathcal{ESe}$, $\mathcal{SE}$. Доказательства заключаются в проверке условий теорем 3.4, 4.1 для распределений из рассматриваемых классов. Отметим, что в одномерном случае усеченный снизу конус $\underline{K}$ (см. (2.2)) превращается в полуось $\{t: t \geq c > 0\}$. В связи с этим в обозначении условий, в которых в многомерном случае

присутствует нижний индекс $\underline{K}$, в одномерном случае этот индекс заменим нижним индексом $> c$ (вместо $[\underline{U}_K]$, $[\underline{R}_K^\gamma]$, $[\underline{R}_K^{(\text{den})}]$, $[\underline{Z}_K]$ будем писать $[\underline{U}_{>c}]$, $[\underline{R}_{>c}^\gamma]$, $[\underline{R}_{>c}^{(\text{den})}]$, $[\underline{Z}_{>c}]$ соответственно).

Напомним, что функция $\sigma(\alpha) = b_{\lambda(\alpha)}$, присутствующая в теоремах 3.4, 4.1, является корнем из дисперсии случайной величины $\xi^{(\alpha)} = \xi_{\lambda(\alpha)}$; при этом функция $\lambda(\alpha)$ удовлетворяет уравнению

$$a_{\lambda(\alpha)} = \alpha, \quad (7.1)$$

где $a_\lambda = \mathbf{E}\xi_\lambda$. Поскольку в леммах 6.1–6.4 изучено асимптотическое поведение функций a_λ , b_λ , то с помощью (7.1) удастся отыскать асимптотики функций $\lambda(\alpha)$, $\sigma(\alpha)$, $\Lambda(\alpha) = \int_{\mathbf{E}\xi}^\alpha \lambda(u) du$ при $\alpha \rightarrow \infty$ (см. ниже). Кроме того, в § 9 найдены асимптотические разложения для функции $\Lambda(\alpha)$, позволяющие для некоторых диапазонов сверхбольших уклонений получать аппроксимацию функции $n\Lambda(\alpha)$ с точностью до $o(1)$.

В теоремах 7.1, 7.3, 7.4, приведенных ниже, в качестве нижней границы уклонений $\alpha = x/n$ выбрано фиксированное число $\alpha_* > \alpha_-$, где α_- есть левая граница области аналитичности функции уклонений $\Lambda(\alpha)$ (см. (6.11)). Это означает, что в названных теоремах рассмотрены не только сверхбольшие уклонения, когда $\alpha = x/n \rightarrow \infty$, но и большие уклонения $\alpha \rightarrow \alpha_0 \in (\alpha_*, \infty)$, если $\alpha_0 > \mathbf{E}\xi$, и даже нормальные уклонения $\alpha \rightarrow \mathbf{E}\xi$, если $\mathbf{E}\xi > \alpha_*$. Однако утверждения о больших и нормальных уклонениях справедливы и при более широких условиях (см. теорему 1.1).

7.1. Сверхбольшие уклонения для сумм слагаемых из класса $\mathcal{ER}$. Рассмотрим сначала случай $\mathbf{F} \in \mathcal{ER}$, $\beta \in (-2, -1)$, к которому относится лемма 6.1. В силу названной леммы и (7.1) находим при $\alpha \rightarrow \infty$

$$\lambda(\alpha) = \lambda_+ - \alpha^{-1/(\beta+2)} L_1(\alpha), \quad \sigma(\alpha) = \alpha^{(\beta+3)/(2\beta+4)} L_2(\alpha),$$

$$\Lambda(\alpha) = \lambda_+ \alpha + c + o(1),$$

где L_1, L_2 — положительные м.м. функции, $c = \text{const}$.

Теорема 7.1. Пусть $\mathbf{F} \in \mathcal{ER}$, $\beta \in (-2, -1)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Если распределения $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_{\lambda_+}$ удовлетворяют условию $[\mathbf{R}^\gamma]$ для некоторого $\gamma > 0$ (для чего достаточно существования ненулевой абсолютно непрерывной компоненты у распределения $\mathbf{F}$), то для любых фиксированных чисел $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\alpha_* > \alpha_-$ и для любой последовательности $\delta(n) \downarrow 0$ имеет место представление

$$\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\} = \frac{\Delta}{\sqrt{2\pi n\sigma(\alpha)}} e^{-n\Lambda(\alpha)} (1 + \varepsilon_n), \quad (7.2)$$

где $\alpha = x/n$, а остаточный член $\varepsilon_n = \varepsilon_n(x, \Delta)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_2, \alpha_* \leq \alpha \leq n^{(\beta+2)/|\beta+1|-\delta_1}} |\varepsilon_n(x, \Delta)| = 0$$

для $\Delta_1 = e^{-n/m(\alpha)}$, $m(\alpha) = \alpha^{|\beta+1|/(\beta+2)+\delta_2}$, $\Delta_2 = \delta(n)$.

(ii) Если выполнено условие [Z], то для любых фиксированных чисел $\alpha_* > \alpha_-$, $\delta_1 > 0$ имеет место представление

$$\mathbf{P}\{S(n) = x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma(\alpha)}} e^{-n\Lambda(\alpha)}(1 + \varepsilon_n), \quad x \in \mathbf{Z}, \quad (7.3)$$

где $\alpha = x/n$, а остаточный член $\varepsilon_n = \varepsilon_n(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbf{Z}, \alpha_* \leq \alpha \leq n^{(\beta+2)/|\beta+1|-\delta_1}} |\varepsilon_n(x)| = 0.$$

Доказательство. Из леммы 6.1 и условий доказываемой теоремы следует, что для любого $\delta_2 > 0$ выполнены условия теоремы 4.1 с функцией $m(\alpha) = [\alpha^{|\beta+1|/(\beta+2)+\delta_2}]$. Поэтому теорема 7.1 следует из теоремы 4.1.

Обратимся к уклонениям $\alpha = x/n > n^{(\beta+2)/|\beta+1|-\delta_1}$ (или $x > n^{|\beta+1|^{-1}-\delta_1}$), которые не рассмотрены в теореме 7.1. Поскольку для $\mathbf{F} \in \mathcal{ER}$ при $\beta \in (-2, -1)$ выполняется $\varphi(\lambda_+) < \infty$, то случайная величина ξ_{λ_+} определена и ее распределение имеет правильно меняющийся правый хвост

$$V_+(t) = \mathbf{P}\{\xi_{\lambda_+} \geq t\} = \frac{\lambda_+}{|\beta+1|\varphi(\lambda_+)} t^{\beta+1} L(t)(1 + o(1)) \quad \text{при } t \geq 0.$$

Поэтому в силу известных теорем (см., например, теорему 2 на с. 646 в [3]) распределение $\mathbf{F}_{\lambda_+}$ принадлежит области притяжения устойчивого закона $\mathbf{Q}$ с показателем $\beta_* = |\beta+1|$, сосредоточенного на правой полуоси. Это означает, что для правильно меняющейся с показателем $1/\beta_*$ функции $B_t = V_+^{(-1)}(1/t)$, где $V_+^{(-1)}(u)$ — обратная к $V_+(t)$ функция (см. п. 8.1, утверждение III), имеет место слабая сходимость

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_{\lambda_+}(n)}{B_n} \in \cdot\right\} \Rightarrow \mathbf{Q}(\cdot) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Известно, далее, что предельное распределение $\mathbf{Q}$ абсолютно непрерывно, а его плотность $q = q(t)$ непрерывна, положительна для всех $t > 0$ и равна 0 для всех неположительных t (см., например, [3, с. 652]). Рассуждая так же, как при выводе формулы (2.9), но используя при этом преобразование Крамера $\mathbf{F}_\lambda$ в фиксированной точке $\lambda = \lambda_+$ (тут мы, решая задачу А, следуем по пути решения задачи В, изложенному в § 2), получаем для $\alpha = x/n$, $\Delta = o(1)$ (ср. с (2.9))

$$\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\} = e^{-n\Lambda(\alpha)} \mathbf{P}\{S_{\lambda_+}(n) \in \Delta[x]\}(1 + o(1)), \quad (7.4)$$

где $\Lambda_+(\alpha) = \lambda_+ \alpha - \ln \varphi(\lambda_+) = \Lambda(\alpha_+) + (\alpha - \alpha_+) \lambda_+$. В арифметическом случае формуле (7.4) соответствует более простое соотношение (ср. с (2.19))

$$\mathbf{P}\{S(n) = x\} = e^{-n\Lambda_+(\alpha)} \mathbf{P}\{S_{\lambda_+}(n) = x\}, \quad x \in \mathbf{Z}. \quad (7.5)$$

Итак, в силу (7.4), (7.5) задача о сверхбольших уклонениях суммы $S(n)$ для $\mathbf{F} \in \mathcal{SR}$, $\beta(l) \in (-2, -1)$ в случае, не охваченном теоремой 7.1, сводится к двум задачам: 1) о нормальных уклонениях суммы $S_{\lambda_+}(n)$, если $x = O(B_n)$, и 2) о больших уклонениях суммы $S_{\lambda_+}(n)$, если $x \gg B_n$. Первая задача решена в работах [9], [10], благодаря чему в теореме 7.2 (см. ниже) найдена асимптотика вероятностей сверхбольших уклонений $S(n)$ для x порядка $O(B_n) = O(n^{1/\beta} \cdot L_B(n))$.

К сожалению, в настоящее время отсутствует интегро-локальная теорема о больших уклонениях сумм случайных величин из класса $\mathcal{R}$ при бесконечном первом моменте, поэтому область сверхбольших уклонений $x \gg B_n = n^{1/\beta} \cdot L_B(n)$ для исходных сумм $S(n)$ остается пока не изученной.

Результатом приведенных рассуждений является следующая теорема.

Теорема 7.2. Пусть $\mathbf{F} \in \mathcal{ER}$, $\beta(l) \in (-2, -1)$ и c, C — любые фиксированные числа такие, что $0 < c \leq C < \infty$.

(i) Если выполнено условие [R], то для некоторой последовательности $\Delta_1 = \Delta_1(n) = o(1)$ и любой последовательности $\Delta_2 = \Delta_2(n) = o(1)$, $\Delta_2 \geq \Delta_1$ при $n \rightarrow \infty$, справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\} = \frac{\Delta}{B_n} e^{-n\Lambda_+(\alpha)} q\left(\frac{x}{B_n}\right) (1 + \varepsilon_n), \quad (7.6)$$

где $\alpha = x/n$, а остаточный член $\varepsilon_n = \varepsilon_n(x, \Delta)$ стремится к 0 равномерно по $\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]$ и $\alpha = x/n \in [cB_n/n, CB_n/n]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [cB_n, CB_n], \Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_2} |\varepsilon_n(x, \Delta)| = 0. \quad (7.7)$$

(ii) Если вместо условия [R] для распределения $\mathbf{F}_{\lambda_+}$ выполнено более сильное условие $[R^\gamma]$, то в соотношении (7.6) остаточный член $\varepsilon_n = \varepsilon_n(x, \Delta)$ удовлетворяет соотношению (7.7), в котором $\Delta_1 = e^{-n\gamma_1}$ при любом фиксированном $\gamma_1 < \gamma$ и $\Delta_2 = o(1)$, $\Delta_2 \geq \Delta_1$.

(iii) Если же вместо условия [R] выполнено условие [Z], то для $x \in \mathbf{Z}$, $\alpha = x/n \in [cB_n/n, CB_n/n]$ справедливо

$$\mathbf{P}\{S(n) = x\} = \frac{1}{B_n} e^{-n\Lambda_+(\alpha)} q\left(\frac{x}{B_n}\right) (1 + o(1)).$$

Доказательство. В силу (7.4) для доказательства частей (i), (ii) теоремы 7.2 достаточно отыскать асимптотику вероятности $\mathbf{P}\{S_{\lambda_+}(n) \in \Delta[x]\}$. В силу интегро-локальных теорем, полученных

в [10], имеем

$$\mathbf{P}\{S_{\lambda_+}(n) \in \Delta[x]\} = \frac{\Delta}{B_n} q\left(\frac{x}{B_n}\right)(1 + o(1)).$$

Это вместе с (7.4) доказывает части (i), (ii) теоремы 7.2. Для доказательства части (iii) теоремы 7.2 в силу (7.5) достаточно отыскать асимптотику вероятности $\mathbf{P}\{S_{\lambda_+}(n) = x\}$. Для этого тоже надо применить интегро-локальную теорему, полученную в [9]. Теорема 7.2 доказана.

Обратимся теперь к случаю $\mathbf{F} \in \mathcal{ER}$, $\beta > -1$, к которому относится лемма 6.2. В силу названной леммы и (7.1) находим

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha) &= \lambda_+ - \frac{1}{\alpha(\beta+1)}(1 + o(1)), \\ \sigma(\alpha) &\sim \frac{\alpha}{\sqrt{\beta+1}}, \quad \Lambda(\alpha) = \lambda_+ \alpha - \frac{1}{\beta+1} \ln \alpha(1 + o(1)) \end{aligned} \quad (7.8)$$

при $\alpha \rightarrow \infty$.

Теорема 7.3. Пусть $\mathbf{F} \in \mathcal{ER}$, $\beta > -1$. Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Если распределение $\mathbf{F}$ имеет ненулевую абсолютно непрерывную компоненту, то для любых фиксированных чисел $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\alpha_* > \alpha_-$ и для любой последовательности $\delta(n) \downarrow 0$ имеет место представление (7.2), в котором остаточный член $\varepsilon_n = \varepsilon_n(x, \Delta)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_2, \alpha_* \leq \alpha \leq n^{(\beta+1)^{-1} - \delta_1}} |\varepsilon_n(x, \Delta)| = 0$$

для $\Delta_1 = e^{-n/m(\alpha)}$, $m(\alpha) = \alpha^{1+\beta+\delta_2}$, $\Delta_2 = \delta(n)$.

(ii) Если функция L удовлетворяет условию $[D_1]$, то для любого фиксированного $\alpha_* > \max\{0, \alpha_-\}$ и всех достаточно больших n распределение суммы $S(n)$ абсолютно непрерывно в области $x \geq n\alpha_*$ с плотностью

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma(\alpha)}} e^{-n\Lambda(\alpha)}(1 + \varepsilon_n), \quad (7.9)$$

где $\alpha = x/n$, а остаточный член $\varepsilon_n = \varepsilon_n(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \geq \alpha_*} |\varepsilon_n(x)| = 0.$$

(iii) Если выполнено условие $[Z]$, то при любом фиксированном $\alpha_* > \alpha_-$ для вероятности $\mathbf{P}\{S(n) = x\}$ имеет место представление (7.3), где $\alpha = x/n$, а остаточный член $\varepsilon_n = \varepsilon_n(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbf{Z}, \alpha \geq \alpha_*} |\varepsilon_n(x)| = 0.$$

Утверждение (ii) теоремы 7.3 согласуется с результатами работы [12], где для абсолютно непрерывного распределения $\mathbf{F} \in \mathcal{ER}$, $\beta > -1$ получено асимптотическое разложение для плотности $f_n(x)$ распределения суммы $S(n)$.

Доказательство. В силу леммы 6.2 в условиях доказываемой теоремы выполнено условие $[U_{>c}]$ теоремы 3.4. При этом в части (ii) теоремы 7.3 выполнено условие $[R_{>c}^{(\text{den})}]$, а в части (iii) — условие $[Z_{>c}]$. Поэтому утверждения частей (ii) и (iii) теоремы 7.3 следуют из теоремы 3.4. Для доказательства части (i) заметим, что в силу (6.17) для м.м. функции $L(\mu)$ из (6.1) и некоторого $c > 0$ выполняется $\varphi(\lambda_+ - 1/\mu) \sim c\mu^{\beta+1}L(\mu)$ при $\mu \rightarrow \infty$. Поэтому распределение случайной величины $\xi_{\lambda_+ - 1/\mu}$ имеет абсолютно непрерывную компоненту с вариацией, не меньшей, чем $c_1/\varphi(\lambda_+ - 1/\mu) = c_2/(\mu^{\beta+1}L(\mu))$. Следовательно, для любого $\delta > 0$ распределение нормированной суммы $(1/\sqrt{m_\mu})(\xi_\lambda(1) + \dots + \xi_\lambda(m_\mu))$, где $m_\mu = [\mu^{\beta+1+\delta}]$, имеет абсолютно непрерывную компоненту с вариацией, сравнимой с 1. При этом (см. (7.8)) справедливо $\lambda(\alpha) = \lambda_+ - [\alpha(\beta+1)]^{-1}(1 + o(1))$, так что для функции $\mu(\alpha)$, определяемой соотношением $\lambda(\alpha) = \lambda_+ - 1/\mu(\alpha)$, справедливо $\mu(\alpha) \sim \alpha(\beta+1)$. Поэтому в условиях части (i) доказываемой теоремы выполнены условия части (i) теоремы 4.1 с функцией $m(\alpha) = [\alpha^{\beta+1+\delta}]$, и утверждение части (i) теоремы 7.3 следует из теоремы 4.1. Теорема 7.3 доказана.

7.2. Сверхбольшие уклонения для сумм слагаемых из классов $\mathcal{ESe}$, $\mathcal{SE}$. Рассмотрим сначала случай $\mathbf{F} \in \mathcal{ESe}$, к которому относится лемма 6.3. Из названной леммы и (7.1) следует, что при $\alpha \rightarrow \infty$

$$\lambda(\alpha) = \lambda_+ - \alpha^{\beta-1}L_1(\alpha), \quad \sigma(\alpha) = \alpha^{1-\beta/2}L_2(\alpha),$$

$$\Lambda(\alpha) = \lambda_+\alpha - \beta^{-1}\alpha^\beta L_1(\alpha)(1 + o(1)),$$

где L_1, L_2 — м.м. функции.

В случае $\mathbf{F} \in \mathcal{SE}$, к которому относится лемма 6.4, аналогичным образом устанавливаем, что

$$\lambda(\alpha) = \alpha^{\beta-1}L_1(\alpha), \quad \sigma(\alpha) = \alpha^{1-\beta/2}L_2(\alpha), \quad \Lambda(\alpha) = \alpha^\beta L_3(\alpha), \quad \alpha \rightarrow \infty,$$

где L_1, L_2, L_3 — м.м. функции.

Теорема 7.4. Пусть выполнено одно из следующих двух условий:

- 1) $\mathbf{F} \in \mathcal{ESe}$, функция l отрицательна и удовлетворяет условию $[D_2]$;
- 2) $\mathbf{F} \in \mathcal{SE}$, функция l удовлетворяет условию $[D_2]$ и при этом $\beta(l) > 1$ для нерешетчатого случая и $\beta \in (1, 2)$ в арифметическом случае.

Тогда справедливы следующие утверждения.

- (i) Если выполнено условие $[R]$, то для любого фиксированного $\alpha_* > \max\{0, \alpha_-\}$ и всех достаточно больших n распределение

суммы $S(n)$ абсолютно непрерывно в области $x \geq n\alpha_*$ с плотностью $f_n(x)$, допускающей представление (7.9), в котором $\alpha = x/n$, а остаточный член $\varepsilon_n = \varepsilon_n(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha \geq \alpha_*} |\varepsilon_n(x)| = 0.$$

(ii) Если выполнено условие $[Z]$, то при любом фиксированном $\alpha_* > \alpha_-$ и всех $\alpha = x/n \geq \alpha_*$ для вероятности $\mathbf{P}\{S(n) = x\}$ справедливо представление (7.3), в котором остаточный член $\varepsilon_n = \varepsilon_n(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbf{Z}, \alpha \geq \alpha_*} |\varepsilon_n(x)| = 0.$$

В теорему 7.4 не включен случай арифметического распределения $\mathbf{F} \in \mathcal{SE}$ для $\beta > 2$, который не рассматривается в лемме 6.4. В этом случае универсальная форма ответа (7.3) в области сверхбольших уклонений отсутствует, о чем свидетельствует результат А. В. Нагаева в [7] (см. также [8]). В теоремах 2–4 работы [7] для арифметического распределения $\mathbf{F} \in \mathcal{SE}$ в частном случае $l(n) = n^\beta$, $2 < \beta < 3$, получены локальные теоремы в области сверхбольших уклонений.

Доказательство теоремы 7.4 Из лемм 6.3, 6.4 следует, что в условиях доказываемой теоремы выполнено условие $[U_{>c}^{(\text{den})}]$ теоремы 3.4; при этом в части (i) теоремы 7.4 выполнено условие $[R_{>c}^{(\text{den})}]$, а в части (ii) — условие $[Z_{>c}]$. Поэтому теорема 7.4 следует из теоремы 3.4.

§ 8. Доказательство лемм 6.1–6.4

8.1. Свойства медленно меняющихся функций. Нам понадобятся следующие свойства медленно меняющихся функций.

I. Если L — м.м. функция, то

$$\frac{L(tv)}{L(t)} \rightarrow 1$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по v на любом отрезке $[v_1, v_2]$, $0 < v_1 \leq v_2 < \infty$.

II. Функция L является м.м. функцией тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде

$$L(t) = c(t) \exp \left\{ \int_{t_0}^t \frac{\varepsilon(u)}{u} du \right\}, \quad t \geq t_0,$$

при некотором $t_0 > 0$, где функции $c(\cdot)$, $\varepsilon(\cdot)$ измеримы и $c(t) \rightarrow c \in (0, \infty)$, $\varepsilon(t) = o(1)$ при $t \rightarrow \infty$.

III. Пусть $l(t) = t^\beta L(t)$, где $\beta > 0$, $L(t)$ — м.м. функция и

$$l^{(-1)}(u) = \inf \{t: l(t) \geq u\}.$$

Тогда

$$l^{(-1)}(u) = u^{1/\beta} L_1(u),$$

где $L_1(u)$ — м.м. функция при $u \rightarrow \infty$, и

$$l(l^{(-1)}(u)) = u(1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty.$$

IV. Пусть $L(t)$ — м.м. функция, и пусть $p > -1$. Тогда

$$\int_0^t u^p L(u) du \sim (p+1)^{-1} t^{p+1} L(t), \quad t \rightarrow \infty.$$

V. Пусть $U(dt)$ — мера, сосредоточенная на $(0, \infty)$ и такая, что функция

$$\omega(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(dt)$$

конечна для всех $\lambda > 0$. Тогда если функция $U(t) = U((0, t])$ правильно меняется с показателем $\beta > -1$, то при $\mu \rightarrow \infty$

$$\omega(\mu^{-1}) \sim \Gamma(\beta + 1) U(\mu).$$

Доказательство утверждений I–III можно найти в [5], [6]. Утверждение IV следует из теоремы 1 на с. 322 в [3], а утверждение V — из теоремы 1 на с. 499 в [3]. Кроме того, доказательства названных утверждений и более полные сведения о правильно меняющихся функциях содержатся в [4].

8.2. Доказательство леммы 6.1. В условиях леммы 6.1 при $\mu := 1/(\lambda_+ - \lambda) \rightarrow \infty$ выполняется

$$\varphi(\lambda) \rightarrow \varphi(\lambda_+) < \infty, \quad \mathbf{E}(e^{\lambda \xi}; \xi < x) \Rightarrow \mathbf{E}(e^{\lambda_+ \xi}; \xi < x).$$

Поэтому имеет место слабая сходимость

$$\mathbf{P}\{\xi_\lambda < x\} = \frac{\mathbf{E}(e^{\lambda \xi}; \xi < x)}{\varphi(\lambda)} \Rightarrow \frac{\mathbf{E}(e^{\lambda_+ \xi}; \xi < x)}{\varphi(\lambda_+)} = \mathbf{P}\{\xi_{\lambda_+} < x\}.$$

Изучим теперь асимптотику моментов $a_\lambda^{(k)} := \mathbf{E}\xi_\lambda^k$, $k = 1, 2, \dots$, при $\mu \rightarrow \infty$. Поскольку для $k = 1, 2, \dots$ справедливо $\mathbf{E}\xi_{\lambda_+}^k = \infty$, то $a_\lambda^{(k)} \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow \infty$. При этом

$$a_\lambda^{(k)} = \frac{1}{\varphi(\lambda_+)} I_\lambda^{(k)}(1 + o(1)), \quad I_\lambda^{(k)} \equiv - \int_0^\infty t^k e^{\lambda t} dV(t).$$

Выполняя в интеграле $I_\lambda^{(k)}$ интегрирование по частям, получаем:

$$I_\lambda^{(k)} = \lambda_+ J_\lambda^{(k)}(1 + o(1)), \quad \mu \rightarrow \infty,$$

где $J_\lambda^{(k)} \equiv \int_0^\infty t^k e^{\lambda t} V(t) dt$. Пусть сначала случайная величина ξ имеет нерешетчатое распределение. Тогда $V(t) = e^{-\lambda_+ t} t^\beta L(t)$ и

$$J_\lambda^{(k)} = \int_0^\infty e^{-t/\mu} dl_1(t),$$

где $l_1(t) = \int_0^t u^{\beta+k} L(u) du$. В силу утверждения IV

$$l_1(t) \sim (\beta + k + 1)^{-1} t^{\beta+k+1} L(t), \quad t \rightarrow \infty,$$

а в силу V

$$J_\lambda^{(k)} \sim \Gamma(\beta + k + 1) \mu^{\beta+k+1} L(\mu), \quad \mu \rightarrow \infty.$$

Таким образом, в нерешетчатом случае для $k = 1, 2, \dots$

$$a_\lambda^{(k)} \sim \frac{\lambda_+}{\varphi^{-1}(\lambda_+)} \mu^{\beta+k+1} \Gamma(\beta + k + 1) L(\mu), \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (8.1)$$

Поскольку для $\beta < -1$

$$(a_\lambda^{(1)})^2 = o(a_\lambda^{(2)}), \quad \mu \rightarrow \infty,$$

то из соотношений (8.1) следует (6.13), где (в *нерешетчатом* случае)

$$c_1 = \frac{\lambda_+ \Gamma(\beta + 2)}{\varphi(\lambda_+)}, \quad c_2 = \frac{\lambda_+ \Gamma(\beta + 3)}{\varphi(\lambda_+)}. \quad (8.2)$$

Так как $\xi_\lambda/b_\lambda \Rightarrow 0$, $a_\lambda/b_\lambda \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$, то имеет место слабая сходимость

$$\zeta_\lambda = \frac{\xi_\lambda - a_\lambda}{b_\lambda} \Rightarrow 0,$$

и для случайной величины ζ_λ^2 отсутствует свойство равномерной по $\lambda \leq \lambda_+$ интегрируемости.

Покажем теперь, что при любом $\beta_1 > -\beta - 1$ для случайной величины ζ_λ^2 и функции $M(\mu) = \mu^{\beta_1}$ выполнено соотношение (6.14). Для этого достаточно показать, что

$$\mathbf{E}(\xi_\lambda^2; |\xi_\lambda - a_\lambda| \geq b_\lambda \sqrt{M(\mu)}) = o(b_\lambda^2), \quad \mu \rightarrow \infty, \quad (8.3)$$

$$\mathbf{E}(|\xi_\lambda| a_\lambda; |\xi_\lambda - a_\lambda| \geq b_\lambda \sqrt{M(\mu)}) = o(b_\lambda^2), \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (8.4)$$

Поскольку $a_\lambda = \mathbf{E}\xi_\lambda \sim \mathbf{E}|\xi_\lambda| = o(b_\lambda)$, $\mu \rightarrow \infty$, то соотношение (8.4) имеет место. Так как

$$\mathbf{E}(\xi_\lambda^2; \xi_\lambda - a_\lambda \leq -b_\lambda \sqrt{M(\mu)}) = o(1), \quad \mu \rightarrow \infty,$$

то для доказательства (8.3) достаточно убедиться, что

$$\mathbf{E}(\xi_\lambda^2; \xi_\lambda \geq b_\lambda \sqrt{M(\mu)}) = o(b_\lambda^2), \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (8.5)$$

Повторяя вычисления, которые использовались выше для нахождения асимптотики $a_\lambda^{(k)}$, получаем для некоторого $c < \infty$

$$\mathbf{E}(\xi_\lambda^2; \xi_\lambda \geq b_\lambda \sqrt{M(\mu)}) \leq c b_\lambda^2 \int_{b_\lambda \sqrt{M(\mu)}/\mu}^\infty e^{-u} u^{\beta+2} du.$$

Так как $b_\lambda \sqrt{M(\mu)}/\mu \rightarrow \infty$ при $\beta_1 > -\beta - 1$ и $\mu \rightarrow \infty$, то (8.5) установлено.

В арифметическом случае равенство

$$V(t) = \mathbf{P}\{\xi \geq t\} = e^{-\lambda+t} t^\beta L(t)$$

выполняется в целых точках t и при этом функция $V(t)$ постоянна на любом полуинтервале $[k, k+1)$, $k \geq 0$. Следовательно,

$$V(t) = e^{-\lambda+[t]} [t]^\beta L([t]) = e^{-\lambda+[t]} t^\beta L_1(t),$$

где м.м. функция $L_1(t) = ([t]^\beta / t^\beta) L([t])$ удовлетворяет соотношению

$$L_1(t) \sim L(t) \sim L([t]), \quad t \rightarrow \infty.$$

Поэтому, повторяя с очевидными изменениями предыдущие рассуждения, мы получаем

$$a_\lambda^{(k)} \sim (1 - e^{-\lambda_+}) \varphi^{-1}(\lambda_+) L(\mu) \mu^{\beta+k+1} \Gamma(\beta+k+1), \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (8.6)$$

Из соотношений (8.6) следуют формулы (6.13), где (в арифметическом случае)

$$c_1 = \frac{(1 - e^{-\lambda_+}) \Gamma(\beta+2)}{\varphi(\lambda_+)}, \quad c_2 = \frac{(1 - e^{-\lambda_+}) \Gamma(\beta+3)}{\varphi(\lambda_+)}. \quad (8.7)$$

Далее доказательство (6.14) в арифметическом случае повторяет с очевидными изменениями доказательство в нерешетчатом случае.

Для доказательства (6.15) заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_\lambda = n\} &= \frac{e^{\lambda n}}{\varphi(\lambda)} [V(n) - V(n+1)] \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda_+}}{\varphi(\lambda)} e^{-(\lambda_+-\lambda)n} l(n)(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поэтому для $n = b_\lambda t \in \mathbf{Z}$, $t \in [\delta, \nu]$, $\beta < -1$ в силу (6.13) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\frac{\xi_\lambda}{b_\lambda} = t\right\} &= \frac{1 - e^{-\lambda_+}}{\varphi(\lambda_+)} e^{-(\lambda_+-\lambda)b_\lambda x} l(b_\lambda t)(1 + o(1)) \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda_+}}{\varphi(\lambda_+)} t^\beta l(b_\lambda)(1 + o(1)), \quad \mu \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Соотношение (6.15) доказано.

Если в нерешетчатом случае дополнительно выполнено условие $[D_1]$, то

$$l'(t) = \beta t^{\beta-1} L(t)(1 + o(1)), \quad t \rightarrow \infty,$$

и, стало быть, производная $v(t) = -V'(t) = -(e^{-\lambda+t} l(t))'$ удовлетворяет соотношению

$$v(t) = \lambda_+ e^{-\lambda+t} l(t)(1 + o(1)), \quad t \rightarrow \infty,$$

а хвост распределения ξ_λ имеет вид

$$\mathbf{P}\{\xi_\lambda \geq t\} = \frac{1}{\varphi(\lambda)} \int_t^\infty e^{\lambda u} v(u) du$$

для всех достаточно больших t . Поэтому для $t \geq t_0$ плотность этого распределения удовлетворяет соотношению

$$f_{\xi_\lambda}(t) \sim \frac{\lambda_+}{\varphi(\lambda)} e^{-t/\mu} l(t), \quad t \rightarrow \infty.$$

Следовательно, функция $f_{\xi_\lambda/b_\lambda}(t) = b_\lambda f_{\xi_\lambda}(tb_\lambda)$ удовлетворяет соотношению (6.16). Лемма 6.1 доказана.

8.3. Доказательство леммы 6.2. Пусть вновь $\lambda = \lambda_+ - 1/\mu$. Для $\mu > 1/\lambda_+$ и $k = 0, 1, 2, \dots$ обозначим

$$\varphi_-^{(k)}(\lambda) = \mathbf{E}(e^{\lambda \xi} \xi^k; \xi \leq 0), \quad \varphi_+^{(k)}(\lambda) = \mathbf{E}(e^{\lambda \xi} \xi^k; \xi > 0),$$

так что $\varphi^{(k)}(\lambda) = \varphi_-^{(k)}(\lambda) + \varphi_+^{(k)}(\lambda)$. Для нахождения асимптотики $\varphi_+^{(k)}(\lambda)$ при $\mu \rightarrow \infty$ в нерешетчатом случае, выполняя интегрирование по частям, получаем:

$$\varphi_+^{(k)}(\lambda) = - \int_0^\infty e^{\lambda t} t^k d\mathbf{P}\{\xi \geq t\} = \mathbf{P}\{\xi \geq 0\} 0^k + g_k(\mu) = g_k(\mu),$$

где

$$g_k(\mu) = \int_0^\infty e^{-t/\mu} dl_1(t), \quad l_1(t) = \int_0^t (\lambda u^k + k u^{k-1}) l(u) du.$$

В силу утверждения IV справедливо

$$l_1(t) \sim \lambda_+(k + \beta + 1)^{-1} t^{k+1} l(t), \quad t \rightarrow \infty,$$

в силу утверждения V

$$g_k(\mu) \sim \Gamma(k + \beta + 2) \lambda_+(k + \beta + 1)^{-1} \mu^{k+1} l(\mu), \quad \mu \rightarrow \infty.$$

Таким образом, в нерешетчатом случае

$$\varphi_+^{(k)}(\lambda) \sim \Gamma(k + \beta + 2) \lambda_+(k + \beta + 1)^{-1} \mu^{k+1} l(\mu), \quad \mu \rightarrow \infty. \tag{8.8}$$

В арифметическом случае выполняется соотношение

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = (1 - e^{-\lambda_+}) e^{-k\lambda_+} l_0(k),$$

где $l_0(k) \sim l(k)$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\varphi_+^{(k)}(\lambda) = (1 - e^{-\lambda_+}) \sum_{m=1}^\infty e^{-m/\mu} m^k l(m) = (1 - e^{-\lambda_+}) \int_1^\infty e^{-t/\mu} dl_2(t),$$

где

$$l_2(t) = \sum_{m=1}^{[t]} m^k l(m) \sim \int_0^t u^k l(u) du.$$

Применяя далее утверждения IV и V, получаем при $\mu \rightarrow \infty$

$$\varphi_+^{(k)}(\lambda) \sim \Gamma(k + \beta + 2) (1 - e^{-\lambda_+}) (k + \beta + 1)^{-1} \mu^{k+1} l(\mu). \tag{8.9}$$

Поскольку $\varphi_-^{(k)}(\lambda_+) < \infty$, то из (8.8) и (8.9) следует

$$\varphi^{(k)}(\lambda) \sim cL(\mu)\mu^{\beta+k+1}\Gamma(\beta+k+1), \quad \mu \rightarrow \infty, \quad (8.10)$$

где $c = \lambda_+$ в нерешетчатом случае и $c = 1 - e^{-\lambda_+}$ в арифметическом случае. Поэтому при $\mu \rightarrow \infty$

$$a_\lambda = \frac{\varphi^{(1)}(\lambda)}{\varphi(\lambda)} \sim (\beta+1)\mu, \quad b_\lambda^2 = \frac{\varphi^{(2)}(\lambda)}{\varphi(\lambda)} - a_\lambda^2 \sim (\beta+1)\mu^2. \quad (8.11)$$

Рассмотрим далее преобразование Лапласа для случайной величины $\mu^{-1}\xi_\lambda$. Используя (8.10) при $k=0$, получаем для $u < 1$

$$\mathbf{E}e^{u\mu^{-1}\xi_\lambda} = \frac{\varphi(\lambda + u\mu^{-1})}{\varphi(\lambda)} = \frac{\varphi(\lambda_+ - (1-u)\mu^{-1})}{\varphi(\lambda_+ - \mu^{-1})} \sim (1-u)^{\beta+1}$$

при $\mu \rightarrow \infty$. Из этого соотношения вытекает слабая сходимость

$$\mu^{-1}\xi_\lambda \Rightarrow \eta \quad (8.12)$$

вместе со всеми моментами, где η имеет гамма-распределение с параметрами $(1, \beta+1)$. Из (8.12) и (8.11) вытекает также слабая сходимость

$$\zeta_\lambda \Rightarrow \zeta$$

вместе со всеми моментами, где $\zeta = (\eta - \mathbf{E}\eta)/(\mathbf{D}\eta)^{1/2}$.

В арифметическом случае для $k \in \mathbf{Z}$ при $\mu \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi_\lambda = k\} &= \frac{1}{\varphi(\lambda)} e^{\lambda k} (V(k) - V(k+1)) \\ &= \frac{e^{-k/\mu} k^\beta L(k) [1 - e^{-\lambda_+} (1 + 1/k)^\beta L(k+1)/L(k)]}{(1 - e^{-\lambda_+}) \mu^{\beta+1} L(\mu) \Gamma(\beta+1)} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Поэтому для $x \in [\delta, M]$ таких, что $k = x\mu \in \mathbf{Z}$,

$$\mathbf{P}\{\xi_\lambda = x\mu\} = \frac{e^{-x} x^\beta}{\mu \Gamma(\beta+1)} (1 + o(1)) \quad \text{при } \mu \rightarrow \infty. \quad (8.13)$$

Из соотношений (8.13), (8.11) вытекает (6.18).

Если в нерешетчатом случае для функции $L(x)$ выполнено условие $[D_1]$, то распределение ξ_λ при $\lambda < \lambda_+$ и всех достаточно больших x имеет плотность

$$f_{\xi_\lambda}(x) = -\frac{e^{\lambda x}}{\varphi(\lambda)} V'(x) = \frac{e^{-x/\mu} \lambda_+ x^\beta L(x) [1 - \beta/(\lambda_+ x) - L'(x)/(\lambda_+ L(x))]}{\varphi(\lambda)}.$$

Поэтому плотность случайной величины ξ_λ/μ при $x\mu \geq x_0$ имеет вид

$$f_{\xi_\lambda/\mu}(x) = \frac{e^{-x} \lambda_+ x^\beta \mu^{\beta+1} L(\mu x) [1 - \beta/(\lambda_+ \mu x) - L'(\mu x)/(\lambda_+ L(\mu x))]}{\varphi(\lambda)}. \quad (8.14)$$

Из (8.14) в силу условия $[D_1]$ следует, что

$$f_{\xi_\lambda/\mu}(x) \leq 2 \frac{e^{-x} \lambda_+ x^\beta \mu^{\beta+1} L(\mu x)}{\varphi(\lambda)}, \quad x\mu \geq x_0.$$

Отсюда, в силу (8.10) при $k = 0$, получаем

$$f_{\xi_{\lambda/\mu}}(x) \leq c \frac{e^{-x} x^{\beta} L(\mu x)}{L(\mu)}, \quad x\mu \geq x_0.$$

Применяя к правой части последнего неравенства утверждение II, получаем доказательство (6.20). Применяя далее к (8.14) условие $[D_1]$, соотношение (8.10) при $k = 0$ и утверждение I, получаем (6.19). Лемма 6.2 доказана.

8.4. Доказательство леммы 6.3. Напомним, что хвост распределения $\mathbf{F} \in \mathcal{ESe}$ (см. (6.8)) в *нерешетчатом* случае представляется в виде

$$\mathbf{P}\{\xi \geq t\} := V(t) = e^{-\lambda_+ t + l(t)},$$

где $l \in \mathcal{R}$; в *арифметическом* случае — в виде

$$\mathbf{P}\{\xi \geq t\} := V([t]) = e^{-\lambda_+ [t] + l([t])}.$$

В условиях доказываемой леммы функция $l(t)$ положительна (при $l(t) < 0$ мы будем иметь дело с задачей В).

Определим функцию $a(\mu)$ как обратную к функции $1/l'(t) \sim t^{1-\beta}/(\beta L(t))$, положив

$$a(\mu) = \inf \left\{ t: \frac{1}{l'(t)} \geq \mu \right\}.$$

Функция $a(\mu)$ правильно меняется при $\mu \rightarrow \infty$ с показателем $1/(1-\beta)$ (см. утверждение III). В силу условия $[D_2]$ для любой функции $y = y(\mu) = o(a(\mu))$ выполняется соотношение

$$\left(l'(a(\mu)) - \frac{1}{\mu} \right) y = o(1). \quad (8.15)$$

Рассмотрим далее функцию

$$b^2(\mu) = \frac{a^2(\mu)}{\beta(1-\beta)l(a(\mu))} \sim \frac{a(\mu)}{(1-\beta)l'(a(\mu))}, \quad \mu \rightarrow \infty,$$

которая правильно меняется при $\mu \rightarrow \infty$ с показателем $(1-\beta/2)/(1-\beta)$.

Изучим далее случайную величину $\zeta(\mu) = (\xi_{\lambda_+-1/\mu} - a(\mu))/b(\mu)$, в определении которой функции $a(\mu)$, $b^2(\mu)$ «играют роль» среднего и дисперсии случайной величины $\xi_{\lambda_+-1/\mu}$. Для этого изучим меру

$$G_\mu(dt) = \exp \left\{ \left(\lambda_+ - \frac{1}{\mu} \right) t + \frac{a(\mu)}{\mu} - l(a(\mu)) \right\} \mathbf{P}\{\xi \in dt\},$$

которая множителем $c(\mu)$ отличается от распределения случайной величины $\xi_{\lambda_+-1/\mu}$:

$$\mathbf{P}\{\xi_{\lambda_+-1/\mu} \in dt\} = \frac{1}{c(\mu)} G_\mu(dt), \quad c(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\mu(dt).$$

В нерешетчатом случае в силу условия $[D_2]$ для всех достаточно больших t функция $-V(t)$ имеет производную $v(t)$ и при $t \rightarrow \infty$

$$v(t) := -V'(t) \sim \lambda_+ e^{-\lambda_+ t + l(t)} (1 + o(1)).$$

Поэтому для всех достаточно больших t «функция распределения» $G_\mu((-\infty, t))$ имеет «плотность» $g_\mu(t)$, и при $t \rightarrow \infty$

$$g_\mu(t) = \lambda_+ \exp \left\{ -\frac{t - a(\mu)}{\mu} + l(x) - l(a(\mu)) \right\} (1 + o(1)).$$

В силу (8.15) и условия $[D_2]$ для любой функции $y = o(a(\mu)/b(\mu))$ при $\mu \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\bar{g}_\mu(y) := g_\mu(a(\mu) + b(\mu)y) = \lambda_+ \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} (1 + o(1)) + o(1) \right\}, \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (8.16)$$

Кроме того, для любых $k < \infty$, $r > 0$, $y \sim ra(\mu)/b(\mu)$ при $\mu \rightarrow \infty$ и для любых $k < \infty$, $y \gg a(\mu)/b(\mu)$ при $\mu \rightarrow \infty$ выполняется

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} y^k \bar{g}_\mu(y) = 0. \quad (8.17)$$

Плотность $f_{\zeta(\mu)}(y)$ случайной величины $\zeta(\mu)$ отличается от функции $\bar{g}_\mu(y)$ множителем $c_1(\mu)$:

$$f_{\zeta(\mu)}(y) = c_1(\mu) \bar{g}_\mu(y),$$

и из соотношений (8.16), (8.17) вытекает, что $c_1(\mu) \lambda_+ \rightarrow 1/\sqrt{2\pi}$ при $\mu \rightarrow \infty$. Более того, из тех же соотношений (8.16), (8.17) вытекают все утверждения леммы 6.3, относящиеся к нерешетчатому случаю, в которых случайная величина $\zeta_\lambda = \zeta_{\lambda_+ - 1/\mu}$ заменена на случайную величину $\zeta(\mu)$. В частности, справедливы соотношения

$$\limsup_{\mu \rightarrow \infty} \sup_{t \geq -M} f_{\zeta(\mu)}(t) < \infty, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathbf{E} \zeta^k(\mu) = \mathbf{E} \zeta^k \quad (8.18)$$

для любых $M < \infty$, $k < \infty$. Отсюда следует, в частности, что

$$a_{\lambda_+ - 1/\mu} \sim a(\mu), \quad b_{\lambda_+ - 1/\mu} \sim b(\mu), \quad \mu \rightarrow \infty.$$

Поэтому все утверждения, доказанные в нерешетчатом случае для $\zeta(\mu)$, имеют место и для $\zeta_{\lambda_+ - 1/\mu}$.

Обратимся к арифметическому случаю: для $k \in \mathbf{Z}$ имеет место представление

$$\begin{aligned} G_\mu(\{k\}) &= \exp \left\{ -\left(\lambda_+ - \frac{1}{\mu} \right) k + \frac{a(\mu)}{\mu} - l(a(\mu)) \right\} (V(k) - V(k+1)) \\ &= (1 - e^{-\lambda_+}) \exp \left\{ -\frac{k - a(\mu)}{\mu} + l(k) - l(a(\mu)) \right\} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

$k \rightarrow \infty$. Рассуждая далее, как в нерешетчатом случае, и учитывая при этом, что $b^2(\mu) \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow \infty$, получаем в арифметическом случае доказательство всех утверждений леммы 6.3, в которых тройка $\zeta_\lambda, a_\lambda, b_\lambda$ заменена на тройку $\zeta(\mu), a(\mu), b(\mu)$. Далее, в силу (8.18) видим, что аналогичные утверждения справедливы и для тройки $\zeta_\lambda, a_\lambda, b_\lambda$ при $\lambda = \lambda_+ - 1/\mu$. Лемма 6.3 доказана.

8.5. Доказательство леммы 6.4. Для $l(x) = x^\beta L(x)$ определим функцию $a(\lambda)$, обратную к функции $l'(x) \sim \beta x^{\beta-1} L(x)$. В силу утверждения III функция $a(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ правильно меняется с показателем $1/(\beta - 1)$. Обозначим далее

$$b^2(\lambda) = \frac{a^2(\lambda)}{\beta(\beta - 1)l(a(\lambda))};$$

тогда эта функция правильно меняется с показателем $(2 - \beta)/(\beta - 1)$. Функции $a(\lambda), b^2(\lambda)$ «играют роль» среднего и дисперсии случайной величины ξ_λ , а мера

$$G_\lambda(dt) = e^{\lambda t - \lambda a(\lambda) + l(a(\lambda))} \mathbf{P}\{\xi \in dt\}$$

только множителем (зависящим от λ) отличается от ее распределения. Дальнейшие рассуждения доказательства повторяют с небольшими изменениями доказательство леммы 6.3, поэтому мы их опускаем. Заметим только, что в арифметическом случае доказательство возможно только при $b^2(\lambda) \rightarrow \infty$, поэтому мы дополнительно предполагаем $\beta \in (1, 2)$.

§ 9. Асимптотические разложения для функции уклонений $\Lambda(\alpha)$ в классах $\mathcal{ER}, \mathcal{ESe}, \mathcal{SE}$

Известно, что в широких предположениях

$$\Lambda(\alpha) \sim -\ln \mathbf{P}\{\xi \geq \alpha\} \quad (9.1)$$

при $\alpha \rightarrow \infty$ (см. § 7 и, например, [11]). Для классов $\mathcal{ER}, \mathcal{ESe}, \mathcal{SE}$ эту асимптотику можно уточнить. При этом для некоторых подклассов и для некоторых диапазонов сверхбольших уклонений можно получить «исчерпывающее» асимптотическое представление для функции $n\Lambda(\alpha)$, дающее явное представление этой функции с точностью до значений $o(1)$, и тем самым найти в явном виде точную асимптотику $\mathbf{P}\{S(n) \in \Delta[x]\}$.

9.1. Класс $\mathcal{ER}$. Здесь мы рассмотрим сначала подкласс $\mathcal{ER}(\beta, k)$ для $\beta > -1, k \in \{1, 2, \dots\}$, который определяется как совокупность распределений $\mathbf{F}$, для которых

$$\int_0^\infty t^k e^{\lambda+t} |\mathbf{F}(dt) - Lt^\beta e^{-\lambda+t} dt| < \infty, \quad L = \text{const} \quad (9.2)$$

(т.е. совокупность распределений, хвосты которых достаточно точно приближаются хвостом с плотностью $Lt^\beta e^{-\lambda+t}$). Для $\mathbf{F} \in \mathcal{ER}(\beta, k)$

$$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} L t^\beta e^{-\lambda+t} dt + \varphi_0(\lambda),$$

где функция $\varphi_0(\lambda)$ конечна на отрезке $[0, \lambda_+]$ и имеет там k непрерывных производных, так что при $0 \leq \mu = \lambda_+ - \lambda \rightarrow 0$

$$\varphi_0(\lambda) = \varphi_0(\lambda_+ - \mu) = \sum_{j=0}^k v_j \mu^j + o(\mu^k), \quad (9.3)$$

где $v_j = (-1)^j \varphi_0^{(j)}(\lambda_+)/j!$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 9.1. Если $\mathbf{F} \in \mathcal{ER}(\beta, k)$ для целого $\beta \geq 0$, то

$$\Lambda(\alpha) = \lambda_+ \alpha - (\beta + 1) \ln \alpha + c + \sum_{j=0}^k c_j \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\beta+j+1} + o\left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\beta+k+1}\right), \quad (9.4)$$

где $c = -(\beta+1) + (\beta+1) \ln(\beta+1) - \ln(L\Gamma(\beta))$, коэффициенты c_j , $0 \leq j \leq k$, могут быть найдены в явном виде в терминах первых j производных функции $\varphi_0(\lambda)$ в точке λ_+ .

Если же $\beta > -1$ не целое, то утверждение остается справедливым, но разложение в (9.4) будет иметь место по степеням $(\alpha^{-1})^{j(\beta+1)+i}$ для $j \geq 1$, $i \geq 0$, $j(\beta+1) + i < k + \beta + 1$.

Из теоремы 9.1 следует, в частности, что при $\alpha = x/n \gg n^{1/(\beta+1)}$

$$n\Lambda(\alpha) = x\lambda_+ - n(\beta+1) \ln \alpha + nc + o(1).$$

Таким образом, в зоне $\alpha \gg n^{1/(\beta+1)}$ исчерпывающее (т.е. с точностью до $o(1)$) разложение функции $n\Lambda(\alpha)$ определяется только параметрами β , L и не зависит от любой «конечной части» распределения $\mathbf{F}$. Если же $\alpha \leq n^{1/(\beta+1)}$ и при этом $\alpha \gg n^\nu$ для некоторого $\nu > 0$, то можно выбрать $k = k(\nu) < \infty$ такое, что для $\mathbf{F} \in \mathcal{ER}(\beta, k)$ представление (9.4) позволяет написать разложение для $n\Lambda(\alpha)$ с точностью до $o(1)$. Коэффициенты этого разложения будут определяться соответствующими моментными характеристиками распределения $\mathbf{F}$.

Доказательство теоремы 9.1 Обозначим

$$\psi(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} L t^\beta e^{-\lambda+t} dt,$$

так что

$$\varphi(\lambda) = \varphi_0(\lambda) + \psi(\lambda), \quad \varphi'(\lambda) = \varphi'_0(\lambda) + \psi'(\lambda). \quad (9.5)$$

Сделав в интегралах, определяющих функции $\psi(\lambda)$, $\psi'(\lambda)$, замену $t = u/\mu$, $\mu := \lambda_+ - \lambda > 0$, получим

$$\psi(\lambda_+ - \mu) = L\mu^{-(\beta+1)}\Gamma(\beta), \quad \psi'(\lambda_+ - \mu) = L\mu^{-(\beta+2)}\Gamma(\beta+1).$$

Поэтому в силу (9.3) и (9.5)

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= \frac{L\Gamma(\beta)(1 + \sum_{j=0}^k c_j^{(1)} \mu^{\beta+j+1} + o(\mu^{\beta+k+1}))}{\mu^{\beta+k+1}}, \\ \varphi'(\lambda) &= \frac{L\Gamma(\beta+1)(1 + \sum_{j=1}^k c_j^{(2)} \mu^{\beta+j+1} + o(\mu^{\beta+k+1}))}{\mu^{\beta+k+2}},\end{aligned}\quad (9.6)$$

где $c_j^{(1)} = c_j/(L\Gamma(\beta))$, $0 \leq j \leq k$, $c_j^{(2)} = -jc_j/(L\Gamma(\beta+1))$, $1 \leq j \leq k$.

Обращаясь далее к уравнению $\varphi(\lambda_+ - \mu) = (1/\alpha) \varphi'(\lambda_+ - \mu)$, которому удовлетворяет функция $\mu(\alpha) := \lambda_+ - \lambda(\alpha)$ (см. (6.12)), приходим к соотношению

$$\begin{aligned}(\beta+1) \left(1 + \sum_{j=0}^k c_j^{(1)} \mu^{\beta+j+1} + o(\mu^{\beta+k+1}) \right) \mu \\ = \frac{1}{\alpha} \left(1 + \sum_{j=1}^k c_j^{(2)} \mu^{\beta+j+1} + o(\mu^{\beta+k+1}) \right).\end{aligned}\quad (9.7)$$

Пусть сначала параметр $\beta \geq 0$ целый. Тогда решение уравнения (9.7) находим в виде

$$\mu(\alpha) = \frac{\beta+1}{\alpha} \left(1 + \sum_{j=0}^k c_j^{(3)} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{\beta+j+1} + o\left(\left(\frac{1}{\alpha} \right)^{\beta+k+1} \right) \right), \quad (9.8)$$

где числа $c_j^{(3)}$ однозначно определяются коэффициентами $c_0, c_1, \dots, c_j$; $0 \leq j \leq k$ (следует подставить правую часть (9.8) в уравнение (9.7) и, вычисляя коэффициенты при одинаковых степенях $1/\alpha$, последовательно отыскивать числа $c_0^{(3)}, \dots, c_k^{(3)}$). В дальнейшем пояснения, подобные приведенным в скобках после формулы (9.8), мы будем опускать. Используя далее представление

$$\Lambda(\alpha) = (\lambda_+ - \mu(\alpha)) \alpha - \ln \varphi(\lambda_+ - \mu(\alpha)), \quad (9.9)$$

в силу (9.8) и (9.6) получаем требуемое соотношение (9.4).

В случае, когда параметр $\beta > -1$ не является целым, следует заметить, что решение уравнения (9.7) допускает асимптотическое разложение по степеням $(1/\alpha)^{j(\beta+1)+i}$ для $j \geq 1$, $i \geq 0$, $j(\beta+1) + i < k + \beta + 1$, и снова воспользоваться (9.6), (9.9). Теорема 9.1 доказана.

Отметим, что можно рассматривать более широкий класс распределений $\mathcal{ER}(\beta, k, s)$, для которого в (9.2) вместо функции $Lt^\beta e^{-\lambda+t}$ надо взять функцию

$$f_{\beta, \beta_1, \dots, \beta_s}(t) = \sum_{i=0}^s L_i t^{\beta_i} e^{-\lambda+t}, \quad \text{где } \beta = \beta_0 > \beta_1 > \dots > \beta_s > -1.$$

Прежде чем рассматривать классы $\mathcal{ESe}$, $\mathcal{SE}$, условимся о следующих обозначениях. Пусть для любого $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ функция $f = f(t)$

допускает асимптотическое разложение

$$f(t) = \sum_{j=0}^k c_j t^j + o(t^k), \quad t \rightarrow 0.$$

Тогда будем говорить, что функция $f(t)$ допускает *полное асимптотическое разложение*, и записывать это в виде

$$f(t) = \Xi_{j=0}^{\infty} c_j t^j, \quad t \rightarrow 0. \quad (9.10)$$

Использование символа $\Xi_{j=0}^{\infty}$ вместо $\sum_{j=0}^{\infty}$ подчеркивает, что «ряд» в правой части (9.10) не обязан быть сходящимся. При этом символами $\{c_j\}$ (иногда с верхними индексами) мы будем обозначать наборы коэффициентов вообще говоря, различные, если эти наборы располагаются в разных формулах.

9.2. Класс $\mathcal{SE}$. Сначала для фиксированных $\beta \in (0, 1)$, $a > 0$, $L > 0$ рассмотрим распределение $\mathbf{F}_{\beta} \in \mathcal{SE}$, которое для некоторого $N \geq 0$ при $t \geq N$ имеет плотность $f_{\beta}(t) = L e^{-\lambda+t+at^{\beta}}$. Для этого распределения найдем полное асимптотическое разложение соответствующей функции уклонений $\Lambda_{\mathbf{F}_{\beta}}(\alpha)$ по степеням $\alpha^{-\beta/2}$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Изучим сначала интеграл

$$I(\mu) = \int_0^{\infty} e^{(\lambda+\mu)t} L e^{-\lambda+t+at^{\beta}} dt = L \int_0^{\infty} e^{g(t)} dt$$

при $0 < \mu \rightarrow 0$, где $g(t) = -\mu t + at^{\beta}$. Точка максимума t_0 функции $g(t)$ удовлетворяет уравнению $g'(t) = 0$ и имеет вид

$$t_0 = \mu^{-1/(1-\beta)} (a\beta)^{1/(1-\beta)}. \quad (9.11)$$

Сделаем замену $u = (t - t_0)\sigma$ в интеграле $I(\mu)$, где

$$\sigma = \sqrt{-g''(t_0)} = c\mu^{(2-\beta)/(2(1-\beta))}, \quad c = \sqrt{\beta(1-\beta)(a\beta)^{(2-\beta)/(1-\beta)}}, \quad (9.12)$$

и воспользуемся тем, что в силу (9.11), (9.12) для $j \geq 3$ выполняется

$$g^{(j)}(t_0) = c_j \sigma^j \mu^{\beta(j-2)/(2(1-\beta))},$$

где $c_j = c^{-j} \beta(\beta-1) \cdots (\beta-j+1) (a\beta)^{(\beta-j)/(1-\beta)}$. Получаем для $\gamma = \beta/(2(1-\beta))$ и любого $k \geq 3$ представление

$$\begin{aligned} I(\mu) &= \sigma e^{g(t_0)} \int \exp \left\{ -\frac{u^2}{2} + \sum_{j=3}^k c_j \mu^{\gamma(j-2)} u^j + o(\mu^{\gamma(k-2)} u^k) \right\} du \quad (9.13) \\ &= \sigma e^{g(t_0)} \int e^{-u^2/2} \left(1 + \sum_{j=1}^k q_j(u) \mu^{\gamma j} + o(\mu^{\gamma k} u^{3k}) \right) du, \end{aligned}$$

где $q_j(u)$ суть полиномы степени $3j$ переменной u . Из этого соотношения следует полное асимптотическое разложение при $\mu \rightarrow 0$

$$I(\mu) = \sigma e^{g(t_0)} \Xi_{j=0}^{\infty} c_j \mu^{\gamma j}, \quad c_0 > 0. \quad (9.14)$$

Рассуждая аналогичным образом, получаем полное асимптотическое разложение

$$I'(\mu) = \sigma e^{g(t_0)} t_0 \Xi_{j=0}^{\infty} c_j \mu^{\gamma j} = \sigma e^{g(t_0)} \mu^{1/(\beta-1)} \Xi_{j=0}^{\infty} c_j^{(1)} \mu^{\gamma j}, \quad \mu \rightarrow 0, \quad c_0^{(1)} > 0.$$

Очевидно, что для любого $M < \infty$ выполняется соотношение

$$\frac{\varphi'(\lambda_+ - \mu)}{\varphi(\lambda_+ - \mu)} = \frac{I'(\mu)}{I(\mu)} + o(\mu^M), \quad \mu \rightarrow 0, \quad (9.15)$$

и, кроме того, функция $I'(\mu)/I(\mu)$ допускает полное асимптотическое разложение

$$\frac{I'(\mu)}{I(\mu)} = \mu^{1/(\beta-1)} \Xi_{j=0}^{\infty} c_j \mu^{\gamma j}, \quad \mu \rightarrow 0, \quad c_0 > 0. \quad (9.16)$$

Поэтому в силу (9.15), (9.16) уравнение

$$\frac{\varphi'(\lambda_+ - \mu)}{\varphi(\lambda_+ - \mu)} = \alpha \quad (9.17)$$

для функции $\mu(\alpha) := \lambda_+ - \lambda(\alpha)$ приводит для любого $k = 0, 1, 2, \dots$ к уравнению

$$\mu^{1/(\beta-1)} \left(\sum_{j=0}^k c_j \mu^{\gamma j} + o(\mu^{\gamma k}) \right) = \alpha. \quad (9.18)$$

Сделав замену $u = \mu^{\gamma}$, $\alpha = t^{1/(\gamma(\beta-1))}$, получаем из (9.18)

$$u^{1/(\gamma(\beta-1))} \left(\sum_{j=0}^k c_j u^j + o(u^k) \right) = t^{1/(\gamma(\beta-1))}.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$u \left(\sum_{j=0}^k c_j u^j + o(u^k) \right)^{\gamma(\beta-1)} = t, \quad c_0 > 0. \quad (9.19)$$

Поскольку для любого $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\left(\sum_{j=0}^k c_j u^j + o(u^k) \right)^{\gamma(\beta-1)} = \sum_{j=0}^k c_j^{(1)} u^j + o(u^k),$$

из (9.19) получаем уравнения

$$u \left(\sum_{j=0}^k c_j u^j + o(u^k) \right) = t, \quad c_0 > 0. \quad (9.20)$$

Для любого $k = 0, 1, 2, \dots$ решение уравнения (9.20) имеет вид

$$u = t \left(\sum_{j=0}^k c_j t^j + o(t^k) \right), \quad t \rightarrow 0,$$

где $c_0 > 0$ и числа c_j не зависят от номера уравнения k . Возвращаясь к переменной $\mu = u^{1/\gamma}$, получаем для любого $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mu = t^{1/\gamma} \left(\sum_{j=0}^k c_j t^j + o(t^k) \right)^{1/\gamma} = t^{1/\gamma} \left(\sum_{j=0}^k c_j^{(1)} t^j + o(t^k) \right), \quad t \rightarrow 0.$$

Наконец, подставляя $t = \alpha^{\gamma(\beta-1)} = \alpha^{-\beta/2}$, получаем для любого $k = 0, 1, 2, \dots$ асимптотические разложения для решения $\mu(\alpha)$ уравнения (9.17):

$$\mu(\alpha) = \alpha^{\beta-1} \left(\sum_{j=0}^k c_j \alpha^{-\beta j/2} + o(\alpha^{-\beta k/2}) \right), \quad \alpha \rightarrow \infty,$$

где коэффициенты c_j не зависят от k . Другими словами, функция $\mu(\alpha)$ допускает полное асимптотическое разложение

$$\mu(\alpha) = \alpha^{\beta-1} \Xi_{j=0}^{\infty} c_j \alpha^{-\beta j/2}, \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

Воспользуемся далее представлением

$$\Lambda_{\mathbf{F}_\beta}(\alpha) = \lambda(\alpha) \alpha - \ln \varphi(\lambda(\alpha)) = \lambda_+ \alpha - \mu(\alpha) \alpha - \ln \varphi(\lambda_+ - \mu(\alpha)),$$

полным асимптотическим разложением (9.14) и тем обстоятельством, что для любого $M < \infty$

$$\varphi(\lambda_+ - \mu) = I(\mu)(1 + o(\mu^M))$$

при $\mu \rightarrow 0$. В результате получим полное асимптотическое разложение для функции уклонений $\Lambda_{\mathbf{F}_\beta}(\alpha)$ распределения $\mathbf{F}_\beta$ с плотностью $f_\beta(t)$ при $t \geq N$:

$$\Lambda_{\mathbf{F}_\beta}(\alpha) = \lambda_+ \alpha + c_{-2} \alpha^\beta + c_{-1} \alpha^{\beta/2} + c^* \ln \alpha + \Xi_{j=0}^{\infty} c_j \alpha^{-\beta j/2}, \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad (9.21)$$

в котором все коэффициенты c^* и c_j , $j \geq -2$, могут быть последовательно вычислены.

Рассмотрим теперь класс $\mathcal{E}\mathcal{S}e(\beta)$ распределений $\mathbf{F}$, абсолютно непрерывных в области $t \geq N$, с плотностью $f(t)$ вида

$$f(t) = f_\beta(t)(1 + O(e^{-t^\delta})) \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

где константы $N = N_{\mathbf{F}} < \infty$ и $\delta = \delta_{\mathbf{F}} > 0$ зависят, вообще говоря, от $\mathbf{F}$. Поскольку для любого распределения $\mathbf{F}$ из этого класса отношение $\varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)$ удовлетворяет соотношению (9.15), то и для него верно асимптотическое разложение (9.21).

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 9.2. Пусть $\mathbf{F} \in \mathcal{E}\mathcal{S}e(\beta)$ для $\beta \in (0, 1)$. Тогда функция уклонений $\Lambda_{\mathbf{F}}(\alpha)$ распределения $\mathbf{F}$ допускает полное асимптотическое разложение (9.21) при $\alpha \rightarrow \infty$.

Отметим, что коэффициенты c_j , c^* в разложении (9.21) полностью определяются функцией $f_\beta(t)$. Это означает, что для любого $\nu > 0$ для уклонений $\alpha \gg n^\nu$ исчерпывающее (т.е. с точностью до $o(1)$) разложение функции $n\Lambda_{\mathbf{F}}(\alpha)$ определяется только функцией f_β и не зависит от любой «конечной части» распределения $\mathbf{F}$ (в классе $\mathcal{ER}(\beta, k)$) этот эффект имеет место только для зоны $\alpha \gg n^{1/(\beta+1)}$.

Заметим еще, что в качестве $f_\beta(t)$ можно выбрать любую бесконечно дифференцируемую функцию $h(t)$ такую, что для интеграла $\int e^{(\lambda_+ - \mu_-)t} h(t) dt$ справедливо представление вида (9.13), например, $h(t) = t^m f_\beta(t)$.

9.3. Класс $\mathcal{SE}$. Аналогично предыдущему, для фиксированных $\beta > 1$, $L > 0$ рассмотрим распределение $\mathbf{F}_\beta \in \mathcal{SE}$, которое для некоторого $N \geq 0$ при $t \geq N$ имеет плотность $f_\beta(t) = Le^{-t^\beta}$, и найдем полное асимптотическое разложение соответствующей функции уклонений $\Lambda_{\mathbf{F}_\beta}(\alpha)$ по степеням $\alpha^{-\beta/2}$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Изучим сначала интеграл

$$I(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} Le^{-t^\beta} dt = L \int_0^\infty e^{g(t)} dt$$

при $\lambda \rightarrow \infty$, где $g(t) = \lambda t - t^\beta$. Точка максимума t_0 функции $g(t)$ удовлетворяет уравнению $g'(t) = 0$ и имеет вид

$$t_0 = \lambda^{1/(\beta-1)} \left(\frac{1}{\beta} \right)^{1/(\beta-1)}. \quad (9.22)$$

Сделаем замену $u = (t - t_0)\sigma$ в интеграле $I(\lambda)$, где

$$\sigma = \sqrt{-g''(t_0)} = c\lambda^{(\beta-2)/(2(\beta-1))}, \quad c = \sqrt{\beta(\beta-1) \left(\frac{1}{\beta} \right)^{(\beta-2)/(\beta-1)}}, \quad (9.23)$$

и воспользуемся тем, что в силу (9.22), (9.23) для $j \geq 3$

$$\frac{g^{(j)}(t_0)}{\sigma^j} = c_j \lambda^{-\beta(j-2)/(2(\beta-1))},$$

где $c_j = -\beta(\beta-1) \cdots (\beta-j+1)c^{-j}\beta^{-(\beta-j)/(\beta-1)}$. Получаем для $\gamma = -\beta/(2(\beta-1))$ и любого $k \geq 1$ представление

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \sigma e^{g(t_0)} \int \exp \left\{ -\frac{u^2}{2} + \sum_{j=1}^k c_j \lambda^{\gamma j} u^{j+2} + o(\lambda^{\gamma k} u^{3k+2}) \right\} du \\ &= \sigma e^{g(t_0)} \int e^{-u^2/2} \left(1 + \sum_{j=1}^k q_j(u) \lambda^{\gamma j} u^j + o(\lambda^{\gamma k} u^{3k}) \right) du, \end{aligned} \quad (9.24)$$

где $q_j(u)$ суть полиномы степени $3j$. Отсюда при $\lambda \rightarrow \infty$ следует полное асимптотическое разложение

$$I(\lambda) = \sigma e^{g(t_0)} \Xi_{j=0}^\infty c_j \lambda^{\gamma j}, \quad c_0 > 0. \quad (9.25)$$

Рассуждая аналогичным образом, получаем полное асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} I'(\lambda) &= \sigma e^{g(t_0)} t_0 \Xi_{j=0}^{\infty} c_j \lambda^{\gamma j} \\ &= \sigma e^{g(t_0)} \lambda^{1/(\beta-1)} \Xi_{j=0}^{\infty} c_j^{(1)} \lambda^{\gamma j}, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad c_0^{(1)} > 0. \end{aligned}$$

Очевидно, далее, что для любого $M < \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$ выполняется соотношение

$$\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \frac{I'(\lambda)}{I(\lambda)} + O(\lambda^{-M}), \quad (9.26)$$

и, кроме того, функция $I'(\lambda)/I(\lambda)$ допускает полное асимптотическое разложение

$$\frac{I'(\lambda)}{I(\lambda)} = \lambda^{1/(\beta-1)} \Xi_{j=0}^{\infty} c_j \lambda^{\gamma j}, \quad c_0 > 0. \quad (9.27)$$

Поэтому в силу (9.26), (9.27) уравнение

$$\frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \alpha \quad (9.28)$$

для функции $\lambda(\alpha)$ приводит для любого $k = 0, 1, 2, \dots$ к уравнению

$$\lambda^{1/(\beta-1)} \left(\sum_{j=0}^k c_j \lambda^{\gamma j} + o(\lambda^{\gamma k}) \right) = \alpha, \quad c_0 > 0. \quad (9.29)$$

Сделав замену $u = \lambda^{\gamma}$, $\alpha = t^{1/(\gamma(\beta-1))}$, получаем из (9.29)

$$u^{1/(\gamma(\beta-1))} \left(\sum_{j=0}^k c_j u^j + o(u^k) \right) = t^{1/(\gamma(\beta-1))}.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$u \left(\sum_{j=0}^k c_j u^j + o(u^k) \right)^{\gamma(\beta-1)} = t. \quad (9.30)$$

Поскольку для любого $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\left(\sum_{j=0}^k c_j u^j + o(u^k) \right)^{\gamma(\beta-1)} = \sum_{j=0}^k c_j^{(1)} u^j + o(u^k),$$

то из (9.30) получаем уравнения

$$u \left(\sum_{j=0}^k c_j u^j + o(u^k) \right) = t, \quad c_0 > 0. \quad (9.31)$$

Для любого $k = 0, 1, 2, \dots$ решение уравнения (9.31) при $t \rightarrow \infty$ имеет вид

$$u = t \left(\sum_{j=0}^k c_j t^j + o(t^k) \right),$$

где $c_0 > 0$ и числа c_j не зависят от k . Возвращаясь к переменной $\lambda = u^{1/\gamma}$, получаем для любого $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\lambda = t^{1/\gamma} \left(\sum_{j=0}^k c_j t^j + o(t^k) \right)^{1/\gamma} = t^{1/\gamma} \left(\sum_{j=0}^k c_j^{(1)} t^j + o(t^k) \right).$$

Наконец, подставляя $t = \alpha^{\gamma(\beta-1)} = \alpha^{-\beta/2}$, получаем для любого $k = 0, 1, 2, \dots$ асимптотическое разложение для решения $\lambda(\alpha)$ уравнения (9.28):

$$\lambda(\alpha) = \alpha^{\beta-1} \left(\sum_{j=0}^k c_j \alpha^{-\beta j/2} + o(\alpha^{-\beta k/2}) \right), \quad \alpha \rightarrow \infty,$$

в котором коэффициенты c_j не зависят от k . Другими словами, функция $\lambda(\alpha)$ допускает полное асимптотическое разложение

$$\lambda(\alpha) = \alpha^{\beta-1} \Xi_{j=0}^{\infty} c_j \alpha^{-\beta j/2}, \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

Воспользуемся далее представлением

$$\Lambda_{\mathbf{F}_\beta}(\alpha) = \lambda(\alpha) \alpha - \ln \varphi(\lambda(\alpha)),$$

полным асимптотическим разложением (9.25) и тем обстоятельством, что для любого $M < \infty$

$$\varphi(\lambda) = I(\lambda)(1 + o(\lambda^{-M}))$$

при $\lambda \rightarrow \infty$. В результате получим полное асимптотическое разложение функции уклонений $\Lambda_{\mathbf{F}_\beta}(\alpha)$ распределения $\mathbf{F}_\beta$ с плотностью $f_\beta(t)$ при $t \geq N$:

$$\Lambda_{\mathbf{F}_\beta}(\alpha) = \alpha^\beta + c_{-1} \alpha^{\beta/2} + c^* \ln \alpha + \Xi_{j=0}^{\infty} c_j \alpha^{-\beta j/2}, \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad (9.32)$$

в котором коэффициенты c^* и c_j , $j \geq -1$, могут быть последовательно вычислены.

Рассмотрим теперь класс $\mathcal{SE}(\beta)$ распределений $\mathbf{F}$, абсолютно непрерывных в области $t \geq N$, с плотностью $f(t)$ вида

$$f(t) = f_\beta(t)(1 + O(e^{-t^\delta})), \quad t \rightarrow \infty,$$

где константы $N = N_{\mathbf{F}} < \infty$ и $\delta = \delta_{\mathbf{F}} > 0$ зависят, вообще говоря, от $\mathbf{F}$. Поскольку для любого распределения $\mathbf{F}$ из этого класса отношение $\varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)$ удовлетворяет соотношению (9.26) и выполнено (9.25), то и для него верно асимптотическое разложение (9.32).

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 9.3. Пусть $\mathbf{F} \in \mathcal{SE}(\beta)$ для $\beta > 1$. Тогда функция уклонений $\Lambda_{\mathbf{F}}(\alpha)$ распределения $\mathbf{F}$ допускает полное асимптотическое разложение (9.32) при $\alpha \rightarrow \infty$.

Как и в теореме 9.2, в теореме 9.3 коэффициенты c^* , c_j полностью определяются функцией $f_\beta(t)$. Здесь тоже «исчерпывающее» разложение функции $n\Lambda_F(\alpha)$ (с точностью до $o(1)$) в зоне сверхбольших отклонений $\alpha \gg n^\nu$ при произвольном $\nu > 0$ не зависит от «любой конечной» части распределения F .

Отметим, что класс функций $f_\beta(t)$ можно значительно расширить (можно выбрать любую бесконечно дифференцируемую функцию $h(t)$ такую, что для интеграла $\int e^{\lambda t} h(t) dt$ справедливо представление вида (9.24)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А., Могульский А. А. О больших и сверхбольших отклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. I. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 2, с. 260–294.
2. Боровков А. А., Боровков К. А. О вероятностях больших отклонений для случайных блужданий. I. Распределения с правильно меняющимися хвостами — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 2, с. 209–232.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967, 752 с.
4. Боровков А. А., Боровков К. А. Асимптотический анализ случайных блужданий. I. Медленно убывающие распределения скачков. М.: Наука (в печати).
5. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
6. Bingham N. M., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular Variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987, 491 p. (Encyclopedia Math. Appl., v. 27.)
7. Нагаев А. В. Локальные теоремы с учетом больших отклонений. — Предельные теоремы и вероятностные процессы. Ташкент: Фан, 1967, с. 71–88.
8. Нагаев А. В. Предельные теоремы для одной схемы серий. — Предельные теоремы и вероятностные процессы. Ташкент: Фан, 1967, с. 43–70.
9. Рвачева Е. Л. Об областях притяжения многомерных распределений. — Ученые записки Львовского гос. ун-та, 1958, т. 6, с. 5–44.
10. Stone C. A local limit theorem for nonlattice multi-dimensional distribution functions. — Ann. Math. Statist., 1965, v. 36, p. 546–551.
11. Боровков А. А., Могульский А. А. Большие отклонения для цепей Маркова в положительном квадранте. — Успехи матем. наук, 2001, т. 56, № 5, с. 3–116.
12. Розовский Л. В. О сверхбольших отклонениях суммы независимых случайных величин с общим абсолютно непрерывным распределением, удовлетворяющим условию Крамера. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 1, с. 78–103.

Поступила в редакцию
22.XII.2005