Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. В. Бондарев, О неравенстве Колмогорова–Гаека–Реньи для нормированных интегралов от процессов со слабой зависимостью, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 2, 225–238

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1800>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 08:04:57

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука • ТВП

Том 42
Выпуск 2, 1997 год
апрель, май, июнь

© 1997 г.

БОНДАРЕВ Б. В.*

О НЕРАВЕНСТВЕ КОЛМОГорова-ГАЕКА-РЕНЬИ
ДЛЯ НОРМИРОВАННЫХ ИНТЕГРАЛОВ
ОТ ПРОЦЕССОВ СО СЛАБОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ

Для процессов вида $\zeta_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} \eta(s) ds$, $t \in [0, 1]$, где $\eta(t)$, $t \geq 0$, — стационарный в узком смысле случайный процесс с нулевым средним, удовлетворяющий условию равномерно сильного перемешивания либо условию абсолютной регулярности, установлена оценка снизу для вероятности нахождения модуля $|\zeta_\varepsilon(t)|$, $t \in [0, 1]$, в растущих криволинейных границах.

Ключевые слова и фразы: равномерно сильное перемешивание, абсолютная регулярность, спираль, мартингал, представление.

1. Введение. Необходимые сведения. Вспомогательные результаты. Пусть $\{X_i\}$, $i = 1, \dots, n$, имеют нулевые средние, причем

$$E\{X_j \mid X_1, X_2, \dots, X_{j-1}\} = 0, \quad (1)$$

а $EX_i^2 < +\infty$ для всех $1, \dots, n$. Тогда (см., например, [1, с. 217])

$$P\{|S_i| \leq U_i, 1, \dots, n\} \geq 1 - \sum_{i=1}^n \frac{EX_i^2}{U_i^2} \quad (2)$$

для любой положительной возрастающей последовательности $\{U_i\}$, $i = 1, \dots, n$; здесь $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$.

Неравенство (2) является обобщением классического неравенства Колмогорова и носит название неравенства Колмогорова-Гаека-Реньи (КГР-неравенство).

*Донецкий госуниверситет, кафедра алгебры и теории вероятностей, ул. Университетская, 24, 340055 Донецк, Украина.

Нетрудно убедиться в справедливости следующего обобщения неравенства (2) на квадратично интегрируемые мартингалы с непрерывным временем.

Пусть $\mu(t)$ — мартингал, $E\mu^2(t) < \infty$, $t \in [0, T]$, $\langle \mu, \mu \rangle_t$ — его квадратическая характеристика (см. [2]), $f(t)$ — возрастающая на $[0, T]$ функция такая, что $\int_0^T dE\langle \mu, \mu \rangle_t / f^2(t) < +\infty$. Тогда

$$P\left\{|\mu(t)| \leq \frac{f(t)}{\varepsilon}, t \in [0, T]\right\} \geq 1 - \varepsilon^2 \int_0^T \frac{dE\langle \mu, \mu \rangle_t}{f^2(t)} \quad (3)$$

для достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Вместе с тем в [4] для процессов вида

$$\frac{Y(nt)}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} x_s ds,$$

где x_s , $s \geq 0$, — стационарный случайный процесс с нулевым средним, удовлетворяющий одному из условий слабой зависимости [3]: либо условию равномерно сильного перемешивания (р.с.п.), либо условию абсолютной регулярности (а.р.) [4], получено разложение

$$\frac{Y(nt)}{\sqrt{n}} = \frac{\mu_n(t)}{\sqrt{n}} + \frac{\eta_n(t)}{\sqrt{n}}, \quad (4)$$

где $\mu_n(t)$ — квадратично интегрируемый мартингал вида $\mu_n(t) = \mu_{nt}$, $\eta_n(t) = \eta_{nt}$; здесь μ_t является спиралью (см. [5]) и мартингалом, причем

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_n(t)| \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Настоящая работа посвящена доказательству неравенств вида

$$P\left\{|\zeta_\varepsilon(t)| \leq \frac{f(t)}{\varepsilon^\gamma} + \varepsilon^\alpha, t \in [0, T]\right\} \geq 1 - \varepsilon^{2\gamma} D_\varepsilon,$$

где $\zeta_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} x_s ds$, и применениям этих неравенств.

2. Формулировка основных результатов. Пусть x_s , $s \geq 0$, — стационарный в узком смысле случайный процесс с нулевым средним, удовлетворяющий условию равномерно сильного перемешивания (см. [3]) с коэффициентом перемешивания $\varphi(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow +\infty$.

Теорема 1. Пусть $E|x_s|^m = C_m < +\infty$, коэффициент $\varphi(\tau)$ таков, что $\int_1^{+\infty} \varphi^{1/2}(\tau) d\tau < +\infty$, а неубывающая функция $f(t) \geq 0$ такова, что

$$\int_0^T \frac{dt}{f^2(t)} < +\infty.$$

Тогда имеет место оценка

$$\mathbf{P} \left\{ |\zeta_\varepsilon(t)| \leq \frac{f(t)}{\varepsilon^\gamma} + \varepsilon^\alpha, t \in [0, T] \right\} \geq 1 - \varepsilon^{2\gamma} D_\varepsilon^\varphi(f), \quad (5)$$

где

$$D_\varepsilon^\varphi(f) = 2C_2 \int_0^\infty \varphi^{1/2}(\tau) d\tau \int_0^T \frac{dt}{f^2(t)} + (1 + \varepsilon) \varepsilon^{m-2m\alpha-1-2\gamma} 2^{2m-1} \\ \times C_{2m} \left[4^m \left(\int_0^\infty \varphi^{1/2}(\tau) d\tau \right)^{2m} + T^{2m} \right] \left(\frac{2m}{2m-1} \right)^{2m}, \quad (6)$$

$\alpha > 0, \gamma > 0$ и $m \geq 2$ связаны неравенством $m\alpha + \gamma \leq (m-1)/2$.

Пусть $x_s, s \geq 0$, — стационарный в узком смысле случайный процесс с нулевым средним, удовлетворяющий условию абсолютной регулярности (см. [6]) с коэффициентом регулярности $\beta(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow +\infty$.

Теорема 2. Если коэффициент регулярности $\beta(\tau)$ таков, что $\int_0^\infty [\beta(\tau)]^{1/(2m)} d\tau < +\infty$, неотрицательная возрастающая функция $f(t)$ такова, что $\int_0^T dt/f^2(t) < +\infty$, и $|x_s| \leq C < +\infty$ с вероятностью 1, то имеет место оценка

$$\mathbf{P} \left\{ |\zeta_\varepsilon(t)| \leq \frac{f(t)}{\varepsilon^\gamma} + \varepsilon^\alpha, t \in [0, T] \right\} \geq 1 - \varepsilon^{2\gamma} D_\varepsilon^\beta(f), \quad (7)$$

где

$$D_\varepsilon^\beta(f) = 2C^2 \int_0^\infty \beta(\tau) d\tau \int_0^T \frac{dt}{f^2(t)} + (1 + \varepsilon) \varepsilon^{m-2m\alpha-1-2\gamma} C^{2m} \\ \times \left[T^{2m} + 4^m \left(\int_0^\infty [\beta(\tau)]^{1/(2m)} d\tau \right)^{2m} \right] \left(\frac{2m}{2m-1} \right)^{2m}, \quad (8)$$

$\alpha > 0, \gamma > 0$ и $m \geq 2$ связаны неравенством $m\alpha + \gamma \leq (m-1)/2$.

Пусть $Z_\varepsilon(t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{dZ_\varepsilon}{dt} = a(t, Z_\varepsilon(t)) + x_{t/\varepsilon}, \quad Z_\varepsilon(0) = Z_0, \quad (9)$$

где x_s удовлетворяет условиям теоремы 1 или теоремы 2.

Пусть $Z_0(t)$ — решение укороченного уравнения

$$\frac{dZ_0}{dt} = a(t, Z_0(t)), \quad Z_0(0) = Z_0. \quad (10)$$

Теорема 3. Пусть x_s удовлетворяет условиям теоремы 1 или теоремы 2, неотрицательная функция $f(t)$ возрастает, $f'(t) \geq Lf(t)$, причем

$$\int_0^T \frac{dt}{[f(t) - L \int_0^t f(s) ds]} < +\infty, \quad |a'_x(t, x)| \leq L_1 < +\infty.$$

Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ Z_0(t) - \varepsilon^{1/2-\gamma} f(t) - \varepsilon^{1/2+\alpha} e^{LT} \leq Z_\varepsilon(t) \right. \\ & \quad \left. \leq Z_0(t) + \varepsilon^{1/2-\gamma} f(t) + \varepsilon^{1/2+\alpha} e^{LT}, t \in [0, T] \right\} \geq 1 - \varepsilon^{2\gamma} D_\varepsilon(\psi), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\psi(t) = f(t) - L_1 \int_0^t f(s) ds$, величины $\alpha > 0$, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, $m \geq 2$ связаны неравенством $\alpha m + \gamma \leq (m-1)/2$, а

$$D_\varepsilon(\psi) = \begin{cases} D_\varepsilon^\varphi(\psi), & \text{если выполнены условия теоремы 1,} \\ D_\varepsilon^\beta(\psi), & \text{если выполнены условия теоремы 2.} \end{cases} \quad (12)$$

Результаты теоремы 3 говорят о том, что решение исходного уравнения (9) находится с наперед заданной вероятностью в криволинейном «рожке» с центром в $Z_0(t)$, $t \in [0, T]$, и границами

$$(Z_0(t) - \varepsilon^{1/2-\gamma} f(t), Z_0(t) + \varepsilon^{1/2-\gamma} f(t), t \in [0, T]).$$

В ряде случаев можно получить аналогичную (11) оценку и для «рожка» с центром $Z_0(t) + \sqrt{\varepsilon} Z_1^\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$, где $Z_1^\varepsilon(t)$ — известный случайный процесс, являющийся решением уравнения

$$dZ_1^\varepsilon(t) = a'_x(t, Z_0(t)) Z_1^\varepsilon(t) dt + d\zeta_\varepsilon(t), \quad Z_1^\varepsilon(0) = 0.$$

Границами «рожка» будут

$$\begin{aligned} & (Z_0(t) + \sqrt{\varepsilon} Z_1^\varepsilon(t) - \varepsilon^{1-\gamma} 2L_2 e^{L_1 T} f(t) - \varepsilon^{1+2\alpha} 8L_2 e^{5L_1 T} t, \\ & Z_0(t) + \sqrt{\varepsilon} Z_1^\varepsilon(t) + \varepsilon^{1-2\gamma} 2L_2 e^{L_1 T} f(t) + \varepsilon^{1+2\alpha} 8L_2 e^{5L_1 T} t, t \in [0, T]). \end{aligned}$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 1 или условия теоремы 2, функция $f(t) \geq 0$ такова, что

$$f'(t) > 0, \quad \int_0^T \frac{dt}{f'(t)} < +\infty,$$

и существуют такие $a'_x(t, x)$ и $a''_{xx}(t, x)$, что

$$|a'_x(t, x)| \leq L_1 < +\infty, \quad |a''_{xx}(t, x)| \leq L_2 < +\infty.$$

Тогда при $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \left| Z_\varepsilon(t) - Z_0(t) - \sqrt{\varepsilon} Z_1^\varepsilon(t) \right| \leq \varepsilon^{1-2\gamma} 2L_2 e^{L_1 T} f(t) \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^{1+2\alpha} 8L_2 e^{5L_1 T} t, t \in [0, T] \right\} \geq 1 - \varepsilon^{2\gamma} D_\varepsilon(\sqrt{f'}), \end{aligned} \quad (13)$$

где величины $\alpha > 0$, $m \geq 2$ и $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ связаны неравенством $\alpha m + \gamma \leq (m-1)/2$, а

$$D_\varepsilon(\sqrt{f'}) = \begin{cases} D_\varepsilon^\varphi(\sqrt{f'}), & \text{если выполнены условия теоремы 1,} \\ D_\varepsilon^\beta(\sqrt{f'}), & \text{если выполнены условия теоремы 2.} \end{cases} \quad (14)$$

Следует отметить, что все заявленные неравенства полезны, когда $\varepsilon > 0$ — мало.

3. Доказательство основных результатов. Пусть x_s , $s \in [0, \infty)$, — стационарный в узком смысле случайный процесс с нулевым средним, $\mathcal{F}_0^t$ — минимальная σ -алгебра, порожденная процессом x_s , $0 \leq s \leq t$, а $\mathcal{F}_{t+\tau}^{+\infty}$ обозначает σ -алгебру, порожденную процессом x_s , $t + \tau \leq s < +\infty$. Тогда (см. [3])

$$\sup_{A \in \mathcal{F}_0^t, B \in \mathcal{F}_{t+\tau}^{+\infty}} |\mathbf{P}(B | A) - \mathbf{P}(B)| = \varphi(\tau) \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (15)$$

Лемма 1. Если $\mathbf{E}|x_s|^p < +\infty$, $p > 1$, то при $s \geq t$ справедливо неравенство

$$\mathbf{E}|\mathbf{E}\{x_s | \mathcal{F}_0^t\}|^p \leq 2^p [\varphi(s-t)]^{p-1} \mathbf{E}|x_s|^p. \quad (16)$$

Доказательство. Пусть x_s представляется как конечная сумма вида

$$x_s = \sum_i \lambda_i \chi(A_i), \quad (17)$$

пусть $B_j \in \mathcal{F}_0^t$, а величина x_s является $\mathcal{F}_{t+\tau}^{+\infty}$ -измеримой. Нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}\{x_s | \mathcal{F}_0^t\}| &\leq \sum_i |\lambda_i| |\mathbf{P}(A_i | B_j) - \mathbf{P}(A_i)| \\ &\leq \sum_i |\lambda_i| |\mathbf{P}(A_i | B_j) + \mathbf{P}(A_i)|^{1/p} |\mathbf{P}(A_i | B_j) - \mathbf{P}(A_i)|^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_i |\lambda_i| [\mathbf{P}(A_i | B_j) + \mathbf{P}(A_i)] \right)^{1/p} \\ &\quad \times \left(\sum_i |\mathbf{P}(A_i | B_j) - \mathbf{P}(A_i)| \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_i |\lambda_i|^p [\mathbf{P}(A_i | B_j) + \mathbf{P}(A_i)] \right)^{1/p} \\ &\quad \times \left(|\mathbf{P}(\cup^+ A_i | B_j) - \mathbf{P}(\cup^+ A_i)| \right. \\ &\quad \left. + |\mathbf{P}(\cup^- A_i | B_j) - \mathbf{P}(\cup^- A_i)| \right)^{1/q} \end{aligned} \quad (18)$$

(здесь $\cup^+ A_i$ (см. [3]) — объединение тех множеств $\{A_i\}$, для которых $P(A_i | B_j) - P(A_i) \geq 0$ и $\cup^- A_i$ — объединение множеств $\{A_i\}$, для которых $P(A_i | B_j) - P(A_i) < 0$). С учетом (18) имеем

$$E|E\{x_s | \mathcal{F}_0^t\}|^p \leq \sum_j \sum_i |\lambda_i|^p [P(A_i | B_j) + P(A_i)] P(B_j) (2\varphi(\tau))^{p/q}.$$

Отсюда с учетом того, что $1/q = (1-p)/p$, получаем (16). Чтобы доказать лемму полностью, осталось построить последовательность $x_n(s)$, которая представима как конечная сумма вида (17) и для которой $E|x_n(s) - x(s)|^p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Лемма 1 доказана.

Пусть x_s , $s \in [0, +\infty)$, — стационарный в узком смысле случайный процесс с нулевым средним, удовлетворяющий условию абсолютной регулярности. Тогда (см. [6])

$$E \sup_{A \in \mathcal{F}_{\tau+t}^{+\infty}} |P(A | \mathcal{F}_0^t) - P(A)| = \beta(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow +\infty,$$

где $\beta(\tau)$ — коэффициент абсолютной регулярности.

Лемма 2. Если $|x_s| \leq C < +\infty$, то для $s \geq t$ справедливо неравенство

$$E|E\{x_s | \mathcal{F}_0^t\}|^p \leq 2^p C^p \beta(s-t). \quad (19)$$

Доказательство. Пусть, как и раньше, x_s представляется как конечная сумма вида $x_s = \sum_i \lambda_i \chi(A_i)$, пусть $B_j \in \mathcal{F}_0^t$, а величина x_s является $\mathcal{F}_{t+\tau}^{+\infty}$ -измеримой. Так как

$$\begin{aligned} |E\{x_s | \mathcal{F}_0^t\}| &\leq \sum_i |\lambda_i| [P(A_i | B_j) + P(A_i)]^{1/q} |P(A_i | B_j) - P(A_i)|^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_i |\lambda_i|^q [P(A_i | B_j) + P(A_i)] \right)^{1/q} \\ &\quad \times \left(\sum_i |P(A_i | B_j) - P(A_i)| \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} E|E\{x_s | \mathcal{F}_0^t\}|^p &\leq C^p \sum_j \left(\sum_i [P(A_i | B_j) + P(A_i)] \right)^{p/q} \\ &\quad \times \sum_i |P(A_i | B_j) - P(A_i)| P(B_j) \\ &\leq C^p 2^{p/q} \left(\sum_j |P(\cup^+ A_i | B_j) - P(\cup^+ A_i)| P(B_j) \right. \\ &\quad \left. + \sum_j |P(\cup^- A_i | B_j) - P(\cup^- A_i)| P(B_j) \right) \end{aligned}$$

$$\leq 2^{p-1} C^p 2\beta(\tau) = 2^p C^p \beta(\tau).$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$\mu_t = \int_0^{+\infty} \mathbf{E}\{x_s | \mathcal{F}_0^t\} ds - \eta_0, \quad \eta_t = \int_t^{+\infty} \mathbf{E}\{x_s | \mathcal{F}_0^t\} ds, \quad t \geq 0.$$

Случайный процесс η_t , $t \geq 0$, определен, так как в условиях теоремы 1

$$\int_t^{+\infty} \mathbf{E}|\mathbf{E}\{x_s | \mathcal{F}_0^t\}| ds < +\infty; \quad (20)$$

более того, для $p = 2m$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|\eta_t|^{2m} &\leq \left(\int_t^{+\infty} \left(\mathbf{E}|\mathbf{E}\{x_s | \mathcal{F}_0^t\}|^{2m} \right)^{1/(2m)} ds \right)^{2m} \\ &\leq \left(\int_t^{+\infty} (2^{2m} \varphi(s-t)^{2m-1} \mathbf{E}|x_s|^{2m})^{1/(2m)} ds \right)^{2m} \\ &\leq 2^{2m} (\mathbf{E}|x_s|^{2m}) \left(\int_0^{+\infty} [\varphi(\tau)]^{(2m-1)/(2m)} d\tau \right)^{2m} \\ &\leq 2^{2m} (\mathbf{E}|x_s|^{2m}) \left(\int_0^{+\infty} [\varphi(\tau)]^{1/2} d\tau \right)^{2m} < +\infty. \end{aligned} \quad (21)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \left(\int_t^{+\infty} \mathbf{E}|\mathbf{E}\{x_s | \mathcal{F}_0^t\}| ds \right)^2 &\leq \left(\int_t^{+\infty} \left(\mathbf{E}|\mathbf{E}\{x_s | \mathcal{F}_0^t\}|^2 \right)^{1/2} ds \right)^2 \\ &\leq \left(2 \int_t^{+\infty} (\mathbf{E}|x_s|^2) \varphi(s-t)^{1/2} ds \right)^2 \\ &\leq 4 \mathbf{E}|x_s|^2 \left(\int_0^{+\infty} \varphi^{1/2}(\tau) d\tau \right)^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Откуда и следует (20).

Так как

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathbf{E}|\mathbf{E}\{x_s | \mathcal{F}_0^t\}| ds &\leq \int_0^t \mathbf{E}|\mathbf{E}\{x_s | \mathcal{F}_0^t\}| ds + \int_t^{+\infty} \mathbf{E}|\mathbf{E}\{x_s | \mathcal{F}_0^t\}| ds \\ &\leq \int_0^t \mathbf{E}|x_s| ds + \int_t^{+\infty} \mathbf{E}|\mathbf{E}\{x_s | \mathcal{F}_0^t\}| ds < +\infty, \end{aligned}$$

то мартингал μ_t также определен.

Пусть

$$Y(t) = \int_0^t x_s ds;$$

этот процесс (см. [4], [5]) является спиралью; у процесса μ_t существует модификация, являющаяся мартингалом и спиралью (см. [7], [8]); процесс μ_t является квадратично интегрируемым мартингалом (см. [4]); поскольку μ_t — спираль, $\langle \mu, \mu \rangle_t$ также является спиралью (см. [7]).

Воспользовавшись леммой 2 и леммой 3 из [4], получаем

$$\mathbf{E}(\mu_t)^2 = t \mathbf{E}(\mu_1)^2 = t b^2, \quad (22)$$

где

$$b^2 = 2 \int_0^{+\infty} \mathbf{E} x_0 x_s ds. \quad (23)$$

Отметим, в частности, что [3]

$$\begin{aligned} |b|^2 &\leq 2 \int_0^{+\infty} |\mathbf{E} x_0 x_s| ds \\ &\leq 2 (\mathbf{E} x_0^2)^{1/2} (\mathbf{E} x_s^2)^{1/2} \int_0^{+\infty} \varphi^{1/2}(\tau) d\tau < +\infty, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\varepsilon \mathbf{E} \langle \mu, \mu \rangle_{t/\varepsilon} = 2t \int_0^{+\infty} \mathbf{E} x_0 x_s ds.$$

Нетрудно заметить, что $\zeta_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} x_s ds = \sqrt{\varepsilon} \mu_{t/\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon} \eta_{t/\varepsilon}$. Положим $n = [1/\varepsilon]$; тогда

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_{t/\varepsilon}| > \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} \right\} \leq \sum_{k=1}^{n+1} \mathbf{P} \left\{ \xi_k > \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} \right\} \quad (25)$$

— здесь $\xi_k = \sup_{(k-1)T \leq t \leq kT} |\eta_t|$, $k = 1, \dots, n+1$. Как отмечалось в [4], при $0 < t \leq T$

$$\eta_t = \int_t^{+\infty} \mathbf{E} \{x_s | \mathcal{F}_0^t\} ds = \mathbf{E} \left\{ \left[\eta_t + \int_t^T x_s ds \right] \middle| \mathcal{F}_0^t \right\},$$

а следовательно,

$$|\eta_t| \leq \mathbf{E} \left\{ \left[|\eta_t| + \int_0^T |x_s| ds \right] \middle| \mathcal{F}_0^t \right\} = \xi_t.$$

Очевидно, что ξ_t — мартингал относительно потока $\mathcal{F}_0^t$, $t \geq 0$.

Воспользовавшись неравенством Дуба для мартингалов (см. [9]), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi_t|^p &\leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbf{E} |\xi_T|^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbf{E} \left(|\eta_T| + \int_0^T |x_s| ds \right)^p \\ &\leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p 2^{p-1} \left(\mathbf{E} |\eta_T|^p + \mathbf{E} \left[\int_0^T |x_s| ds \right]^p \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Далее,

$$\mathbf{E} |\eta_T|^{2m} \leq 2^{2m} \mathbf{E} |x_s|^{2m} \left(\int_0^{+\infty} \varphi^{1/2}(\tau) d\tau \right)^{2m}, \quad (27)$$

а

$$\mathbf{E} \left[\int_0^T |x_s| ds \right]^{2m} \leq T^{2m-1} \int_0^T \mathbf{E} |x_s|^{2m} ds \leq T^{2m} \mathbf{E} |x_s|^{2m}. \quad (28)$$

Имеем из (26)–(28):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_t|^{2m} &\leq \left(\frac{2m}{2m-1} \right)^{2m} 2^{2m-1} \mathbf{E} |x_s|^{2m} \\ &\times \left[2^{2m} \left(\int_0^{+\infty} \varphi^{1/2}(\tau) d\tau \right)^{2m} + T^{2m} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Из (25) с учетом (29) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\varepsilon} \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_{t/\varepsilon}| > \delta \right\} &\leq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta} \right)^{2m} \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_t|^{2m} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{\varepsilon^m}{\delta^{2m}} \left(\frac{2m}{2m-1} \right)^{2m} 2^{2m-1} \\ &\times \mathbf{E} |x_s|^{2m} \left[2^{2m} \left(\int_0^{+\infty} \varphi^{1/2}(\tau) d\tau \right)^{2m} + T^{2m} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Используя (30), выводим:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} \left\{ |\zeta_\varepsilon(t)| \leq \frac{f(t)}{\varepsilon^\gamma} + \varepsilon^\alpha, t \in [0, T] \right\} \\ &\geq \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\varepsilon} |\mu_{t/\varepsilon}| + \sqrt{\varepsilon} |\eta_{t/\varepsilon}| \leq \frac{f(t)}{\varepsilon^\gamma} + \varepsilon^\alpha, t \in [0, T], \right. \\ &\quad \left. \sup_{0 \leq t \leq T} \sqrt{\varepsilon} |\eta_{t/\varepsilon}| \leq \varepsilon^\alpha \right\} \geq \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\varepsilon} |\mu_{t/\varepsilon}| \leq \frac{f(t)}{\varepsilon^\gamma}, t \in [0, T] \right\} \\ &\quad - \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \sqrt{\varepsilon} |\eta_{t/\varepsilon}| > \varepsilon^\alpha \right\} \geq 1 - \varepsilon^{2\gamma} \int_0^T \frac{d\mathbf{E} \langle \sqrt{\varepsilon} \mu, \sqrt{\varepsilon} \mu \rangle_{t/\varepsilon}}{f^2(t)} \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \varepsilon^m \frac{1}{\varepsilon^{2\alpha m}} \left(\frac{2m}{2m-1} \right)^{2m-1} \\ &\quad \times \mathbf{E} |x_s|^{2m} \left[2^{2m} \left(\int_0^{+\infty} \varphi^{1/2}(\tau) d\tau \right)^{2m} + T^{2m} \right] \\ &\geq 1 - 2\varepsilon^{2\gamma} (\mathbf{E} |x_s|^2)^{1/2} (\mathbf{E} |x_0|^2)^{1/2} \int_0^{+\infty} \varphi^{1/2}(\tau) d\tau \int_0^T \frac{dt}{f^2(t)} \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \varepsilon^{m-2\alpha m} \left(\frac{2m}{2m-1} \right)^{2m} 2^{2m-1} \end{aligned}$$

$$\times \mathbf{E} |x_s|^{2m} \left[2^{2m} \left(\int_0^{+\infty} \varphi^{1/2}(\tau) d\tau \right)^{2m} + T^{2m} \right]. \quad (31)$$

Положим $\gamma = \frac{1}{4}$, $\alpha = \frac{1}{8}$, $m = 2$. Тогда оценка (31) примет вид

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ |\zeta_\varepsilon(t)| \leq \frac{f(t)}{\sqrt[3]{\varepsilon}} + \sqrt[3]{\varepsilon}, t \in [0, T] \right\} \\ & \geq 1 - 2\sqrt{\varepsilon} C_2 \int_0^\infty \varphi^{1/2}(\tau) d\tau \int_0^T \frac{dt}{f^2(t)} \\ & \quad - (1 + \varepsilon) C_4 \frac{16^3}{81} \left[16 \left(\int_0^\infty \varphi^{1/2}(\tau) d\tau \right)^4 + T^8 \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. В данном случае неравенство (27) примет вид

$$\mathbf{E} |\eta_T|^{2m} \leq C^{2m} 2^{2m} C^{2m} \left(\int_0^{+\infty} [\beta(\tau)]^{1/(2m)} d\tau \right)^{2m}, \quad (33)$$

а

$$\mathbf{E} \left[\int_0^T |x_s| ds \right]^{2m} \leq T^{2m} C^{2m}. \quad (34)$$

Откуда с учетом (26), (33), (34) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_t|^{2m} & \leq \left(\frac{2m}{2m-1} \right)^{2m} 2^{2m-1} C^{2m} \\ & \times \left[2^{2m} \left(\int_0^{+\infty} [\beta(\tau)]^{1/(2m)} d\tau \right)^{2m} + T^{2m} \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Воспользовавшись неравенством Чебышева, получим с учетом (35):

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\varepsilon} \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_{t/\varepsilon}| > \delta \right\} & \leq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta} \right)^{2m} \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_t|^{2m} \\ & \leq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{\varepsilon^m}{\delta^{2m}} \left(\frac{2m}{2m-1} \right)^{2m} C^{2m} \\ & \times \left[4^m \left(\int_0^{+\infty} [\beta(\tau)]^{1/(2m)} d\tau \right)^{2m} + T^{2m} \right]. \end{aligned}$$

Положив $\delta = \varepsilon^\alpha$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\varepsilon} \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_{t/\varepsilon}| > \varepsilon^\alpha \right\} & \leq (1 + \varepsilon) \varepsilon^{m-2\alpha m-1} \left(\frac{2m}{2m-1} \right)^{2m} C^{2m} \\ & \times \left[4^m \left(\int_0^\infty [\beta(\tau)]^{1/(2m)} d\tau \right)^{2m} + T^{2m} \right]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись аналогом неравенства (31), получим утверждение теоремы 2. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $R_\epsilon^1(t) = (Z_\epsilon(t) - Z_0(t))/\sqrt{\epsilon}$. Тогда

$$|R_\epsilon^1(t)| \leq L_1 \int_0^t |R_\epsilon^1(s)| ds + |\zeta_\epsilon(t)| \quad (36)$$

— здесь $\zeta_\epsilon(t) = \sqrt{\epsilon} \int_0^{t/\epsilon} x_s ds$.

Хорошо известно следующее утверждение (см. [10]).

Лемма. Если $V(t) \geq 0$, $L \geq 0$ и $V(t) \leq \alpha(t) + L_1 \int_0^t V(s) ds$, то

$$V(t) \leq \alpha(t) + L_1 \int_0^t e^{L_1(t-s)} \alpha(s) ds; \quad (37)$$

если же $\alpha(s) \leq \alpha(t)$, $s \leq t$, то

$$V(t) \leq \alpha(t) e^{LT}. \quad (38)$$

Из (36) с учетом (37) имеем

$$|R_\epsilon^1(t)| \leq |\zeta_\epsilon(t)| + L_1 \int_0^t e^{L_1(t-s)} |\zeta_\epsilon(s)| ds. \quad (39)$$

Пусть $\psi(t)$ есть решение уравнения

$$\psi(t) + L_1 \int_0^t e^{L_1(t-s)} \psi(s) ds = f(t). \quad (40)$$

Нетрудно убедиться в том, что решением (40) будет $\psi(t) = f(t) - L_1 \int_0^t f(s) ds$. В силу того, что имеет место включение

$$\begin{aligned} & \left\{ |\zeta_\epsilon(t)| \leq \frac{\psi(t)}{\epsilon^\gamma} + \epsilon^\alpha, t \in [0, T] \right\} \\ & \subseteq \left\{ |R_\epsilon^1(t)| \leq \frac{f(t)}{\epsilon^\gamma} + \epsilon^\alpha e^{LT}, t \in [0, T] \right\}, \end{aligned}$$

получаем при $0 < \gamma < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ Z_0(t) - \epsilon^{1/2-\gamma} f(t) - \epsilon^{1/2+\alpha} e^{L_1 t} \leq Z_\epsilon(t) \right. \\ & \quad \left. \leq Z_0(t) + \epsilon^{1/2-\gamma} f(t) + \epsilon^{1/2+\alpha} e^{L_1 t}, t \in [0, T] \right\} \\ & \geq \mathbf{P} \left\{ |\zeta_\epsilon(t)| \leq \frac{\psi(t)}{\epsilon^\gamma} + \epsilon^\alpha, t \in [0, T] \right\} \geq 1 - \epsilon^{2\gamma} D_\epsilon(\psi). \end{aligned}$$

Откуда и следует утверждение теоремы 3.

Доказательство теоремы 4. Пусть

$$R_\varepsilon^2(t) = \frac{Z_\varepsilon(t) - Z_0(t) - \sqrt{\varepsilon} Z_1^\varepsilon(t)}{\varepsilon},$$

где $Z_1^\varepsilon(t)$ определено перед теоремой 4. Так как

$$|R_\varepsilon^2(t)| \leq L_2 \int_0^t |Z_1^\varepsilon(s)| ds + L_1 \int_0^t |R_\varepsilon^2(s)| ds,$$

то в силу (38) имеет место оценка

$$|R_\varepsilon^2(t)| \leq L_2 \int_0^t |Z_1^\varepsilon(s)|^2 ds \exp\{L_1 T\}. \quad (41)$$

В силу того, что имеет место включение

$$\begin{aligned} & \left\{ |Z_1^\varepsilon(t)|^2 \leq \psi^2(t), t \in [0, T] \right\} \\ & \subseteq \left\{ \int_0^t |Z_1^\varepsilon(s)|^2 ds \leq \int_0^t \psi^2(s) ds, t \in [0, T] \right\}, \end{aligned}$$

получим с учетом (41) оценку

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \frac{|Z_\varepsilon(t) - Z_0(t) - \sqrt{\varepsilon} Z_1^\varepsilon(t)|}{\varepsilon} \right. \\ & \leq \frac{2L_2 f(t) e^{L_1 T}}{\varepsilon^{2\gamma}} + 8L_2 \varepsilon^{2\alpha} e^{5L_1 T} t, t \in [0, T] \Big\} \\ & \geq \mathbf{P} \left\{ \int_0^t |Z_1^\varepsilon(s)|^2 ds \leq \frac{2f(t)}{\varepsilon^{2\gamma}} + 8\varepsilon^{2\alpha} e^{4L_1 T} t, t \in [0, T] \right\} \\ & \geq \mathbf{P} \left\{ |Z_1^\varepsilon(t)| \geq \frac{\sqrt{f'(t)}}{\varepsilon^\gamma} + 2\varepsilon^\alpha e^{2L_1 T}, t \in [0, T] \right\}. \end{aligned}$$

Так как

$$Z_1^\varepsilon(t) = \exp \left\{ \int_0^t a'_x(s, Z_0(s)) ds \right\} \int_0^t \exp \left\{ - \int_0^\tau a'_x(s, Z_0(s)) ds \right\} d\zeta_\varepsilon(\tau),$$

то

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ |Z_\varepsilon(t) - Z_0(t) - \sqrt{\varepsilon} Z_1^\varepsilon(t)| \leq \frac{2\varepsilon L_2 e^{L_1 T} f(t)}{\varepsilon^{2\gamma}} \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^{2\alpha+1} 8L_2 e^{5L_1 T} t, t \in [0, T] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \mathbf{P} \left\{ \left| \int_0^t \exp \left\{ - \int_0^\tau a'_x(s, Z_0(s)) ds \right\} d\zeta_\varepsilon(\tau) \right| \right. \\
&\quad \left. \leq \frac{(f'(t) \exp \{-2 \int_0^t a'_x(s, Z_0(s)) ds\})^{1/2}}{\varepsilon^\gamma} + 2\varepsilon^\alpha e^{L_1 T}, t \in [0, T] \right\} \\
&\geq \mathbf{P} \left\{ |y_\varepsilon(t)| \leq \frac{(f'(t) \exp \{-2 \int_0^t a'_x(s, Z_0(s)) ds\})^{1/2}}{\varepsilon^\gamma}, t \in [0, T] \right\} \\
&\quad - \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\rho_\varepsilon(t)| > 2\varepsilon^\alpha e^{L_1 T} \right\}
\end{aligned}$$

— здесь

$$\begin{aligned}
y_\varepsilon(t) &= \int_0^t \exp \left\{ - \int_0^\tau a'_x(s, Z_0(s)) ds \right\} d\mu_\varepsilon(\tau), \\
\rho_\varepsilon(t) &= \exp \left\{ - \int_0^t a'_x(s, Z_0(s)) ds \right\} \sqrt{\varepsilon} \eta \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) \\
&\quad + \int_0^t a'_x(s, Z_0(s)) \exp \left\{ - \int_0^s a'(\tau, Z_0(\tau)) d\tau \right\} \sqrt{\varepsilon} \eta \left(\frac{s}{\varepsilon} \right) ds.
\end{aligned}$$

В силу того, что $\sup_{0 \leq t \leq T} |\rho_\varepsilon(t)| \leq 2\sqrt{\varepsilon} e^{L_1 T} \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta(t/\varepsilon)|$, а $y_\varepsilon(t)$ — мартингал, характеристика которого

$$\langle y_\varepsilon, y_\varepsilon \rangle_t = 2 \int_0^t \exp \left\{ - 2 \int_0^\tau a'_x(s, Z_0(s)) ds \right\} d\tau \int_0^\infty \mathbf{E} x_0 x_s ds,$$

получаем утверждение теоремы 4.

З а м е ч а н и е 1. Вспоминая известные результаты Ю. А. Давыдова (см. [11]) и теоремы о непрерывной зависимости от параметра решения стохастического дифференциального уравнения (см., например, [12, с. 343]), убеждаемся в том, что в условиях теоремы 4 $Z_\varepsilon^1(t)$ слабо сходится к $Z_1^0(t)$ — решению линейного стохастического дифференциального уравнения диффузионного типа; несмотря на то, что характеристики гауссовского марковского процесса, каковым является это решение, легко выписываются, для построения доверительного «рожка» необходимо иметь траекторию процесса $Z_\varepsilon^1(t)$, $t \in [0, T]$, (либо $Z_1^0(t)$), построенную по $\zeta_\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$; траекторию же гауссовского марковского процесса $Z_1^0(t)$ мы в реальном опыте не наблюдаем.

З а м е ч а н и е 2. Требование на производную функции $f(t)$, означающее, в частности, что $f(t)$ растет со скоростью экспоненты, по-видимому, связано с методом оценки. Возможен, например, и такой путь построения оценки вероятности нахождения $Z_\varepsilon(t)$ в криволинейном «рожке»: оценить скорость сходимости процесса $\varepsilon^{-1/2}[Z_\varepsilon(t) - Z_0(t)]$ к марковскому гауссовскому процессу (см. [12]) в метрике Леви-Прохорова, затем, например, применить результаты Р. Рудзкиса (см.

[13], [14]) о расчете вероятности нахождения гауссовского процесса в криволинейных границах.

В заключение отметим, что некоторые результаты статьи заявлены в [15]. Близкой тематике посвящены работы [16], [17], [18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уиттл П. Вероятность. М.: Наука, 1972, 288 с.
2. Гизман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982, 612 с.
3. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
4. Чикин Д. О. Функциональная предельная теорема для стационарных процессов. Мартингалльный подход. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. XXXIV, в. 4, с. 731–741.
5. San Lazaro I., de Meger P. A. Questions de théorie des flots. — Lect. Notes Math., 1975, v. 465, p. 1–96.
6. Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А. Гауссовские случайные процессы. М.: Наука, 1978, 384 с.
7. Protter P. Semimartingales and measure preserving flows. — Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. B, 1986, v. 22, № 2, p. 127–147.
8. Мейер П.-А. Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973, 324 с.
9. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980, 576 с.
10. Каллианпур Г. Стохастическая теория фильтрации. М.: Наука, 1987, 320 с.
11. Давыдов Ю. А. О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами. — Теория вероятностей и ее применения, 1968, т. XIII, в. 4, с. 731–737.
12. Гизман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968, 364 с.
13. Рудзкис Р. О плотности вероятности большого выброса гауссовского случайного процесса, I. — Литов. матем. сб., 1986, т. 3, в. 26, с. 512–529.
14. Рудзкис Р. О плотности вероятности большого выброса гауссовского случайного процесса, II. — Литов. матем. сб., 1987, т. 4, в. 27, с. 731–746.
15. Bondarev B. V. On inequality of Kolmogorov–Hajek–Rényi for normed integrals of processes with weak dependence. — In: Stochastic Dynamical Systems. Theory and Applications. (First Ukrainian-Scandinavian Conference, Uzhgorod, Ukraine, September 30 – October 6.) 1995, p. 28.
16. Вентцель А. Д., Фрейдлин М. А. Флуктуации в динамических системах при малых случайных возмущениях. М.: Наука, 1979, 424 с.
17. Papnicolaou G. C., Stroock D. W., Varadhan S. R. S. Martingale approach to some limit theorems. — In: Conference on Statistical Mechanics, Dynamical Systems and Turbulence, (Duke Univ. Math. Ser. 3). Ed. by M. Reed. Duke Univ., 1977.
18. Ethier S. N., Kurtz T. G. Markov Processes. New York: Wiley, 1986.

Поступила в редакцию
4.IV.1995