Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Мартикайнен, А. Н. Фролов, Й. Штайнебах, О
вероятностях малых уклонений обобщенных процессов
восстановления, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007,
том 52, выпуск 2, 366–375

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp180>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru
подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским согла-
шением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:27:12

а в силу произвольности ε верно и неравенство

$$\limsup_{G \rightarrow \infty} \frac{|G|}{V} \mathbf{P}\{\mu_n > xu_G\} \leq x^{-\alpha}.$$

С учетом положительной ассоциированности поля $X(t)$ [1], а значит, и его максимумов на кубах, получаем

$$\begin{aligned} \liminf_{G \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{M(G) \leq xu_G\} &\geq \liminf_{G \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{M(G^+) \leq xu_G\} \geq \liminf_{G \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\mu_n \leq xu_G\}^{N^+(G)} \\ &= \exp \left\{ - \limsup_{G \rightarrow \infty} \frac{|G|}{V} \mathbf{P}\{\mu_n > xu_G\} \right\} \geq \exp\{-x^{-\alpha}\}, \end{aligned}$$

что в сочетании с (6) и доказывает теорему.

Заметим, что следствие 1 [1] теоремы А остается в силе. Иными словами, если функция f удовлетворяет только условиям а)-в), но для любого $\varepsilon > 0$ существует f_ε , удовлетворяющая а)-д), и $f \leq (1 + \varepsilon) f_\varepsilon$, то утверждение теоремы также верно (доказательство проводится аналогично).

Что касается условия монотонности роста областей G , упомянутого в [1], то оно в действительности не является необходимым, поскольку не используется в доказательствах обеих теорем.

К сожалению, вопрос о возможности расширения полученных результатов в область $\alpha \geq 1$ при $d \geq 2$ по-прежнему остается открытым.

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедев А. В. Экстремумы полей дробового шума в случае правильно меняющихся хвостов. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, в. 4, с. 790–794.
2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
3. Ткачук С. Г. Теорема о больших уклонениях в $\mathbf{R}^s$ в случае устойчивого предельного закона. — Случайные процессы и статистические выводы. Вып. 4. Ташкент: Фан, 1974, с. 178–184.

Поступила в редакцию
20.1.2005

© 2007 г. **МАРТИКАЙНЕН А. И.***, **ФРОЛОВ А. Н.***, **ШТАЙНЕБАХ Й.****

О ВЕРОЯТНОСТЯХ МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ¹⁾

Исследовано асимптотическое поведение вероятностей малых уклонений обобщенных процессов восстановления.

Ключевые слова и фразы: вероятности малых уклонений, процесс восстановления, обобщенный пуассоновский процесс, закон повторного логарифма в форме Чжуна.

* С.-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Университетский пр-т, 28, 198504 Старый Петергоф, С.-Петербург, Россия; e-mail: Alexander.Martikainen@pobox.srbu.ru; e-mail: Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

** Mathematical Institute, University of Cologne, Weyertal 86-90, D-50931 Köln, Germany; e-mail: jost@math.uni-koeln.de

¹⁾ Работа первых двух авторов частично поддержана РФФИ, грант № 05-01-00486.

1. Введение. Асимптотическое поведение вероятностей малых уклонений исследовалось для различных классов случайных процессов многими авторами. Общая теория малых уклонений была наиболее развита для гауссовских процессов (см., например, обзорные статьи [3], [5], [4]). Результаты для процессов с независимыми приращениями были получены в работах [6], [1], а также в статьях из библиографий упомянутых работ. В частности, в [1] исследованы малые уклонения для сумм независимых случайных величин, устойчивых процессов, пуассоновских процессов и обобщенных пуассоновских процессов. В настоящей статье мы изучим асимптотическое поведение вероятностей малых уклонений для обобщенных процессов восстановления. Отметим, что этот класс случайных процессов включает в себя, в частности, пуассоновские, обобщенные пуассоновские процессы и процессы восстановления. Поставленная задача для этого класса случайных процессов ранее не рассматривалась.

Начнем с определения обобщенного процесса восстановления. Пусть (X, Y) , $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных векторов таких, что

$$EX = \mu \in (0, \infty), \quad (1)$$

$$P\{Y > 0\} = 1 \quad \text{и} \quad EY = \lambda \in (0, \infty). \quad (2)$$

(Подчеркнем, что компоненты векторов X и Y могут быть зависимыми.) Положим $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $R_n = Y_1 + \dots + Y_n$ для $n \geq 1$, $S_0 = R_0 = 0$, и определим обобщенный процесс восстановления соотношением

$$S(t) = S_{N(t)}, \quad (3)$$

где $\{N(t)\}$ — процесс восстановления, порожденный последовательностью $\{Y_i\}$, т.е.

$$N(t) = \max\{n: R_n \leq t\}, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Ясно, что если $P\{Y_1 > u\} = e^{-u/\lambda}$ при $u > 0$, то $\{N(t)\}$ — однородный пуассоновский процесс, а если $\{N(t)\}$ и $\{X_i\}$ независимы, то $\{S(t)\}$ называется обобщенным пуассоновским процессом.

Обобщенные процессы восстановления играют важную роль в актуарной и финансовой математике (см., например, обзор [2]). Они описывают, в частности, процесс суммарных выплат страховой компании по портфелю однотипных договоров страхования. В этом случае X_i обозначает размер i -й выплаты страхового возмещения, $N(t)$ есть число выплат до момента времени t , а Y_i суть случайные времена между последовательными выплатами.

Настоящая статья посвящена описанию логарифмической асимптотики вероятностей малых уклонений процесса $\{S(t)\}$, т.е. изучению предельного поведения

$$P_T = P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \left|S(t) - \frac{\mu}{\lambda} t\right| \leq x_T\right\}, \quad (5)$$

где $\{x_T\}$ — положительная вещественная функция такая, что $x_T \rightarrow \infty$ и $x_T^2 = o(T)$ при $T \rightarrow \infty$. Нетрудно проверить, что если X и Y независимы, то $ES(t) \sim t\mu/\lambda$ при $t \rightarrow \infty$ и $ES(t) = t\mu/\lambda$ для обобщенного пуассоновского процесса. Таким образом, мы будем исследовать вероятность того, что траектория обобщенного процесса восстановления, центрированной функцией $t\mu/\lambda$, лежит внутри симметричной относительно нуля полосы ширины $2x_T$. Аналогичные результаты могут быть получены для более общего класса множеств вместо полосы (см., например, работу [6], в которой детально изложены соответствующие методы). Заметим, что наши результаты являются новыми даже в случае $P\{X_1 = 1\} = 1$, т.е. для процессов восстановления.

Если $P\{Y_1 = 1\} = 1$, то $S(t) = S_n$ при $t \in [n, n+1)$. В этом случае задача была решена А. А. Могульским [6].

Теорема А (Могульский). Пусть $\{\xi_i\}$ — последовательность н.о.р. центрированных случайных величин из области притяжения строго устойчивого закона F_α с индексом $\alpha \in (1, 2]$, т.е. распределения $(\xi_1 + \dots + \xi_n)/B_n$ слабо сходятся к F_α , где $\{B_n\}$ — последовательность положительных постоянных.

Тогда для любой последовательности положительных чисел $\{x_n\}$ такой, что $x_n \rightarrow \infty$ и $x_n = o(B_n)$,

$$\ln P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_1 + \dots + \xi_k| \leq x_n \right\} = -C \frac{n}{x_n^\alpha} L(x_n)(1 + o(1)), \quad (6)$$

где $L(x) = x^{\alpha-2} E \xi_1^2 I\{|\xi_1| < x\}$ — медленно меняющаяся (на бесконечности) функция, C — абсолютная положительная постоянная, зависящая только от распределения F_α . Если $\alpha = 2$, то $C = \pi^2/8$.

Здесь и далее $I\{B\}$ обозначает индикатор события B .

2. Результаты. Пусть выполнены соотношения (1) и (2). Рассмотрим процесс $\{S(t)\}$, определенный с помощью (3) и (4). Рассмотрим сначала оценки сверху для вероятностей малых отклонений P_T из (5).

Далее мы будем считать, если не оговорено противное, что все предельные переходы $\limsup, \liminf, O, o, \rightarrow$ происходят при $T \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Пусть случайные величины $\xi_i = X_i/\mu - Y_i/\lambda, i \geq 1$, удовлетворяют условиям теоремы А.

Тогда для любой положительной функции $\{x_T\}$ такой, что $x_T \rightarrow \infty$ и $x_T = o(B_{[T]})$,

$$\ln P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| S(t) - \frac{\mu}{\lambda} t \right| \leq x_T \right\} \leq -C \frac{\mu^\alpha}{\lambda} \frac{T}{x_T^\alpha} L(x_T)(1 + o(1)), \quad (7)$$

где C — постоянная из теоремы А.

Чтобы установить точный порядок убывания $\ln P_T$, нам нужны теперь оценки снизу. Их получение оказывается технически более сложным, а доказательства требуют некоторых дополнительных условий на распределение (X, Y) . В следующей теореме рассматривается, фактически, ситуация, в которой одна из компонент вектора (X, Y) ограничена, а другая принадлежит области притяжения строго устойчивого закона.

Теорема 2. Пусть случайные величины $\xi_i = X_i/\mu - Y_i/\lambda, i \geq 1$, удовлетворяют условиям теоремы А и по крайней мере одна из случайных величин X или Y ограничена.

Тогда для любой положительной функции $\{x_T\}$ такой, что $x_T \rightarrow \infty$ и $x_T = o(B_{[T]})$,

$$\ln P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| S(t) - \frac{\mu}{\lambda} t \right| \leq x_T \right\} \sim -C \frac{\mu^\alpha}{\lambda} \frac{T}{x_T^\alpha} L(x_T)(1 + o(1)), \quad (8)$$

где C — постоянная из теоремы А.

В частном случае $P\{X = 1\} = 1$ получаем следующий результат для процессов восстановления.

Следствие 1. Пусть случайные величины $\xi_i = 1 - Y_i/\lambda, i \geq 1$, удовлетворяют условиям теоремы А.

Тогда для любой положительной функции $\{x_T\}$ такой, что $x_T \rightarrow \infty$ и $x_T = o(B_{[T]})$,

$$\ln P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| N(t) - \frac{t}{\lambda} \right| \leq x_T \right\} \sim -C \frac{1}{\lambda} \frac{T}{x_T^\alpha} L(x_T)(1 + o(1)),$$

где C — постоянная из теоремы А.

Перейдем теперь к случаю неограниченных X и Y .

Теорема 3. Пусть $EX^3 < \infty, EY^3 < \infty$ и

$$EX I\{Y > u\} \leq \frac{\mu}{\lambda} \left(1 - \frac{A}{u}\right) EY I\{Y > u\}, \quad (9)$$

$$EY I\{X > w\} \leq \frac{\lambda}{\mu} \left(1 - \frac{A}{w}\right) EX I\{X > w\} \quad (10)$$

для некоторого $A > 0$, всех достаточно больших u и всех w , достаточно близких к $\text{ess sup } X$.

Тогда для любой положительной функции $\{x_T\}$ такой, что $x_T \rightarrow \infty$ и $x_T = o(\sqrt{T})$,

$$\ln \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| S(t) - \frac{\mu}{\lambda} t \right| \leq x_T \right\} \sim -\frac{\pi^2}{8} \frac{\mu^2 v^2}{\lambda} \frac{T}{x_T^2} (1 + o(1)), \quad (11)$$

если $v^2 = \mathbf{D}(X/\mu - Y/\lambda) > 0$.

Отметим, что условия (9) и (10) выполнены, когда либо X и Y независимы и X невырождена, либо Y ограничена. С другой стороны, (9) и (10) не выполнены, если, например, $X = Y$ п.н. Однако в этом случае оцениваемая вероятность может иметь иную асимптотику (см. (15)).

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{E}X^2 = \infty$ или $\mathbf{E}Y^2 = \infty$.

Теорема 4. Пусть X и Y суть независимые случайные величины из областей притяжения строго устойчивых законов, т.е.

$$\mathbf{P}\{S_n - n\mu < xB_n\} \implies F_\alpha(x) \quad \text{для некоторого } 1 < \alpha \leq 2 \text{ и } B_n > 0,$$

$$\mathbf{P}\{R_n - n\lambda < xB'_n\} \implies G_\beta(x) \quad \text{для некоторого } 1 < \beta \leq 2 \text{ и } B'_n > 0.$$

Тогда для любой положительной функции $\{x_T\}$ такой, что $x_T \rightarrow \infty$ и $x_T = o(\max\{B_{[T]}, B'_{[T]}\})$,

$$\begin{aligned} & \ln \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| S(t) - \frac{\mu}{\lambda} t \right| \leq x_T \right\} \\ & \geq -C \frac{\mu^2}{\lambda} \frac{T}{x_T^2} \int_{-x_T/\mu}^{x_T/\mu} u^2 d(F_{X/\mu}(u) + F_{Y/\lambda}(u)) (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (12)$$

где C — абсолютная положительная постоянная, зависящая только от распределений F_α и G_β .

Кроме того, если $\alpha \neq \beta$, то (12) выполнено с заменой неравенства на эквивалентность и той же самой постоянной C , что и в теореме А, зависящей от распределения с индексом $\min\{\alpha, \beta\}$.

Случайные величины X и Y входят в определение $S(t)$ не симметрично. С другой стороны, в наших результатах X и Y взаимозаменяемы. Для положительных X это явление иллюстрирует приводимый ниже принцип двойственности между обобщенным процессом восстановления $\{S(t)\}$ и $R(t) = R_{M(t)+1}$, где $M(t) = \max\{n: S_n \leq t\}$, $t \geq 0$.

Теорема 5. Пусть $\mathbf{P}\{X > 0\} = 1$. Тогда

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| S(t) - \frac{\mu}{\lambda} t \right| < x_T \right\} \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq (\mu/\lambda)T - x_T} \left| R(t) - \frac{\lambda}{\mu} t \right| \leq \frac{\lambda}{\mu} x_T \right\}, \quad (13)$$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| S(t) - \frac{\mu}{\lambda} t \right| \leq x_T \right\} \geq \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq (\mu/\lambda)T + x_T} \left| R(t) - \frac{\lambda}{\mu} t \right| < \frac{\lambda}{\mu} x_T \right\}. \quad (14)$$

3. Доказательства. Не умаляя общности, можно в дальнейшем считать, что $\mu = \lambda = 1$. Действительно, если $\lambda \neq 1$ или $\mu \neq 1$, то обозначим

$$X'_i = \frac{X_i}{\mu}, \quad Y'_i = \frac{Y_i}{\lambda}, \quad S'_k = \sum_{i=1}^k X'_i, \quad R'_k = \sum_{i=1}^k Y'_i,$$

$$N'(t) = \max\{n: R'_n \leq t\} = N(\lambda t), \quad S'(t) = S'_{N'(t)}.$$

Тогда

$$P_T = \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T/\lambda} |S'(t) - t| \leq \frac{x_T}{\mu} \right\}.$$

Предположим теперь, что $\mu = \lambda = 1$, и обозначим $V_T = \sup_{0 \leq t \leq T} |S(t) - t|$. Так как траектории $\{S(t)\}$ суть кусочно постоянные функции со скачками в случайных точках $R_1, R_2, \dots$, мы имеем

$$V_T = \max\{M_{N(T)}, M'_{N(T)}, |S_{N(T)} - T|\}, \quad (15)$$

где $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} |S_k - R_k|$, $M'_n = \max_{1 \leq k \leq n} |S_{k-1} - R_k|$, $n \geq 1$. Из соотношения (15) следует, что

$$V_T \leq \max\{M_{N(T)}, M'_{N(T)+1}\}. \quad (16)$$

Доказательство теоремы 1. Возьмем $c \in (0, 1)$. Если $V_T \leq x_T$, то в силу (15) мы имеем $S_{N(T)} \geq T - x_T$ и $\max_{1 \leq k \leq N(T)} |X_k| \leq 2x_T$. Поэтому $T - x_T \leq S_{N(T)} \leq 2N(T)x_T$. Следовательно, $N(T) \geq (T - x_T)/(2x_T) \rightarrow \infty$.

Далее

$$P_T = P_T^1 + P_T^2,$$

где $P_T^1 = \mathbf{P}\{V_T \leq x_T, N(T) \geq [cT]\}$, $P_T^2 = \mathbf{P}\{V_T \leq x_T, N(T) < [cT]\}$.

По теореме А

$$\begin{aligned} P_T^1 &\leq \mathbf{P}\{M_{N(T)} \leq x_T, N(T) \geq [cT]\} \\ &\leq \mathbf{P}\{M_{[cT]} \leq x_T\} = \exp\left\{-C \frac{cT}{x_T^\alpha} L(x_T)(1 + o(1))\right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} P_T^2 &\leq \mathbf{P}\{S_{N(T)} \geq T - x_T, \max_{1 \leq k \leq N(T)} |X_k| \leq 2x_T, N(T) < [cT]\} \\ &\leq \sum_{j=1}^{[cT]} \mathbf{P}\{S_j \geq T - x_T, \max_{1 \leq k \leq j} |X_k| \leq 2x_T\} = \sum_{j=1}^{[cT]} \mathbf{P}\{\bar{S}_j \geq T - x_T\} \left(\mathbf{P}\{|X| \leq 2x_T\}\right)^j, \end{aligned}$$

где $\bar{S}_j = \sum_{i=1}^j \bar{X}_i$, а $\bar{X}, \bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots$ — независимые случайные величины с одинаковой (условной) функцией распределения $\mathbf{P}\{\bar{X} < x\} = \mathbf{P}\{-2x_T \leq X < x\} / \mathbf{P}\{|X| \leq 2x_T\}$, $x \in [-2x_T, 2x_T]$.

Заметим, что $\mathbf{E}\bar{X} \rightarrow 1$ и $\mathbf{E}\bar{X}^2 \sim \mathbf{E}X^2 I\{|X| \leq 2x_T\} = o(x_T)$.

Пусть $0 < \varepsilon < 1 - c$. По лемме 1 из [7, гл. 10] для всех достаточно больших T выполнено неравенство

$$\mathbf{P}\{\bar{S}_j \geq T - x_T\} \leq \mathbf{P}\{\bar{S}_j - \mathbf{E}\bar{S}_j \geq \varepsilon T\} \leq \exp\left\{-\frac{\varepsilon T}{8x_T}\right\},$$

если $2\varepsilon T x_T \geq D\bar{S}_j$. Последнее условие выполнено при $j \leq cT$, поскольку $2\varepsilon T x_T \geq cT \mathbf{E}\bar{X}^2$ для всех достаточно больших T .

Следовательно, для всех достаточно больших T

$$P_T^2 \leq \sum_{j=1}^{[cT]} \mathbf{P}\{\bar{S}_j \geq T - x_T\} \leq cT e^{-\varepsilon T/(8x_T)}.$$

Так как $x_T = o(B_{[T]})$, а $B_{[T]}$ правильно меняется с показателем $1/\alpha < 1$, то $T = o(e^{\varepsilon T/(16x_T)})$ и $P_T^2 \leq e^{-\varepsilon T/(16x_T)}$ для всех достаточно больших T .

Из последней оценки и (17) следует (7). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. В силу теоремы 1 нам достаточно доказать только оценку снизу.

Возьмем $c > 1$ и $0 < \varepsilon < 1$. В силу (16) мы имеем

$$\begin{aligned} P_T &\geq \mathbf{P}\{M_{N(T)} \leq x_T, M'_{N(T)+1} \leq x_T\} \\ &\geq \mathbf{P}\{M_{N(T)} \leq x_T, M'_{N(T)+1} \leq x_T, \max_{1 \leq k \leq N(T)+1} Y_k \leq \varepsilon x_T\} \\ &\geq \mathbf{P}\{M_{N(T)} \leq (1 - \varepsilon)x_T, \max_{1 \leq k \leq N(T)+1} Y_k \leq \varepsilon x_T\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \mathbf{P}\left\{M_{N(T)} \leq (1-\varepsilon)x_T, \max_{1 \leq k \leq N(T)+1} Y_k \leq \varepsilon x_T, N(T) < cT\right\} \\
&\geq \mathbf{P}\left\{M_{cT} \leq (1-\varepsilon)x_T, \max_{1 \leq k \leq cT+1} Y_k \leq \varepsilon x_T, N(T) < cT\right\} \\
&\geq \mathbf{P}\left\{M_{cT} \leq (1-\varepsilon)x_T, \max_{1 \leq k \leq cT+1} Y_k \leq \varepsilon x_T\right\} - \mathbf{P}\{N(T) \geq [cT]\} \\
&= \mathbf{P}\left\{M_{cT} \leq (1-\varepsilon)x_T, \max_{1 \leq k \leq cT} Y_k \leq \varepsilon x_T\right\} \mathbf{P}\{Y \leq \varepsilon x_T\} - \mathbf{P}\{R_{[cT]} \leq T\} \quad (18) \\
&\geq P'_T(1+o(1)) - e^{-\delta T} \quad (19)
\end{aligned}$$

для некоторого $\delta > 0$, где $P'_T = \mathbf{P}\{M_{cT} \leq (1-\varepsilon)x_T, \max_{1 \leq k \leq cT} Y_k \leq \varepsilon x_T\}$. Здесь мы также использовали оценку $\mathbf{P}\{R_{[cT]} \leq T\} \leq e^{-\delta T}$, которая следует для неотрицательного Y с $\mathbf{E}Y = 1 < c$ из неравенства Чебышёва.

Предположим, что Y ограничена. Тогда из (18) мы получим

$$P_T \geq \mathbf{P}\left\{M_{cT} \leq (1-\varepsilon)x_T\right\} - e^{-\delta T} \quad (20)$$

для всех достаточно больших T , а доказываемое утверждение вытекает из теоремы А. Когда X ограничена, аналогичные рассуждения приводят к (18), если заменить $\max_{1 \leq k \leq cT} Y_k$ на $\max_{1 \leq k \leq cT} |X_k|$, а Y на X . Остальные аргументы остаются такими же, как и раньше. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. В силу теоремы 1 нам достаточно доказать только оценку снизу.

Возьмем $c > 1$ и $0 < \varepsilon < 1$. Так же, как в доказательстве теоремы 2, мы получим (19).

Не уменьшая общности, мы будем считать, что $\text{ess sup } Y = \infty$.

Мы подробно рассмотрим случай $\text{ess sup } X = \infty$. Если $\text{ess sup } X < \infty$, то доказательство проводится по той же схеме, а детали мы здесь опускаем.

Предположим сначала, что оба маргинальных распределения (X и Y) непрерывны. Положим

$$H_1(u) = \mathbf{E}X I\{-\varepsilon x_T \leq X \leq u, Y \leq \varepsilon x_T\}, \quad H_2(u) = \mathbf{E}Y I\{-\varepsilon x_T \leq X \leq u, Y \leq \varepsilon x_T\}$$

и предположим, что

$$H_1(\varepsilon x_T) > H_2(\varepsilon x_T). \quad (21)$$

Используя (10), мы имеем $\mathbf{E}Y I\{X > u\} < \mathbf{E}X I\{X > u\}$ для $u \geq u_0$, что, ввиду $\mathbf{E}Y = \mathbf{E}X = 1$, дает $\mathbf{E}Y I\{X \leq u\} > \mathbf{E}X I\{X \leq u\}$, $u \geq u_0$. Принимая во внимание, что $H_1(u) \rightarrow \mathbf{E}X I\{X \leq u\}$ и $H_2(u) \rightarrow \mathbf{E}Y I\{X \leq u\}$ при $T \rightarrow \infty$, мы заключаем, что $H_1(u) < H_2(u)$ для всех $u \geq u_0$ и $T \geq T_u$.

Заметим, что $H_1(u)$ и $H_2(u)$ непрерывны. В самом деле,

$$H_2(u+) - H_2(u-) = \mathbf{E}Y I\{X = u, X \geq -\varepsilon x_T, Y \leq \varepsilon x_T\} = 0.$$

Пусть T таково, что $T \geq T_{u_0}$ и выполнено (21). Тогда существует $\{u_T\}$ такое, что $u_T \rightarrow \infty$, $u_T \leq \varepsilon x_T$ и $H_1(u_T) = H_2(u_T)$.

Мы имеем (19) и

$$\begin{aligned}
P'_T &\geq \mathbf{P}\left\{M_{cT} \leq (1-\varepsilon)x_T, Y_k \leq \varepsilon x_T, -\varepsilon x_T \leq X_k \leq u_T, 1 \leq k \leq cT\right\} \\
&\geq \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq cT} |\bar{S}_k - \bar{R}_k| \leq (1-\varepsilon)x_T\right\} \left(\mathbf{P}\{Y \leq \varepsilon x_T, -\varepsilon x_T \leq X \leq u_T\}\right)^{cT} \\
&= P''_T Q_T^{cT}, \quad (22)
\end{aligned}$$

где $\bar{S}_k = \sum_{i=1}^k \bar{X}_i$, $\bar{R}_k = \sum_{i=1}^k \bar{Y}_i$, а $(\bar{X}, \bar{Y})$, $\{(\bar{X}_i, \bar{Y}_i)\}$ — н.о.р. случайные векторы, имеющие (условное) распределение $\bar{F}(x, y) = Q_T^{-1} \mathbf{P}\{X < x, -\varepsilon x_T \leq X \leq u_T, Y < y, Y \leq \varepsilon x_T\}$. По определению $H_1(u)$, $H_2(u)$ и u_T мы получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X I\{X \geq u_T\} &\leq \mathbf{E}X I\{(X \geq u_T) \vee (X < -\varepsilon x_T) \vee (Y > \varepsilon x_T)\} \\
&\quad + \mathbf{E}|X| I\{X < -\varepsilon x_T\} + \mathbf{E}|X| I\{Y > \varepsilon x_T\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_0 + E_1 + E_2 = 1 - H_1(u_T) + E_1 + E_2 = 1 - H_2(u_T) + E_1 + E_2 \\
&= \mathbf{E}YI\{(X \geq u_T) \vee (X < -\varepsilon x_T) \vee (Y > \varepsilon x_T)\} + E_1 + E_2 \\
&\leq \mathbf{E}YI\{X \geq u_T\} + \mathbf{E}YI\{X < -\varepsilon x_T\} + \mathbf{E}YI\{Y > \varepsilon x_T\} + E_1 + E_2 \\
&= \mathbf{E}YI\{X \geq u_T\} + E'_1 + E'_2 + E_1 + E_2.
\end{aligned}$$

Так как $\mathbf{E}X^3 < \infty$ и $\mathbf{E}Y^3 < \infty$, с помощью неравенства Чебышёва мы получим $E_1 = o(x_T^{-2})$ и $E_2 = o(x_T^{-2})$. Комбинируя неравенство Коши-Буняковского и неравенство Чебышёва, имеем

$$E_2 \leq (\mathbf{E}|X|^3)^{1/3} (\mathbf{P}\{Y > \varepsilon x_T\})^{2/3} \leq (\mathbf{E}|X|^3)^{1/3} \left(\frac{1}{\varepsilon^3 x_T^3} \mathbf{E}Y^3 I\{Y > \varepsilon x_T\} \right)^{2/3} = o\left(\frac{1}{x_T^2}\right).$$

Аналогично мы заключаем, что $E'_1 = o(x_T^{-2})$. Следовательно, $\mathbf{E}X I\{X \geq u_T\} \leq \mathbf{E}YI\{X \geq u_T\} + o(x_T^{-2})$. В силу (10) имеем при достаточно больших T

$$\mathbf{E}X I\{X \geq u_T\} \leq \left(1 - \frac{A}{u_T}\right) \mathbf{E}X I\{X \geq u_T\} + o\left(\frac{1}{x_T^2}\right),$$

откуда $(A/u_T^{-1}) \mathbf{E}X I\{X \geq u_T\} = o(x_T^{-2})$, так что $\mathbf{P}\{X \geq u_T\} \leq u_T^{-1} \mathbf{E}X I\{X \geq u_T\} = o(x_T^{-2})$.

Следовательно, $Q_T \geq 1 - \mathbf{P}\{Y > \varepsilon x_T\} - \mathbf{P}\{X > u_T\} - \mathbf{P}\{X < -\varepsilon x_T\} = 1 + o(x_T^{-2})$, и поэтому

$$Q_T^{\varepsilon T} = \exp\{o(Tx_T^{-2})\}. \quad (23)$$

Отметим, что $\mathbf{E}(\bar{X} - \bar{Y}) = (H_1(u_T) - H_2(u_T))/Q_T = 0$.

Используя представление Скорохода [8], получим $\{\bar{S}_k - \bar{R}_k, 1 \leq k \leq cT\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{W(\tau_k), 1 \leq k \leq cT\}$, где $\{W(t)\}$ — стандартный винеровский процесс, $\tau_k = \nu_1 + \dots + \nu_k$ и ν , $\{\nu_j\}$ — н.о.р. случайные величины такие, что $\mathbf{E}\nu = \mathbf{E}\bar{Z}^2$, $\mathbf{E}\nu^k \leq 4k! \mathbf{E}\bar{Z}^{2k}$, $k = 2, 3, \dots$, а $\bar{Z} = \bar{X} - \bar{Y}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
P_T'' &= \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq cT} |W(\tau_k)| \leq (1 - \varepsilon)x_T\right\} \\
&\geq \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq \mathbf{E}\tau_{[cT]} + \beta cT} |W(t)| \leq (1 - \varepsilon)x_T\right\} - \mathbf{P}\left\{\tau_{[cT]} > \mathbf{E}\tau_{[cT]} + \beta cT\right\} \\
&\geq \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq cT(v^2 + 2\beta)} |W(t)| \leq (1 - \varepsilon)x_T\right\} - \mathbf{P}\left\{\tau_{[cT]} > \mathbf{E}\tau_{[cT]} + \beta cT\right\}. \quad (24)
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали оценку $\mathbf{E}\tau_{[cT]} = [cT] \mathbf{D}\bar{Z} \leq cT(v^2 + \beta)$, справедливую для всех достаточно больших T .

Хорошо известно, что

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq cT(v^2 + 2\beta)} |W(t)| \leq (1 - \varepsilon)x_T\right\} = \exp\left\{-\frac{\pi^2}{8} \frac{cT(v^2 + 2\beta)}{(1 - \varepsilon)^2 x_T^2} (1 + o(1))\right\}. \quad (25)$$

Далее, так как $\mathbf{E}|\nu - \mathbf{E}\nu|^k \leq 8k! \mathbf{E}\bar{Z}^{2k} \leq 8k! (2\varepsilon x_T)^{2k-4} \mathbf{E}\bar{Z}^4$, то, положив $h(2\varepsilon x_T)^2 = \frac{1}{2}$, мы получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}e^{h(\nu - \mathbf{E}\nu)} &= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k \mathbf{E}(\nu - \mathbf{E}\nu)^k}{k!} \leq 1 + 8h^2 \mathbf{E}\bar{Z}^4 \sum_{k=2}^{\infty} \left(h(2\varepsilon x_T)^2\right)^{k-2} \\
&= 1 + 16h^2 \mathbf{E}\bar{Z}^4 \leq e^{16h^2 \mathbf{E}\bar{Z}^4}.
\end{aligned}$$

Значит,

$$\mathbf{P}\left\{\tau_{[cT]} > \mathbf{E}\tau_{[cT]} + \beta cT\right\} \leq e^{(16h^2 \mathbf{E}\bar{Z}^4 - h\beta)cT} = \exp\left\{-\frac{cT\beta}{2(2\varepsilon x_T)^2} (1 + o(1))\right\}.$$

Здесь мы воспользовались определением h , неравенством $\mathbf{E}\bar{Z}^4 \leq 2\varepsilon x_T \mathbf{E}|\bar{Z}|^3$ и тем, что $\mathbf{E}|\bar{Z}|^3 \rightarrow \mathbf{E}|X - Y|^3$ при $T \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\tau_{[cT]} > \mathbf{E}\tau_{[cT]} + \beta cT\} = o(e^{-T/x_T^2}) \quad (26)$$

при $\beta > 8\varepsilon^2/c$.

Из соотношений (19) и (22)–(26) вытекает, что

$$P_T \geq P_T'' Q_T^{cT} (1 + o(1)) - e^{-\delta T} \geq \exp \left\{ -\frac{\pi^2}{8} \frac{cT(v^2 + 2\beta)}{(1-\varepsilon)^2 x_T^2} (1 + o(1)) \right\}$$

для всех достаточно больших T , удовлетворяющих неравенству (21).

Для тех T , которые удовлетворяют неравенству, противоположному (21), последнюю оценку мы получим аналогично с использованием (9) вместо (10).

Теперь заключение теоремы 3 получается с помощью предельных переходов при $\varepsilon \searrow 0$, $c \searrow 1$, а затем при $\beta \searrow 0$.

Далее рассмотрим случай, когда распределение X , или распределение Y , или оба эти распределения имеют атомы.

Положим $X' = X + \eta$, $X'_k = X_k + \eta_k$, $Y' = Y + \eta$, $Y'_k = Y_k + \eta_k$, где η , $\{\eta_k\}$ — н.о.р. случайные величины с равномерным распределением на $[-\kappa, 0]$, $\kappa > 0$, независимые с (X, Y) , $\{(X_k, Y_k)\}$. Тогда

$$P_T' \geq \mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq cT} |S'_k - R'_k| \leq (1-\varepsilon)x_T, \max_{1 \leq k \leq cT} Y'_k \leq \frac{\varepsilon}{2}x_T \right\} \quad (27)$$

для всех достаточно больших T . Здесь $S'_k - R'_k = (X'_1 - Y'_1) + \dots + (X'_k - Y'_k) = S_k - R_k$.

Заметим, что распределения X' и Y' непрерывны.

Мы намерены применить использованные выше аргументы для оценивания правой части (27). Для этого мы должны проверить, что условия (9) и (10) выполнены с заменой (X, Y) на (X', Y') . Так как η отрицательна, то мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Y'I\{X' > u\} &= \mathbf{E}YI\{X > u - \eta\} + \mathbf{E}\eta I\{X' > u\} \\ &= \mathbf{E}\mathbf{E}_\eta YI\{X > u - \eta\} + \mathbf{E}\eta I\{X' > u\} \\ &\leq \mathbf{E} \left(1 - \frac{A}{u - \eta} \right) \mathbf{E}_\eta XI\{X > u - \eta\} + \mathbf{E}\eta I\{X' > u\} \\ &\leq \left(1 - \frac{A'}{u} \right) \mathbf{E}X I\{X' > u\} + \mathbf{E}\eta I\{X' > u\} \leq \left(1 - \frac{A'}{u} \right) \mathbf{E}X' I\{X' > u\}. \end{aligned}$$

Это дает (10) для (X', Y') . Условие (9) для (X', Y') проверяется аналогично.

Используя доказательство для непрерывного случая, а затем переходя к пределу при $\kappa \searrow 0$, мы завершаем доказательство теоремы 3.

Доказательство теоремы 4. Пусть сначала $\alpha \leq \beta$. Возьмем $c > 1$. Так же, как в доказательстве теоремы 2, мы получим (19) и

$$P_T \geq \mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq cT} |S_k - k| \leq (1-\varepsilon)^2 x_T, \max_{1 \leq k \leq cT} |R_k - k| \leq (1-\varepsilon)\varepsilon x_T, N(T) < cT \right\}.$$

Из неравенства $\max_{1 \leq k \leq cT} |R_k - k| \leq (1-\varepsilon)\varepsilon x_T$ следует, что $R_{cT} > cT + o(T)$. Из последнего соотношения вытекает, что $N(T) < cT$ для всех достаточно больших T . Следовательно,

$$P_T \geq \mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq cT} |S_k - k| \leq (1-\varepsilon)^2 x_T \right\} \mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq cT} |R_k - k| \leq (1-\varepsilon)\varepsilon x_T \right\} = P_T^X P_T^Y.$$

Далее мы будем использовать результат, являющийся простым следствием теоремы А: существует $\delta = \delta_\xi > 0$, зависящее от распределения ξ_1 , такое, что

$$\ln \mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_1 + \dots + \xi_k| \leq x_n \right\} \geq -2C \frac{n}{x_n^\alpha} L(x_n)(1+o(1)) \quad \text{для } x_n \rightarrow \infty \text{ и } x_n \leq \delta B_n. \quad (28)$$

Предположим сначала, что $\max(B_T, B_T') = B_T$. Это соотношение выполнено для всех достаточно больших T , если $\alpha < \beta$.

Применяя теорему А с $\xi_i = X_i - 1$, получим

$$\ln P_T^X = -C_X \frac{cT}{(1-\varepsilon)^{2\alpha} x_T^2} \int_{-x_T}^{x_T} u^2 dF_X(u)(1+o(1)), \quad (29)$$

где мы использовали тот факт, что функция $x \mapsto \int_{-x}^x u^2 dF_X(u)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $2-\alpha$.

Если T таково, что $(1-\varepsilon)\varepsilon x_T > \delta_Y B'_{cT}$, то предельная теорема для максимума устойчивого процесса влечет, что $P_T^Y \geq \mathbf{P}\{\max_{1 \leq k \leq cT} |R_k - k| \leq \delta_Y B'_{cT}\} \rightarrow \mathbf{P}\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |Y(t)| \leq \delta_Y\}$, при $T \rightarrow \infty$, где $\{Y(t)\}$ — устойчивый процесс с независимыми стационарными приращениями, соответствующий G_β . Это означает, что P_T^Y отделена от нуля для всех достаточно больших T . Поэтому в силу (29)

$$\ln P_T \geq \ln P_T^Y + \ln P_T^X \geq -C_X \frac{cT}{(1-\varepsilon)^{2\alpha} x_T^2} \int_{-x_T}^{x_T} u^2 dF_X(u)(1+o(1)),$$

что влечет (12), так как $\ln P_T^X \rightarrow -\infty$.

Если T таково, что $(1-\varepsilon)\varepsilon x_T \leq \delta_Y B'_{cT}$, то в силу (28)

$$\ln P_T^Y \geq -2C_Y \frac{cT}{(1-\varepsilon)^\beta \varepsilon^\beta x_T^2} \int_{-x_T}^{x_T} u^2 dF_Y(u)(1+o(1)), \quad (30)$$

и мы получаем доказываемое утверждение из (29).

Фактически мы доказали (12) для случая $\alpha < \beta$. Однако константа C может отличаться от константы в теореме Могульского. Чтобы убедиться в том, что обе константы одинаковы, остается заметить, что правая часть (30) имеет порядок $o(\ln P_T^X)$ в силу (29), и перейти к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, $c \searrow 1$.

Если $\alpha = \beta$, то для различных T возможны оба случая: $\max(B_T, B'_T) = B_T$ или $\max(B_T, B'_T) = B'_T$. В первом случае доказательство закончено. Чтобы доказать результат во втором случае, а также для $\alpha > \beta$, нужно просто формально поменять местами X и Y в приведенном выше доказательстве. Детали мы опускаем.

Пусть снова $\alpha < \beta$. Докажем (12) с заменой неравенства на эквивалентность. Случайные величины $\xi_i = X_i - Y_i$, $i \geq 1$, удовлетворяют условиям теоремы А. По теореме 1 справедливо (7). При этом ξ_i принадлежит области притяжения F_α с нормирующими постоянными B_n . Так как $\mathbf{E}X^2 I\{|X| < B_n\} \sim B_n n^{-2} \sim \mathbf{E}\xi_1^2 I\{|\xi_1| < B_n\}$ при $n \rightarrow \infty$, то правые части (7) и (12) эквивалентны. Случай $\alpha > \beta$ рассматривается аналогично. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Мы будем далее использовать тот факт, что для любых $k = 0, 1, \dots$ и $t > 0$

$$N(t) \geq k \iff R_k \leq t \quad \wedge \quad N(t) < k \iff R_k > t,$$

$$M(t) \geq k \iff S_k \leq t \quad \wedge \quad M(t) < k \iff S_k > t.$$

Мы имеем

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |S(t) - t| < x_T \implies S_{N(t)} < t + x_T \quad \forall t \in [0, T] \quad \wedge \quad S_{N(t)} > t - x_T \quad \forall t \in [x_T, T]$$

$$\implies M(t + x_T) \geq N(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad \wedge \quad M(t - x_T) < N(t) \quad \forall t \in [x_T, T]$$

$$\implies M(t + x_T) + 1 > N(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad \wedge \quad M(t - x_T) + 1 \leq N(t) \quad \forall t \in [x_T, T]$$

$$\implies R_{M(t+x_T)+1} > t \quad \forall t \in [0, T] \quad \wedge \quad R_{M(t-x_T)+1} \leq t \quad \forall t \in [x_T, T]$$

$$\implies R_{M(t+x_T)+1} - (t + x_T) > -x_T \quad \forall t \in [0, T] \quad \wedge$$

$$R_{M(t-x_T)+1} - (t - x_T) \leq x_T \quad \forall t \in [x_T, T].$$

Последнее неравенство и неравенство $R_{M(u)+1} - u \geq -x_T$ при $u \in [0, x_T]$ влекут $\sup_{0 \leq t \leq T-x_T} |R(t) - t| \leq x_T$, откуда следует (13).

Для завершения доказательства отметим, что

$$\sup_{0 \leq t \leq T+x_T} |R(t) - t| < x_T$$

$$\implies R_{M(t)+1} < t + x_T \quad \forall t \in [0, T + x_T] \quad \wedge \quad R_{M(t)+1} > t - x_T \quad \forall t \in [x_T, T + x_T]$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow N(t+x_T) \geq M(t) + 1 \quad \forall t \in [0, T+x_T] \wedge \\
&\quad N(t-x_T) \leq M(t) \quad \forall t \in [x_T, T+x_T] \\
&\Rightarrow S_{N(t+x_T)} > t \quad \forall t \in [0, T+x_T] \wedge S_{N(t-x_T)} \leq t \quad \forall t \in [x_T, T+x_T] \\
&\Rightarrow S_{N(t+x_T)} - (t+x_T) > -x_T \quad \forall t \in [0, T+x_T] \wedge \\
&\quad S_{N(t-x_T)} - (t-x_T) \leq x_T \quad \forall t \in [x_T, T+x_T].
\end{aligned}$$

Из последних неравенств и неравенства $S_{N(v)} - v \geq -x_T$ при $v \in [0, x_T]$ следует (14).
 Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А., Могульский А. А. О вероятностях малых уклонений для случайных процессов. — Труды Ин-та матем. СО АН СССР, 1989, т. 13, с. 147–168.
2. Эмбредтс П., Клоппельберг К. Некоторые аспекты страховой математики. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 2, с. 374–416.
3. Ledoux M. Isoperimetry and Gaussian analysis. — Lecture Notes in Math., 1996, v. 1648, p. 165–294.
4. Li W. V., Shao Q.-M. Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications. — Stochastic Processes: Theory and Methods. Ed. by C.R. Rao, D. Shanbhag. Amsterdam: North-Holland, 2001, p. 533–597. (Handbook of Statist. v. 19.)
5. Lifshits M. A. Asymptotic behavior of small ball probabilities. — Proceedings of the Seventh International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. Ed. by B. Grigelionis et al. Vilnius/Utrecht: VSP/TEV, 1999, p. 453–468.
6. Могульский А. А. Малые уклонения в пространстве траекторий. — Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. 19, в. 4, с. 755–765.
7. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с.
8. Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1961, 216 с.

Поступила в редакцию
12.XII.2005

Исправленный вариант
22.VII.2006

© 2007 г. CARBONER*, FERRARIO B., SANTACROCE M.**

BACKWARD STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS DRIVEN BY CÀDLÀG MARTINGALES

Обратные стохастические дифференциальные уравнения (ОСДУ) возникают во многих финансовых задачах. Хотя число статей, рассматривающих общие финансовые рынки, все возрастает, теория ОСДУ получила развитие только для броуновской постановки. Мы рассматриваем ОСДУ, управляемые $\mathbf{R}^d$ -значным càdlàg мартингалом, и изучаем свойства решений в случае генератора, удовлетворяющего (возможно, неравномерному) условию Липшица.

* Dipartimento di Matematica dell'Università di Pavia, via Ferrata, 1, 27100 Pavia, Italy; e-mail: raffaella.carbone@unipv.it, benedetta.ferrario@unipv.it

** Dipartimento di Matematica del Politecnico di Torino, corso Duca degli Abruzzi, 24, 10129 Torino, Italy; e-mail: marina.santacroce@polito.it