Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Круглов, К принципу инвариантности, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 2, 239–261

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1801>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:38:17

© 1997 г.

КРУГЛОВ В. М.*

К ПРИНЦИПУ ИНВАРИАНТНОСТИ¹⁾

Обсуждаются пять функционалов от сумм независимых случайных величин, асимптотический анализ которых сыграл важную роль в развитии принципа инвариантности. В статье показано, что слабая сходимость каждого из этих пяти надлежащим образом обобщенных функционалов равносильна применимости центральной предельной теоремы к суммам случайных величин, по которым строятся функционалы.

Ключевые слова и фразы: независимые случайные величины, случайная ломаная, процесс броуновского движения, предельные теоремы для функционалов от случайных величин.

1. Введение. В теории суммирования независимых случайных величин можно выделить группу теорем, доказательство которых можно осуществить по единой схеме. Сначала доказывается, что предельное распределение не зависит от распределения случайных величин, лишь бы выполнялись определенные условия. Затем осуществляется вычисление предельного распределения при специальном выборе случайных величин. Это собирательное свойство получило название принципа инвариантности. Осознанию принципа инвариантности предшествовала серия статей ряда известных специалистов в области теории вероятностей.

Принцип инвариантности был открыт А. Н. Колмогоровым в 1931 году в статье [1]. Через два года в своей статье [19] он приводит более сильное утверждение, которое использует для вычисления предельной функции распределения отклонения эмпирической функции распределения от теоретической функции распределения. Это открытие, по всей видимости, не было тогда оценено специалистами в полной мере, так как пик интереса к этой теме пришелся на 1946–1956 годы. В этот период, в частности, были опубликованы статьи [2]–[9], полностью или частично посвященные обсуждению различных аспектов принципа инвариантности. Любопытно отметить, что ни одна статья иностранных

*МГУ, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Воробьевы горы, 119899 Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 93-011-1446 и грант 96-01-01919 и Международного Научного фонда и правительства России, гранты NFW000 и NFW300.

авторов из этого списка не содержит ссылок на упомянутые статьи Колмогорова. К этому списку следует добавить статью Дуба [20], в которой заново предсказывается упомянутый результат Колмогорова из [19] об эмпирической функции распределения. Следуя идее Колмогорова, Дуб в явном виде указывает роль процесса броуновского моста в задаче о вычислении предельного распределения. Статьи Донскера [4] и [21], будучи написанными под сильным влиянием Дуба, также в определенной степени реализуют идею Колмогорова.

Сам А. Н. Колмогоров глубоко осознавал важность своего открытия. В своем программном докладе [22] он прямо говорит об этом круге задач как об одном из важнейших направлений развития теории вероятностей; эту проблему он сформулировал следующим образом: «Предельные теоремы для распределений в функциональных пространствах как универсальный источник специальных предельных теорем классического типа». Он настойчиво привлекал внимание своих учеников к этой тематике. Вот что пишет А. С. Монин в своих воспоминаниях о А. Н. Колмогорове [23]: «Я выбрал себе темой, при полном одобрении А. Н., распределения вероятностей в функциональных пространствах. Они интересовали нас, в частности, потому, что там нет плотностей вероятностей (поскольку нет объема). Через три месяца аспирантура прервалась (меня призвали-таки в армию) и возобновилась лишь в январе 1946 года с темой, трансформировавшейся в теорию турбулентности (которая и есть теория распределений вероятностей в функциональных пространствах решений уравнений гидродинамики; в общем же виде моя первичная тема была сделана другим учеником А. Н. — Юрием Васильевичем Прохоровым)».

В современной теории вероятностей под принципом инвариантности понимают не только упомянутое выше собирательное свойство, присущее асимптотически нормальным суммам независимых случайных величин, но и родственное свойство, проявляющееся в предельных теоремах для случайных процессов из определенного класса. В общих чертах это свойство состоит в том, что слабая сходимость случайных процессов равносильна слабой сходимости одномерных распределений этих процессов. Именно это свойство лежит в основе доказательства нашей теоремы 1 и теоремы Скорохода [8] о сходимости ступенчатых процессов, построенных по независимым случайным величинам, к однородным процессам с независимыми приращениями. Изложение положения дел в этом круге вопросов можно найти в монографии [24]; в частности, в следствии 3.6 из [24, том 2, с. 43] описывается ситуация, в которой упомянутое свойство оказывается равносильным слабой сходимости процессов.

В настоящее время многие теоремы о слабой сходимости функционалов от асимптотически нормальных сумм независимых случайных величин можно вывести из теоремы Донскера [4] и ее более общего аналога — теоремы Прохорова [9] о слабой сходимости случайных ломаных

к процессу броуновского движения. В статье Прохорова [9], в частности, подчеркивается, что теорема Колмогорова [1] содержит в себе достаточные условия для слабой сходимости случайных ломаных к процессу броуновского движения. В теоремах Донскера и Прохорова предполагается, что случайные величины, по которым строятся случайные ломаные, имеют конечный второй момент. Естественно предположить, что аналоги теорем Донскера и Прохорова справедливы в более общем случае, когда никаких предположений о конечности моментов у случайных величин не делается. Примерами таких аналогов могут служить теорема автора [10] и теорема 1 настоящей статьи, являющаяся, по существу, модификацией теоремы из [10]. В этих теоремах доказано, что слабая сходимость случайных ломаных к процессу броуновского движения равносильна справедливости центральной предельной теоремы для случайных величин, по которым строятся случайные ломаные. Мы применяем нашу теорему для анализа утверждений, которые сыграли ключевую роль в развитии принципа инвариантности, затем обобщаем эти утверждения, указывая необходимые и достаточные условия для справедливости обобщенных утверждений.

Прежде чем перейти к формулировке и обсуждению теорем, условимся об обозначениях. Будем считать, что все рассматриваемые случайные величины определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Если $W, W_n, n = 1, 2, \dots$, — случайные величины, то запись $W_n \Rightarrow W$ или $P\{W_n < x\} \Rightarrow P\{W < x\}$ будет обозначать слабую сходимость последовательности функций распределения случайных величин W_n к функции распределения случайной величины W . Запись $x_n \rightarrow x$ обозначает, что числовая последовательность $\{x_n\}_{n \geq 1}$ сходится к x при $n \rightarrow \infty$. Знак $[x]$ будет обозначать целую часть числа x .

Пусть дана последовательность $\{X_n\}_{n \geq 1}$ независимых одинаково распределенных случайных величин, $EX_n = 0$, $\text{Var} X_n = 1$. Положим $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ и обозначим Φ нормальную функцию распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Ниже приведены пять утверждений, которые сыграли важную роль в развитии принципа инвариантности:

$$1) \quad \left. \begin{aligned} P\left\{ \max_{[\lambda n] \leq k \leq n} S_k < x\sqrt{n} \right\} &\Rightarrow G_1^\lambda(x) \\ P\left\{ \min_{[\lambda n] \leq k \leq n} S_k < x\sqrt{n} \right\} &\Rightarrow 1 - G_1^\lambda(-x) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где λ — число из $[0, 1)$, а

$$G_1^\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x/\sqrt{\lambda}} \max \left\{ 0, 2\Phi \left(\frac{x - u\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-\lambda}} \right) - 1 \right\} e^{-u^2/2} du;$$

$$2) \quad P\left\{ \max_{[\lambda n] \leq k \leq n} |S_k| < x\sqrt{n} \right\} \Rightarrow G_2^\lambda(x), \quad (1.2)$$

где λ — число из $[0, 1)$, $G_2^\lambda(x) = 0$ для $x \leq 0$, а для $x > 0$

$$G_2^\lambda(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x/\lambda}^{\infty} e^{-u^2/2} du + \rho_m \right) e^{-(2m+1)^2 \pi^2 / (8x^2)},$$

$$\rho_m = \frac{2\lambda}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x^2/(2\lambda^2)} \int_0^{(2m+1)\pi/2} e^{\lambda^2 u^2/(2x^2)} \sin u du;$$

$$3) \quad \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^n S_k^2 < xn^2 \right\} \Rightarrow G_3(x), \quad (1.3)$$

где $G_3(x) = 0$ для $x \leq 0$, а для $x > 0$

$$G_3(x) = \frac{\pi^{-3/2}}{4} \int_0^{x/2} \frac{du}{u^{3/2}} \int_0^{\pi/2} Q\left(\frac{t}{2}, e^{-1/(4u)}\right) \frac{dt}{\sqrt{\cos t}},$$

$$Q(z, v) = \frac{\partial q(z, v)}{\partial z}, \quad q(z, v) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m v^{(2m+1)^2/4} \sin((2m+1)z);$$

$$4) \quad \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^n |S_k| < xn^{3/2} \right\} \Rightarrow G_4(x), \quad (1.4)$$

где функция распределения G_4 определяется своим преобразованием Лапласа

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} dG_4(x) = \sum_{m=1}^{\infty} k_m \exp\{-\delta_m s^{3/2}\}, \quad s > 0,$$

здесь δ_m является m -м положительным корнем следующей комбинации бесселевых функций:

$$R(x) = \frac{\sqrt{2x}}{3} \left(J_{1/3}(3^{-1}(2x)^{3/2}) + (J_{-1/3}(3^{-1}(2x)^{3/2})) \right),$$

а число k_m представляет собой дробь

$$k_m = \frac{1 + 3 \int_0^{\delta_m} R(x) dx}{3 \delta_m R(\delta_m)};$$

$$5) \quad \mathbf{P} \left\{ -y\sqrt{n} \leq \min_{1 \leq k \leq n} S_k \leq \max_{1 \leq k \leq n} S_k < x\sqrt{n} \right\} \rightarrow G(x, y), \quad (1.5)$$

где $G(x, y) = 0$, если $x \leq 0$ или $y < 0$, а для $x > 0, y \geq 0$

$$G(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)\pi x/(x+y))}{2m+1} \exp \left\{ -\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{2(x+y)^2} \right\}.$$

Мы изменили оригинальное выражение для функции G_1^λ , придав ей, как нам кажется, более наглядную форму. В частности, наша запись для

G_1^λ охватывает все случаи $\lambda \geq 0$, тогда как запись этой функции в [3] годится только для $\lambda > 0$.

Второе из утверждений (1.1) доказано в [3]. Ранее первое из утверждений (1.1) и утверждение (1.2) были доказаны в [11, с. 499–506] для случая, когда $\lambda = 0$ и случайные величины X_n принимают только два значения ± 1 , каждое с вероятностью $\frac{1}{2}$. Первое из утверждений (1.1) и утверждение (1.2) для случая $\lambda = 0$, а также утверждения (1.3) и (1.4) были доказаны в [2]. Специальный случай утверждения (1.3), когда случайные величины X_n нормально распределены, был рассмотрен в [12]. Утверждение (1.2) в форме, в которой оно сформулировано, представляет собой частный случай теоремы Реньи [13]. Утверждение (1.5) является частным случаем теоремы Вальда [14].

Утверждения (1.1)–(1.5) допускают обобщения. В частности, первое из утверждений (1.1) для случая $\lambda = 0$, а также утверждения (1.2) и (1.5) были обобщены Реньи [13] на случай сумм независимых случайных величин в схеме серий, для которых выполняется условие Линдеберга. Утверждения (1.1) и (1.2) для случая $\lambda = 0$ были обобщены в статье автора [15] на случай сумм независимых случайных величин в схеме серий без предположения о существовании каких-либо моментов у случайных величин. При этом в [15] указаны необходимые и достаточные условия слабой сходимости распределений. Отметим, что доказательства Реньи и автора (в части достаточности) следуют упомянутой выше схеме.

Функции распределения G_i , $i = 1, 2, 3, 4$, можно рассматривать как функции распределения специальных функционалов от процесса броуновского движения $W(t)$, $t \in [0, 1]$. Действительно, с помощью теоремы Донскера [4] можно убедиться в справедливости следующих равенств:

$$\begin{aligned} G_1^\lambda(x) &= P\left\{\max_{\lambda \leq t \leq 1} W(t) < x\right\}, & G_2^\lambda(x) &= P\left\{\max_{\lambda \leq t \leq 1} |W(t)| < x\right\}, \\ G_3(x) &= P\left\{\int_0^1 W^2(t) dt < x\right\}, & G_4(x) &= P\left\{\int_0^1 |W(t)| dt < x\right\}. \end{aligned}$$

Доказательство этих равенств для G_1^0, G_2^0, G_3, G_4 можно найти в упомянутой статье [4].

При доказательстве наших теорем нам потребуется знать оценки функций $1 - G_i(x)$, $x > 0$. Эти оценки приведены в следующей лемме в терминах стандартной нормальной функции распределения.

Лемма 1. Для любого $x > 0$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} 1 - G_i(x) &\leq 2(1 - \Phi(x) + \Phi(-x)), & i &= 1, 2, 4, \\ 1 - G_3(x) &\leq 2(1 - \Phi(\sqrt{x}) + \Phi(-\sqrt{x})). \end{aligned}$$

Доказательство. Утверждения (1.1)–(1.4) справедливы, в частности, для случайных величин X_n , $n = 1, 2, \dots$, каждая из которых принимает только два значения ± 1 , каждое с вероятностью $\frac{1}{2}$. Для

таких случайных величин мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x\sqrt{n}\right\} &\leq \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x\sqrt{n}\right\} \leq 2\mathbf{P}\{|S_n| \geq x\sqrt{n}\}, \\ \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^n |S_k| \geq xn^{3/2}\right\} &\leq \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x\sqrt{n}\right\} \leq 2\mathbf{P}\{|S_n| \geq x\sqrt{n}\}, \\ \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^n S_k^2 \geq xn^2\right\} &\leq \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \sqrt{xn}\right\} \leq 2\mathbf{P}\{|S_n| \geq \sqrt{xn}\}. \end{aligned}$$

Предельный переход при $n \rightarrow \infty$ в этих неравенствах приводит к цели, так как $\mathbf{P}\{S_n < x\sqrt{n}\} \Rightarrow \Phi(x)$. Лемма доказана.

2. Сходимость случайных ломаных. Пусть дана последовательность серий $X_{n,k}$, $1 \leq k \leq m_n$, $n = 1, 2, \dots$, независимых в каждой серии случайных величин, удовлетворяющих условию равномерной предельной малости:

$$\max_{1 \leq k \leq m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k}| > \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.1)$$

Построим суммы $S_0^{(n)} = 0$, $S_k^{(n)} = X_{n,1} + \dots + X_{n,k}$, $1 \leq k \leq m_n$, и, в частности,

$$S_{m_n}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m_n} X_{n,k}. \quad (2.2)$$

Зафиксируем положительное число τ и обозначим

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= a_{n,k}(\tau) = \int_{|x| < \tau} x d\mathbf{P}\{X_{n,k} < x\}, \\ A_k^{(n)} &= A_k^{(n)}(\tau) = a_{n,1} + \dots + a_{n,k}, \\ \sigma_{n,k}^2 &= \sigma_{n,k}^2(\tau) = \mathbf{E} \frac{(X_{n,k} - a_{n,k})^2}{1 + (X_{n,k} - a_{n,k})^2}, \quad \sigma_n^2 = \sigma_n^2(\tau) = \sum_{k=1}^{m_n} \sigma_{n,k}^2. \end{aligned}$$

Нас будут интересовать суммы $S_k^{(n)} - A_k^{(n)}$. Если $\sigma_{n,r}^2 = 0$ для некоторого $1 \leq r \leq k$, то слагаемое $X_{n,r} - a_{n,r}$ равно нулю. Поэтому без ограничения общности рассуждений можно предположить, что

$$\sigma_{n,k}^2 > 0, \quad 1 \leq k \leq m_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Для каждого $n = 1, 2, \dots$ разобьем сегмент $[0, 1]$ точками

$$t_0^{(n)} = 0, \quad t_k^{(n)} = \sigma_n^{-2} \sum_{j=1}^k \sigma_{n,j}^2, \quad 1 \leq k \leq m_n,$$

и построим на плоскости случайную ломаную $X_n(t)$, $t \in [0, 1]$, с вершинами $(t_k^{(n)}, S_k^{(n)} - A_k^{(n)})$. На отрезке $[t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}]$ она имеет вид

$$X_n(t) = S_{k-1}^{(n)} - A_{k-1}^{(n)} + \frac{t - t_{k-1}^{(n)}}{t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}} (X_{n,k} - a_{n,k}). \quad (2.4)$$

Случайная ломаная представляет собой случайный процесс с непрерывными траекториями. Обозначим P_n и P_0 распределения случайного процесса $X_n(t)$ и процесса броуновского движения $W(t)$, $t \in [0, 1]$, соответственно. (Распределение процесса броуновского движения часто называют мерой Винера.) Эти распределения представляют собой вероятностные меры на борелевской сигма-алгебре подмножеств банахова пространства $C[0, 1]$ непрерывных функций $x(t)$, $t \in [0, 1]$, с нормой $\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$.

Теорема 1. Пусть дано число $\tau > 0$. Предположим, что слагаемые сумм (2.2) удовлетворяют условиям (2.1) и (2.3). Для того чтобы последовательность распределений $\{P_n\}_{n \geq 1}$ слабо сходилась к винеровской мере P_0 , необходимо и достаточно, чтобы

$$P\{S_{m_n}^{(n)} - A_{m_n}^{(n)} < x\} \Rightarrow \Phi(x). \quad (2.5)$$

Доказательство. Необходимость условия (2.5) можно доказать точно так же, как это сделано в теореме Прохорова [9]. Именно, пусть x — вещественное число. Рассмотрим множество A_x функций $x(t) \in C[0, 1]$, удовлетворяющих условию $x(1) < x$. Граница множества A_x имеет нулевую меру Винера, и, следовательно,

$$P\{S_{m_n}^{(n)} - A_{m_n}^{(n)} < x\} = P_n(A_x) \rightarrow P_0(A_x) = \Phi(x).$$

Достаточность. Комбинируя две теоремы из монографии [16, с. 132 и 136], мы получим, что (2.1) и (2.5) эквивалентны следующим двум условиям:

$$\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{m_n} \sigma_{n,k}^2 \rightarrow 1, \quad (2.6)$$

$$\sum_{k=1}^{m_n} P\{|X_{n,k}| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.7)$$

В соответствии с теоремой Прохорова [9] достаточно доказать, что последовательность $\{P_n\}_{n \geq 1}$ слабо компактна и конечномерные распределения случайного процесса $X_n(t)$, $t \in [0, 1]$, слабо сходятся к соответствующим конечномерным распределениям процесса броуновского движения. Установим сначала наличие свойства слабой компактности у последовательности $\{P_n\}_{n \geq 1}$. Обозначим $S(A, \delta) = \{x \in C[0, 1]: \|x - y\| < \delta, y \in A\}$ δ -окрестность множества $A \subset C[0, 1]$. Известно [9], что слабая

компактность $\{P_n\}_{n \geq 1}$ равносильна условию: для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдется такое конечное множество $X(\varepsilon, \delta) \subset C[0, 1]$, что

$$P_n \left(S(X(\varepsilon, \delta), \delta) \right) > 1 - \varepsilon \quad (2.8)$$

для всех n за исключением, может быть, конечного числа.

Докажем (2.8). Для этой цели разобьем отрезок $[0, 1]$ на части:

$$\Delta_0^r = \left[0, \frac{1}{r} \right], \quad \Delta_\nu^r = \left(\frac{\nu}{r}, \frac{\nu+1}{r} \right], \quad 1 \leq \nu \leq r-1,$$

где r — фиксированное натуральное число. Образует множества функций из $C[0, 1]$:

$$D_\nu^r = \left\{ x: \max_{t \in \Delta_\nu^r} \left| x(t) - x\left(\frac{\nu}{r}\right) \right| \geq \delta \right\}, \quad 0 \leq \nu \leq r-1.$$

Обозначим $i_\nu = i_{n,\nu}$ и $j_\nu = j_{n,\nu}$ минимальные номера, удовлетворяющие условиям $\nu/r < t_{i_\nu}^{(n)}$ и $(\nu+1)/r \leq t_{j_\nu}^{(n)}$. В силу выбора i_ν и j_ν выполняется соотношение

$$\sum_{k=i_\nu}^{j_\nu} \sigma_{n,k}^2 \rightarrow \frac{1}{r}, \quad n \rightarrow \infty,$$

что с учетом (2.7), по упомянутым теоремам из [16, с. 132 и 136], дает

$$P \left\{ \sum_{k=i_\nu}^{j_\nu} (X_{n,k} - a_{n,k}) < x \right\} \Rightarrow \Phi(x\sqrt{r}).$$

Последнее соотношение вместе с условием (2.1) по теореме 2 из [15] позволяют утверждать, что

$$P \left\{ \max_{0 \leq k \leq j_\nu - i_\nu} \left| \sum_{i=0}^k (X_{n,i_\nu+i} - a_{n,i_\nu+i}) \right| < x \right\} \Rightarrow G_2^0(x\sqrt{r}).$$

Из определения случайной ломаной вытекает неравенство

$$P_n(D_\nu^r) \leq P \left\{ \max_{0 \leq k \leq j_\nu - i_\nu} \left| \sum_{i=0}^k (X_{n,i_\nu+i} - a_{n,i_\nu+i}) \right| \geq \frac{\delta}{4} \right\},$$

и, следовательно,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(D_\nu^r) \leq 1 - G_2^0\left(\frac{\delta\sqrt{r}}{4}\right) \leq 4 \left(1 - \Phi\left(\frac{\delta\sqrt{r}}{4}\right) \right).$$

На последнем этапе мы воспользовались леммой 1. Ясно, что можно выбрать натуральное число r настолько большим, что будет выполняться неравенство

$$P_n \left(\bigcup_{\nu=0}^{r-1} D_\nu^r \right) \leq \sum_{\nu=0}^{r-1} P_n(D_\nu^r) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех достаточно больших n . Для множества функций $A_l = \{x: \|x\| \leq l\}$ из $C[0, 1]$ по упомянутой теореме 2 из [15] мы имеем

$$P_n(A_l) = P\left\{\max_{1 \leq k \leq m_n} |S_k^{(n)} - A_k^{(n)}| \leq l\right\} \Rightarrow G_2^0(l).$$

С помощью подходящего выбора положительного числа l можно добиться неравенства $P_n(H) \geq 1 - \varepsilon$ для всех достаточно больших n , где $H = A_l \cap \bigcap_{\nu=0}^{r-1} \bar{D}_\nu^r$ и $\bar{D}_\nu^r$ обозначает дополнение D_ν^r . Разобьем прямоугольник $\{(t, x): 0 \leq t \leq 1, |x| \leq l\}$ прямыми, параллельными осям t и x и проходящими через точки $(\nu/r, pl/q)$, $\nu = 0, 1, \dots, r$, $p = 0, \pm 1, \dots, \pm q$, где $q = [4/\delta]$. Ясно, что H содержится в множестве $X(\varepsilon, \delta)$ кусочно-линейных функций из $C[0, 1]$ с вершинами, лежащими в узлах сетки $\{(\nu/r, pl/q): \nu = 0, 1, \dots, r, p = 0, \pm 1, \dots, \pm q\}$. Последовательность $\{P_n\}_{n \geq 1}$ слабо компактна, так как $P_n(S(X(\varepsilon, \delta), \delta)) \geq P_n(H) \geq 1 - \varepsilon$ для всех достаточно больших n .

Докажем теперь, что конечномерные распределения случайного процесса $X_n(t)$ слабо сходятся к соответствующим конечномерным распределениям процесса броуновского движения. С этой целью заметим, что случайный процесс $X_n(t)$ имеет асимптотически независимые приращения. Поэтому достаточно доказать, что для любых s и t , $0 \leq s < t \leq 1$, функции распределения приращений $X_n(t) - X_n(s)$ слабо сходятся к нормальной функции распределения с параметрами 0 и $t - s$. Для каждого n найдутся такие $k = k(n)$ и $j = j(n)$, что $t_{k-1}^{(n)} \leq s \leq t_k^{(n)}$ и $t_{j-1}^{(n)} \leq t \leq t_j^{(n)}$. Ясно, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство $t_k^{(n)} < t_{j-1}^{(n)}$. Из определения случайной ломаной следует, что

$$X_n(t) - X_n(s) - \sum_{i=k}^{j-1} (X_{n,i} - a_{n,i}) \Rightarrow 0.$$

В силу выбора чисел $k = k(n)$ и $j = j(n)$ выполняется соотношение

$$\sum_{i=k}^{j-1} \sigma_{n,i}^2 \longrightarrow t - s,$$

что вместе с (2.7) влечет

$$P\left\{\sum_{i=k}^{j-1} (X_{n,i} - a_{n,i}) < x\right\} \Rightarrow \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t-s}}\right).$$

Теорема доказана.

3. Новые теоремы. В этой части статьи мы приводим обобщения утверждений (1.1)–(1.5) для сумм (2.2) независимых в каждой сумме случайных величин, удовлетворяющих условиям (2.1) и (2.3).

Для данных чисел $\tau > 0$ и $\lambda \in [0, 1)$ определим натуральное число

$$l_n = l_n(\tau, \lambda) = \min \left\{ l: 1 \leq l \leq m_n, \sigma_n^{-2}(\tau) \sum_{k=1}^l \sigma_{n,k}^2(\tau) \geq \lambda \right\}. \quad (3.0)$$

Теорема 2. Пусть даны числа $\tau > 0$ и $\lambda \in [0, 1)$. Предположим, что слагаемые сумм (2.2) удовлетворяют условиям (2.1) и (2.3). Определим натуральное число $l_n = l_n(\tau, \lambda)$, как указано в (3.0). Следующие шесть утверждений эквивалентны:

$$P \left\{ S_{m_n}^{(n)} - A_{m_n}^{(n)}(\tau) < x \right\} \Rightarrow \Phi(x); \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} P \left\{ \max_{l_n \leq k \leq m_n} (S_k^{(n)} - A_k^{(n)}(\tau)) < x \right\} &\Rightarrow G_1^\lambda(x) \\ P \left\{ \min_{l_n \leq k \leq m_n} (S_k^{(n)} - A_k^{(n)}(\tau)) < x \right\} &\Rightarrow 1 - G_1^\lambda(-x) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$$P \left\{ \max_{l_n \leq k \leq m_n} |S_k^{(n)} - A_k^{(n)}(\tau)| < x \right\} \Rightarrow G_2^\lambda(x); \quad (3.3)$$

$$P \left\{ \sum_{k=1}^{m_n} \sigma_{n,k}^2(\tau) (S_k^{(n)} - A_k^{(n)}(\tau))^2 < x \right\} \Rightarrow G_3(x); \quad (3.4)$$

$$P \left\{ \sum_{k=1}^{m_n} \sigma_{n,k}^2(\tau) |S_k^{(n)} - A_k^{(n)}(\tau)| < x \right\} \Rightarrow G_4(x); \quad (3.5)$$

$$P \{ A_n(x, y) \} \rightarrow G(x, y), \quad (3.6)$$

$$A_n(x, y) = \left\{ -y \leq \min_{1 \leq k \leq m_n} (S_k^{(n)} - A_k^{(n)}(\tau)) \leq \max_{1 \leq k \leq m_n} (S_k^{(n)} - A_k^{(n)}(\tau)) < x \right\}.$$

Выше было сказано, что утверждения (3.2) и (3.3) при $\lambda = 0$ были доказаны в [15]. Более того, мы уже воспользовались утверждением (3.3) с $\lambda = 0$ при доказательстве теоремы 1. Таким образом, новым здесь является только случай $\lambda > 0$.

Теорема 3. Пусть дана последовательность $\{X_n\}_{n \geq 1}$ независимых одинаково распределенных случайных величин. Для того чтобы выполнялось любое из утверждений (1.1)–(1.5), необходимо и достаточно, чтобы $EX_1 = 0, \text{Var} X_1 = 1$.

Мы уже упоминали, что Реньи [13] обобщил первое из утверждений (1.1) для $\lambda = 0$, а также утверждения (1.2) и (1.5) на суммы независимых случайных величин в схеме серий, для которых выполняется условие Линдеберга. Наша следующая теорема показывает, что надлежащим образом сформулированные обобщения утверждений (1.1)–(1.5) эквивалентны условию Линдеберга. В частности, утверждения (3.10), (3.11) и (3.14) содержат в себе упомянутые утверждения Реньи.

Будем предполагать, что слагаемые сумм (2.2) имеют конечные дисперсии, удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=1}^{m_n} \text{Var} X_{n,k} = 1. \quad (3.7)$$

Для данного числа $\lambda \in [0, 1)$ определим аналог величины (3.0), сохранив обозначение:

$$l_n = l_n(\lambda) = \min \left\{ l: 1 \leq l \leq m_n, \sum_{k=1}^l \text{Var} X_{n,k} \geq \lambda \right\}. \quad (3.8)$$

Теорема 4. Пусть дано число $\lambda \in [0, 1)$. Предположим, что слагаемые сумм (2.2) имеют нулевые математические ожидания и конечные дисперсии $\text{Var} X_{n,k} > 0$, удовлетворяющие условию (3.7). Определим натуральное число l_n , как указано в (3.8). Условие Линдеберга

$$\sum_{k=1}^{m_n} \int_{|x| \geq \varepsilon} x^2 dP\{X_{n,k} < x\} \rightarrow \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\max_{1 \leq k \leq m_n} \text{Var} X_{n,k} \rightarrow 0 \quad (3.9)$$

и было справедливо любое из следующих пяти утверждений:

$$\left. \begin{aligned} P\left\{ \max_{l_n \leq k \leq m_n} S_k^{(n)} < x \right\} &\Rightarrow G_1^\lambda(x) \\ P\left\{ \min_{l_n \leq k \leq m_n} S_k^{(n)} < x \right\} &\Rightarrow 1 - G_1^\lambda(-x) \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

$$P\left\{ \max_{l_n \leq k \leq m_n} |S_k^{(n)}| < x \right\} \Rightarrow G_2^\lambda(x); \quad (3.11)$$

$$P\left\{ \sum_{k=1}^{m_n} \text{Var} X_{n,k} (S_k^{(n)})^2 < x \right\} \Rightarrow G_3(x); \quad (3.12)$$

$$P\left\{ \sum_{k=1}^{m_n} \text{Var} X_{n,k} |S_k^{(n)}| < x \right\} \Rightarrow G_4(x); \quad (3.13)$$

$$P\left\{ -y \leq \min_{1 \leq k \leq m_n} S_k^{(n)} \leq \max_{1 \leq k \leq m_n} S_k^{(n)} < x \right\} \Rightarrow G(x, y). \quad (3.14)$$

Далее окажутся полезными следующие четыре леммы.

Лемма 2. Пусть дана случайная величина X с безгранично делимой функцией распределения F . Если математическое ожидание $E \exp\{\alpha |X| \log(1 + |X|)\}$ конечно для любого $\alpha > 0$, то F — нормальная или вырожденная функция распределения.

Доказательство можно найти в [17].

Лемма 3. Пусть даны независимые симметричные случайные величины $X_1, \dots, X_n$ и положительные числа $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Для любого $x > 0$ и $\gamma = \max_{1 \leq k \leq n} \gamma_k$ выполняется неравенство

$$P \left\{ \left| \sum_{k=1}^n \gamma_k X_k \right| > x \right\} \leq 2P \left\{ \left| \sum_{k=1}^n X_k \right| \geq \frac{x}{\gamma} \right\}.$$

По поводу доказательства см. лемму 1 из [18], где эта лемма доказана для случайных величин, принимающих только два значения.

Лемма 4. Пусть дано число $\tau > 0$. Предположим, что слагаемые сумм (2.2) удовлетворяют условию (2.1). Следующие три утверждения эквивалентны:

$$\sigma_n^2(\tau) \rightarrow 0, \quad S_{m_n}^{(n)} - A_{m_n}^{(n)}(\tau) \Rightarrow 0, \quad \max_{1 \leq k \leq m_n} |S_k^{(n)} - A_k^{(n)}(\tau)| \Rightarrow 0.$$

Доказательство. Первые два утверждения эквивалентны по теореме из [16, с. 128]. Если выполнено первое утверждение, то

$$\mu_n = \max_{1 \leq k \leq m_n} |\text{med}(S_k^{(n)} - A_k^{(n)})| \rightarrow 0. \quad (3.15)$$

Предположим противное. Тогда $\text{med}(S_{k_n}^{(n)} - A_{k_n}^{(n)}) \rightarrow \mu \neq 0$ для некоторой последовательности натуральных чисел $\{k_n\}_{n \geq 1}$, $1 \leq k_n \leq m_n$. По только что упомянутой теореме $S_{k_n}^{(n)} - A_{k_n}^{(n)} \Rightarrow 0$, и, следовательно, $\mu = 0$, что доказывает (3.15). Рассмотрим случайные величины $X'_{n,k}$, $1 \leq k \leq m_n$, не зависящие друг от друга и от случайных величин $X_{n,k}$, $1 \leq k \leq m_n$, при этом $X'_{n,k}$ и $X_{n,k}$ предполагаются одинаково распределенными. Привлекая неравенство симметризации и неравенство Леви для симметричных случайных величин, получим

$$\begin{aligned} & P \left\{ \max_{1 \leq k \leq m_n} |S_k^{(n)} - A_k^{(n)}| > \varepsilon \right\} \\ & \leq P \left\{ \max_{1 \leq k \leq m_n} |(S_k^{(n)} - A_k^{(n)}) - \text{med}(S_k^{(n)} - A_k^{(n)})| > \varepsilon - \mu_n \right\} \\ & \leq 2P \left\{ \left| \sum_{k=1}^{m_n} (X_{n,k} - X'_{n,k}) \right| > \varepsilon - \mu_n \right\} \\ & \leq 4P \left\{ |S_{m_n}^{(n)} - A_{m_n}^{(n)}| > \frac{\varepsilon - \mu_n}{2} \right\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Лемма доказана.

Чтобы сформулировать следующую лемму, нам нужны новые обозначения. Пусть даны два числа $\tau > 0$ и $\sigma > 0$. Преобразуем слагаемые сумм (2.2) следующим образом: $Y_{n,k} = \sigma^{-1} X_{n,k}$, и обозначим

$$b_{n,k} = b_{n,k}(\tau) = \int_{|x| < \tau} x dP\{Y_{n,k} < x\}, \quad B_k^{(n)} = B_k^{(n)}(\tau) = b_{n,1} + \dots + b_{n,k},$$

$$\Delta_{n,k}^2 = \Delta_{n,k}^2(\tau) = \mathbf{E} \frac{(Y_{n,k} - b_{n,k})^2}{1 + (Y_{n,k} - b_{n,k})^2}, \quad \Delta_n^2 = \Delta_n^2(\tau) = \sum_{k=1}^{m_n} \Delta_{n,k}^2.$$

Лемма 5. Пусть даны два числа $\tau > 0$ и $\sigma > 0$. Предположим, что слагаемые сумм (2.2) удовлетворяют условию (2.1). Если

$$\mathbf{P}\{S_{m_n}^{(n)} - A_{m_n}^{(n)}(\tau) < x\} \Rightarrow \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right), \quad (3.16)$$

тогда

$$\max_{1 \leq k \leq m_n} |B_k^{(n)}(\tau) - \sigma^{-1} A_k^{(n)}(\tau)| \rightarrow 0, \quad (3.17)$$

$$\sum_{k=1}^{m_n} |\Delta_{n,k}^2(\tau) - \sigma^{-2} \sigma_{n,k}^2(\tau)| \rightarrow 0. \quad (3.18)$$

Доказательство. По теореме из [16, с. 136] условие (3.16) влечет (2.7). Обозначим $a = \max\{\tau, \sigma\tau\}$ и $b = \min\{\tau, \sigma\tau\}$. Величина, стоящая слева в (3.17), не превосходит суммы величин $|b_{n,k} - \sigma^{-1} a_{n,k}|$, $1 \leq k \leq m_n$. Утверждение (3.17) следует из (2.7), так как $|b_{n,k} - \sigma^{-1} a_{n,k}| \leq \sigma^{-1} a \mathbf{P}\{|X_{n,k}| \geq b\}$. Переходя к доказательству (3.18), отметим соотношение

$$\sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k} - a_{n,k}| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad \varepsilon > 0, \quad (3.19)$$

являющееся следствием условия (2.7) и соотношения

$$\max_{1 \leq k \leq m_n} |a_{n,k}| \rightarrow 0, \quad (3.20)$$

которое вытекает из условия (2.1).

Запишем величины, стоящие под модулем в сумме (3.18), в виде суммы $\Delta_{n,k}^2 - \sigma^{-2} \sigma_{n,k}^2 = \mathbf{E} J_{n,k}^{(1)} + \mathbf{E} J_{n,k}^{(2)}$, где

$$J_{n,k}^{(1)} = \frac{(Y_{n,k} - b_{n,k})^2 - \sigma^{-2} (X_{n,k} - a_{n,k})^2}{(1 + (Y_{n,k} - b_{n,k})^2)(1 + (X_{n,k} - a_{n,k})^2)},$$

$$J_{n,k}^{(2)} = (1 - \sigma^{-2}) \frac{(Y_{n,k} - b_{n,k})^2 (X_{n,k} - a_{n,k})^2}{(1 + (Y_{n,k} - b_{n,k})^2)(1 + (X_{n,k} - a_{n,k})^2)}.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и обозначим $I_{n,k}(\varepsilon)$ индикаторную функцию события $\{|X_{n,k} - a_{n,k}| < \varepsilon\}$. Из неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|J_{n,k}^{(2)}| &= \mathbf{E}|J_{n,k}^{(2)} I_{n,k}(\varepsilon) + J_{n,k}^{(2)} (1 - I_{n,k}(\varepsilon))| \\ &\leq |1 - \sigma^{-2}| \left(\varepsilon^2 \Delta_{n,k}^2 + \mathbf{P}\{|X_{n,k} - a_{n,k}| \geq \varepsilon\} \right) \end{aligned}$$

следует, что

$$\sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E}|J_{n,k}^{(2)}| \leq |1 - \sigma^{-2}| \left(\varepsilon^2 \Delta_n^2 + \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{P}\{|X_{n,k} - a_{n,k}| \geq \varepsilon\} \right). \quad (3.21)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|J_{n,k}^{(1)}| &= \mathbf{E}|J_{n,k}^{(1)}I_{n,k}(\varepsilon) + J_{n,k}^{(1)}(1 - I_{n,k}(\varepsilon))| \\ &\leq \mathbf{E}|J_{n,k}^{(1)}I_{n,k}(\varepsilon)| + (1 + \sigma^{-2})\mathbf{P}\{|X_{n,k} - a_{n,k}| \geq \varepsilon\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}|J_{n,k}^{(1)}I_{n,k}(\varepsilon)| \\ &= \mathbf{E}\left| \frac{2\sigma^{-1}(X_{n,k} - a_{n,k})(\sigma^{-1}a_{n,k} - b_{n,k}) + (\sigma^{-1}a_{n,k} - b_{n,k})^2}{(1 + (Y_{n,k} - b_{n,k})^2)(1 + (X_{n,k} - a_{n,k})^2)} I_{n,k}(\varepsilon) \right| \\ &\leq 2\sigma^{-1}\varepsilon|\sigma^{-1}a_{n,k} - b_{n,k}| + (\sigma^{-1}a_{n,k} - b_{n,k})^2 \\ &\leq \sigma^{-2}(2\varepsilon a + a^2)\mathbf{P}\{|X_{n,k}| \geq b\}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m_n} \mathbf{E}|J_{n,k}^{(1)}| &\leq (2\sigma^{-2}\varepsilon a + \sigma^{-2}a^2 + 1 + \sigma^{-2}) \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{m_n} (\mathbf{P}\{|X_{n,k}| \geq b\} + \mathbf{P}\{|X_{n,k} - a_{n,k}| \geq \varepsilon\}). \end{aligned}$$

Из (3.16) следует, что

$$\mathbf{P}\{\sigma^{-1}S_{m_n}^{(n)} - B_{m_n}^{(n)} < x\} \Rightarrow \Phi(x),$$

в чем легко убедиться с помощью теорем из [16, с. 132 и 136]. Поэтому (см. [16], с. 128) $\Delta_n^2 \rightarrow 1$. Из предыдущего неравенства и соотношений (3.21), (3.19) и (2.7) следует (3.18), так как

$$\sum_{k=1}^{m_n} |\Delta_{n,k}^2 - \sigma^{-2}\sigma_{n,k}^2| \leq \sum_{k=1}^{m_n} (\mathbf{E}|J_{n,k}^{(1)}| + \mathbf{E}|J_{n,k}^{(2)}|)$$

и число $\varepsilon > 0$ можно взять произвольно малым. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. В пространстве $C[0, 1]$ определим следующие пять функционалов:

$$H_0(x) = \min_{\lambda \leq t \leq 1} x(t), \quad H_1(x) = \max_{\lambda \leq t \leq 1} x(t), \quad H_2(x) = \max_{\lambda \leq t \leq 1} |x(t)|,$$

$$H_3(x) = \int_0^1 x^2(t) dt, \quad H_4(x) = \int_0^1 |x(t)| dt.$$

Докажем, что (3.1) и (2.1) влекут за собой каждое из утверждений (3.2)–(3.6). Заметим, что из определения (3.0) числа l_n и соотношений (2.6) и (2.7) следует, что $t_{l_n}^{(n)} \rightarrow \lambda$. По теореме 1 мы имеем

$$\mathbf{P}\{H_i(X_n(t)) < x\} \Rightarrow \mathbf{P}\{H_i(W(t)) < x\}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{-y \leq H_0(X_n(t)) \leq H_1(X_n(t)) < x\right\} \\ & \Rightarrow \mathbf{P}\left\{-y \leq H_0(W(t)) \leq H_1(W(t)) < x\right\}, \end{aligned}$$

откуда очевидным образом следуют соотношения (3.2), (3.3) и (3.6).

Докажем (3.4). Привлекая (2.4), получим

$$\begin{aligned} H_3(X_n(t)) &= \sum_{k=1}^{m_n} \int_{t_{k-1}^{(n)}}^{t_k^{(n)}} \left(S_{k-1}^{(n)} - A_{k-1}^{(n)} + \frac{t - t_{k-1}^{(n)}}{t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}} (X_{n,k} - a_{n,k}) \right)^2 dt \\ &= \sum_{k=1}^{m_n} \int_{t_{k-1}^{(n)}}^{t_k^{(n)}} \left(S_k^{(n)} - A_k^{(n)} - \frac{t_k^{(n)} - t}{t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}} (X_{n,k} - a_{n,k}) \right)^2 dt \\ &= \sigma_n^{-2} \sum_{k=1}^{m_n} \sigma_{n,k}^2 (S_k^{(n)} - A_k^{(n)})^2 + L_n, \end{aligned}$$

где

$$L_n = \sigma_n^{-2} \sum_{k=1}^{m_n} \sigma_{n,k}^2 \left(- (S_k^{(n)} - A_k^{(n)}) (X_{n,k} - a_{n,k}) + \frac{1}{3} (X_{n,k} - a_{n,k})^2 \right).$$

Утверждение (3.4) будет следовать из этих равенств и соотношения (3.22) при $i = 3$, если мы докажем, что $L_n \Rightarrow 0$. Для этого достаточно проверить, что каждое из двух слагаемых, стоящих в правой части неравенства

$$|L_n| \leq \max_{1 \leq k \leq m_n} |S_k^{(n)} - A_k^{(n)}| \max_{1 \leq k \leq m_n} |X_{n,k} - a_{n,k}| + \frac{1}{3} \max_{1 \leq k \leq m_n} (X_{n,k} - a_{n,k})^2,$$

слабо сходится к нулю. Это верно по отношению ко второму слагаемому, поскольку $\mathbf{P}\{\max_{1 \leq k \leq m_n} |X_{n,k} - a_{n,k}| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$ в силу (3.19). Первое слагаемое также слабо сходится к нулю, так как последовательность функций распределения случайных величин $\max_{1 \leq k \leq m_n} |S_k^{(n)} - A_k^{(n)}|$ слабо сходится в силу (3.3) с $\lambda = 0$, а сомножители при этих случайных величинах сходятся к нулю.

Докажем (3.5). Привлекая (2.4), мы получим

$$\begin{aligned} H_4(X_n(t)) &= \sum_{k=1}^{m_n} \int_{t_{k-1}^{(n)}}^{t_k^{(n)}} \left| S_{k-1}^{(n)} - A_{k-1}^{(n)} + \frac{t - t_{k-1}^{(n)}}{t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}} (X_{n,k} - a_{n,k}) \right| dt \\ &= \sum_{k=1}^{m_n} \int_{t_{k-1}^{(n)}}^{t_k^{(n)}} \left| S_k^{(n)} - A_k^{(n)} - \frac{t_k^{(n)} - t}{t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}} (X_{n,k} - a_{n,k}) \right| dt, \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{m_n} \int_{t_{k-1}^{(n)}}^{t_k^{(n)}} \frac{t_k^{(n)} - t}{t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}} |X_{n,k} - a_{n,k}| dt \leq \frac{1}{2} \max_{1 \leq k \leq m_n} |X_{n,k} - a_{n,k}| \Rightarrow 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} H_4(X_n(t)) - \sigma_n^{-2} \sum_{k=1}^{m_n} \sigma_{n,k}^2 |S_k^{(n)} - A_k^{(n)}| \\ = H_4(X_n(t)) - \sum_{k=1}^{m_n} \int_{t_{k-1}^{(n)}}^{t_k^{(n)}} |S_k^{(n)} - A_k^{(n)}| dt \Rightarrow 0, \end{aligned}$$

что влечет требуемое.

Покажем теперь, что (3.1) является следствием каждого из утверждений (3.2)–(3.6) вместе с условием (2.1). Из неравенств

$$\begin{aligned} P\{S_{m_n}^{(n)} - A_{m_n}^{(n)} < x\} &\leq P\left\{\min_{l_n \leq k \leq m_n} (S_k^{(n)} - A_k^{(n)}) < x\right\}, \\ P\{S_{m_n}^{(n)} - A_{m_n}^{(n)} \geq x\} &\leq P\left\{\max_{l_n \leq k \leq m_n} (S_k^{(n)} - A_k^{(n)}) \geq x\right\}, \\ P\{|S_{m_n}^{(n)} - A_{m_n}^{(n)}| \geq x\} &\leq P\left\{\max_{l_n \leq k \leq m_n} |S_k^{(n)} - A_k^{(n)}| \geq x\right\} \end{aligned}$$

следует, что каждое из утверждений (3.2), (3.3), (3.6) влечет слабую компактность последовательности функций распределения $\{F_n\}_{n \geq 1}$, $F_n(x) = P\{S_{m_n}^{(n)} - A_{m_n}^{(n)} < x\}$. Пусть $F_n(x) \Rightarrow F(x)$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}$, для некоторой последовательности $\mathcal{N}$ натуральных чисел. Из предыдущих неравенств и леммы 1 вытекает неравенство

$$1 - F(x) - F(-x) \leq 2(1 - \Phi(x) + \Phi(-x)), \quad x > 0.$$

Пусть случайная величина X имеет F своей функцией распределения. Из предыдущего неравенства следует, что математическое ожидание $E \exp\{\alpha |X| \log(1 + |X|)\}$ конечно для любого $\alpha > 0$. Функция распределения F , будучи слабым пределом некоторой последовательности функций распределения сумм независимых предельно равномерно малых случайных величин, безгранично делима. На основании леммы 2 заключаем, что F является нормальной или вырожденной функцией распределения. Функция F не может быть вырожденной. Действительно, если она вырождена, то будет выполняться третье утверждение из леммы 4 при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}$, и, следовательно, функции распределения в (3.2), (3.3) и (3.6) должны были бы быть вырожденными. Если функция F не вырождена, то она имеет вид $F(x) = \Phi(x/\sigma)$ для некоторого $\sigma > 0$, в чем можно убедиться с помощью двух теорем из [16, с. 132 и 136]. В этом случае мы можем применить уже доказанные утверждения к случайным величинам $X_{n,k}/\sigma$, $1 \leq k \leq m_n$, $n \in \mathcal{N}$, что приведет нас к равенствам $G_i(\sigma x) = G_i(x)$, $G(\sigma x, \sigma y) = G(x, y)$, возможным только при $\sigma = 1$. Действительно, например, в случае (3.3) мы имеем

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq m_n} |\sigma^{-1} S_k^{(n)} - B_k^{(n)}(\tau)| < x\right\} \Rightarrow G_2^\lambda(x),$$

и, в силу (3.17),

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq m_n} |S_k^{(n)} - A_k^{(n)}| < \sigma x\right\} \Rightarrow G_2^\lambda(x).$$

Сравнение с (3.3) приводит к равенству $G_2^\lambda(\sigma x) = G_2^\lambda(x)$. Таким образом мы приходим к выводу, что каждая слабо сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{F_n\}_{n \geq 1}$ имеет Φ в качестве своего слабого предела, т.е. условие (2.1) вместе с любым из трех утверждений (3.2), (3.3), (3.6) влечет (3.1).

Пусть теперь выполнено (3.4). Докажем сначала, что нижний предел последовательности $\{\sigma_n^2\}_{n \geq 1}$, который мы обозначим Δ , положителен. Если $\Delta = 0$, то найдется такая последовательность $\mathcal{N}$ натуральных чисел, что $\sigma_n^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}$. По лемме 4 мы имеем

$$\sum_{k=1}^{m_n} \sigma_{n,k}^2 (S_k^{(n)} - A_k^{(n)})^2 \leq \sigma_n^2 \max_{1 \leq k \leq m_n} |S_k^{(n)} - A_k^{(n)}|^2 \Rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}$, и, следовательно, функция G_3 должна была бы быть вырожденной. Это противоречие доказывает, что $\Delta > 0$.

Для доказательства (3.1) достаточно убедиться, что каждая последовательность натуральных чисел $\mathcal{N}$ содержит такую подпоследовательность $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}$, что

$$F_n(x) = P\{S_{m_n}^{(n)} - A_{m_n}^{(n)} < x\} \Rightarrow \Phi(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathcal{N}_0. \quad (3.23)$$

Возьмем δ , $0 < \delta < \sqrt{\Delta}$, и определим натуральное число

$$k_n = \max \left\{ k: 1 \leq k \leq m_n, \sigma_n^{-1} \sum_{j=k}^{m_n} \sigma_{n,j}^2 \geq \delta \right\}.$$

Из условия (2.1) вытекает, что $\max_{1 \leq k \leq m_n} \sigma_{n,k}^2 \rightarrow 0$, и, следовательно, число k_n определено для всех достаточно больших n , скажем, для всех $n > n_0$, и

$$\sigma_n^{-1} \sum_{j=k_n}^{m_n} \sigma_{n,j}^2 \rightarrow \delta. \quad (3.24)$$

Обозначим $\gamma_k = \sigma_n^{-1}(\sigma_{n,k}^2 + \dots + \sigma_{n,m_n}^2)$, $1 \leq k \leq m_n$. Далее предполагается, что $n > n_0$. Применение неравенства Коши–Буняковского дает

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{m_n} \gamma_k (X_{n,k} - a_{n,k}) \right)^2 &= \sigma_n^{-2} \left(\sum_{k=1}^{m_n} \sigma_{n,k}^2 (S_k^{(n)} - A_k^{(n)}) \right)^2 \\ &\leq \sigma_n^{-2} \sum_{k=1}^{m_n} \sigma_{n,k}^2 \sum_{k=1}^{m_n} \sigma_{n,k}^2 (S_k^{(n)} - A_k^{(n)})^2 = \sum_{k=1}^{m_n} \sigma_{n,k}^2 (S_k^{(n)} - A_{n,k}^{(n)})^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Рассмотрим случайные величины $X'_{n,k}$, $1 \leq k \leq m_n$, не зависящие друг от друга и от случайных величин $X_{n,k}$, $1 \leq k \leq m_n$, при этом будем предполагать, что $X'_{n,k}$ и $X_{n,k}$ одинаково распределены. Ясно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{k=1}^{m_n} \gamma_k (X_{n,k} - X'_{n,k}) \right| \geq x \right\} &\leq 2\mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{k=1}^{m_n} \gamma_k (X_{n,k} - a_{n,k}) \right| \geq \frac{x}{2} \right\} \\ &\leq 2\mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{m_n} \sigma_{n,k}^2 (S_k^{(n)} - A_k^{(n)})^2 \geq \frac{x^2}{4} \right\}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством Леви для симметричных случайных величин

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{k=1}^{k_n} \gamma_k (X_{n,k} - X'_{n,k}) \right| \geq x \right\} \leq 2\mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{k=1}^{m_n} \gamma_k (X_{n,k} - X'_{n,k}) \right| \geq x \right\}$$

и леммой 3, мы получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{k=1}^{k_n} (X_{n,k} - X'_{n,k}) \right| \geq x \right\} &= \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{k=1}^{k_n} \gamma_k^{-1} \gamma_k (X_{n,k} - X'_{n,k}) \right| \geq x \right\} \\ &\leq 2\mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{k=1}^{k_n} \gamma_k (X_{n,k} - X'_{n,k}) \right| \geq \gamma_{k_n} x \right\} \\ &\leq 4\mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{m_n} \sigma_{n,k}^2 (S_k^{(n)} - A_k^{(n)})^2 \geq \frac{x^2 \gamma_{k_n}^2}{4} \right\}, \end{aligned}$$

что, с учетом неравенства симметризации

$$\mathbf{P} \{ |S_{k_n}^{(n)} - \text{med} S_{k_n}^{(n)}| \geq x \} \leq 2\mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{k=1}^{k_n} (X_{n,k} - X'_{n,k}) \right| \geq x \right\},$$

приводит к неравенству

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \{ |S_{k_n}^{(n)} - \text{med} S_{k_n}^{(n)}| \geq x \} \\ \leq 8\mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{m_n} \sigma_{n,k}^2 (S_k^{(n)} - A_k^{(n)})^2 \geq \frac{x^2 \gamma_{k_n}^2}{4} \right\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Неравенство (3.26), утверждение (3.4) и (3.24) влекут за собой слабую компактность последовательности функций распределения $\{R_n\}_{n \geq 1}$, $R_n(x) = \mathbf{P}\{S_{k_n}^{(n)} - \text{med} S_{k_n}^{(n)} < x\}$. Пусть $R_n(x) \Rightarrow R(x)$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}_1$, для некоторой подпоследовательности $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$. Функция распределения R , будучи слабым пределом некоторой последовательности функций распределения сумм независимых равномерно предельно малых случайных величин, безгранично делима. Принимая во внимание

(3.24) и (3.26), мы видим, что R удовлетворяет неравенству

$$1 - R(x) - R(-x) \leq 8 \left(1 - G_3 \left(\frac{x^2 \delta^2}{4} \right) \right), \quad x > 0.$$

Из лемм 1 и 2 следует, что R — вырожденная или нормальная функция распределения. По теореме Хинчина [16, с. 134],

$$\sum_{k=1}^{k_n} P\{|X_{n,k}| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathcal{N}_1, \quad (3.27)$$

для любого $\varepsilon > 0$. В силу (3.20) неравенство $|a_{n,k}| < \varepsilon/2$ выполняется для всех $1 \leq k \leq m_n$ и всех достаточно больших n . Из этого неравенства, оценки

$$P\left\{|X_{n,k} - a_{n,k}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leq \frac{4 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \sigma_{n,k}^2$$

и (3.24) следует, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}_1} \sum_{k=k_n}^{m_n} P\{|X_{n,k}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{4 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \delta \sup_{n \in \mathcal{N}_1} \sigma_n.$$

С учетом (3.27) это приводит к неравенству

$$\limsup_{n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}_1} \sum_{k=1}^{m_n} P\{|X_{n,k}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{4 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \delta \sup_{n \in \mathcal{N}_1} \sigma_n. \quad (3.28)$$

Докажем, что $\sup_{n \in \mathcal{N}_1} \sigma_n < \infty$. Предположим противное. Можно считать, что $\sigma_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}_1$. Из соотношения

$$\sigma_n = \sigma_n^{-1} \sum_{k=1}^{k_n-1} \sigma_{n,k}^2 + \sigma_n^{-1} \sum_{k=k_n}^{m_n} \sigma_{n,k}^2$$

и (3.24) следует, что $\sum_{k=1}^{k_n-1} \sigma_{n,k}^2 \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}_1$. С другой стороны, по теореме 2 из [16, с. 118]

$$\sup_{n \in \mathcal{N}_1} \sum_{k=1}^{k_n-1} \sigma_{n,k}^2 < \infty.$$

Противоречие, к которому мы пришли, доказывает наше утверждение, что $\sup_{n \in \mathcal{N}_1} \sigma_n < \infty$. Возвращаясь к неравенству (3.28), мы видим, что выполняется (2.7) при $n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}_1$, так как при фиксированном $\varepsilon > 0$ число $\delta > 0$ можно выбрать произвольно малым. Выберем подпоследовательность $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}_1$ так, чтобы $\sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2$ при $n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{N}_0$. По теоремам из [16, с. 132 и 136] мы имеем

$$P\left\{\sigma^{-1} S_{m_n}^{(n)} - B_{m_n}^{(n)} < x\right\} \Rightarrow \Phi(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathcal{N}_0,$$

что, в свою очередь, гарантирует справедливость (3.4) для случайных величин $\sigma^{-1}X_{n,k}$, $1 \leq k \leq m_n$, $n \in \mathcal{N}_0$, т.е.

$$\mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^{m_n} \Delta_{n,k}^2 (\sigma^{-1} S_k^{(n)} - B_k^{(n)})^2 < x \right\} \Rightarrow G_3(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathcal{N}_0.$$

Обозначим

$$T_n = \sum_{k=1}^{m_n} \Delta_{n,k}^2 (\sigma^{-1} S_k^{(n)} - B_k^{(n)})^2 - \sigma^{-4} \sum_{k=1}^{m_n} \sigma_{n,k}^2 (S_k^{(n)} - A_k^{(n)})^2.$$

Оценим величину $|T_n|$:

$$\begin{aligned} |T_n| &= \left| \sum_{k=1}^{m_n} \Delta_{n,k}^2 \left((\sigma^{-1} S_k^{(n)} - B_k^{(n)})^2 - \sigma^{-2} (S_k^{(n)} - A_k^{(n)})^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \sigma^{-2} \sum_{k=1}^{m_n} (\Delta_{n,k}^2 - \sigma^{-2} \sigma_{n,k}^2) (S_k^{(n)} - A_k^{(n)})^2 \right| \\ &\leq \Delta_n^2 \max_{1 \leq k \leq m_n} \left| (\sigma^{-1} S_k^{(n)} - B_k^{(n)}) + \sigma^{-1} (S_k^{(n)} - A_k^{(n)}) \right| \\ &\quad \times \max_{1 \leq k \leq m_n} |B_k^{(n)} - \sigma^{-1} A_k^{(n)}| \\ &\quad + \sigma^{-2} \max_{1 \leq k \leq m_n} |S_k^{(n)} - A_k^{(n)}|^2 \sum_{k=1}^{m_n} |\Delta_{n,k}^2 - \sigma^{-2} \sigma_{n,k}^2|. \end{aligned}$$

Заметим, что $\Delta_n^2 \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}_0$. Для случайных величин $\sigma^{-1}X_{n,k}$, $1 \leq k \leq m_n$, $n \in \mathcal{N}_0$, выполняется (3.11) с $\lambda = 0$. Поэтому последовательности функций распределения случайных величин $\max_{1 \leq k \leq m_n} |\sigma^{-1} S_k^{(n)} - B_k^{(n)}|$ и $\max_{1 \leq k \leq m_n} |S_k^{(n)} - A_k^{(n)}|$, $n \in \mathcal{N}_0$, слабо компактны. Привлекая (3.17) и (3.18), мы убеждаемся, что $|T_n| \Rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}_0$, и, следовательно,

$$\mathbf{P} \left\{ \sigma^{-4} \sum_{k=1}^{m_n} \sigma_{n,k}^2 (S_k^{(n)} - A_k^{(n)})^2 < x \right\} \Rightarrow G_3(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \mathcal{N}_0.$$

Сравнение с (3.4) приводит к равенству $G_3(\sigma^{-4}x) = G_3(x)$, возможному только при $\sigma = 1$. Это завершает доказательство (3.23).

Предположим теперь, что выполнено (3.5). Отправляясь от неравенства

$$\left| \sum_{k=1}^{m_n} \gamma_k (X_{n,k} - a_{n,k}) \right| \leq \sigma_n^{-1} \sum_{k=1}^{m_n} \sigma_{n,k}^2 |S_k^{(n)} - A_k^{(n)}|$$

и следуя рассуждениям предыдущего случая (т.е. когда выполнено (3.4)), можно доказать, что (3.1) есть следствие (3.5) и (2.1).

Можно несколько сократить доказательство по сравнению с предыдущим случаем. Действительно, мы снова убедимся, что нижний предел Δ последовательности $\{\sigma_n\}_{n \geq 1}$ положителен. Далее, для данного δ , $0 < \delta < \Delta$ определим натуральное число

$$k'_n = \max \left\{ k: 1 \leq k \leq m_n, \sum_{j=k}^{m_n} \sigma_{n,j}^2 \geq \delta \right\}.$$

Обозначим $\gamma'_k = \sigma_{n,k}^2 + \dots + \sigma_{n,m_n}^2$, $1 \leq k \leq m_n$. Ясно, что будет выполняться аналог соотношения (3.24): $\sum_{j=k'_n}^{m_n} \sigma_{n,j}^2 \rightarrow \delta$. Далее можно повторить рассуждения аналогичные тем, которые привели нас от (3.4) к (3.1), заменив в этих рассуждениях k_n и γ_k на k'_n и γ'_k соответственно. При этом отпадает необходимость доказывать, что последовательность $\{\sigma_n^2\}_{n \geq 1}$ ограничена сверху. В результате мы сможем доказать, что (3.1) является следствием (3.5) и (2.1). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Требуется только доказать, что каждое из утверждений (1.1)–(1.5) влечет равенства $EX_1 = 0$ и $\text{Var} X_1 = 1$. Пусть выполнено, например, (1.3). Привлекая неравенство Коши–Буняковского, мы получим

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{n\sqrt{n}} X_k \right)^2 &= \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n S_k \right)^2 \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n S_k^2, \\ \left(\sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{n\sqrt{n}} X_{n-k+1} \right)^2 &= \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (S_n - S_{n-k}) \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (S_n - S_{n-k})^2. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{n+1}{n\sqrt{n}} S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{n\sqrt{n}} X_k + \sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{n\sqrt{n}} X_{n-k+1}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \right)^2 \leq 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n S_k^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (S_n - S_{n-k})^2 \right).$$

Случайные величины $S_1^2 + \dots + S_n^2$ и $(S_n - S_{n-1})^2 + \dots + (S_n - S_0)^2$ одинаково распределены. Поэтому из предыдущего неравенства следует, что

$$\mathbf{P}\{|S_n| \geq x\sqrt{n}\} \leq 2\mathbf{P}\left\{ \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n S_k^2 \geq \frac{(n+1)^2 x^2}{4n^2} \right\}.$$

Из этого неравенства следует, что последовательность функций распределения $\{F_n\}_{n \geq 1}$, $F_n(x) = P\{S_n < x\sqrt{n}\}$, слабо компактна. Привлекая леммы 1 и 2, мы убедимся (необходимые рассуждения по существу совпадают с рассуждениями, которые были приведены в связи с доказательством, что (3.1) является следствием, скажем, (3.2) и (2.1) в теореме 2), что в качестве предельных функций распределения для подпоследовательностей этой последовательности выступают нормальные функции распределения. Пусть некоторая подпоследовательность $\{F_n\}$, $n \in \mathcal{N}$, слабо сходится к $\Phi((x-a)/\sigma)$. В соответствии с известными теоремами [16, с. 136 и 194] должно выполняться следующее соотношение:

$$\int_{|x| < \sqrt{n}} x^2 dP\{X_1 < x\} - \left(\int_{|x| < \sqrt{n}} x dP\{X_1 < x\} \right)^2 \rightarrow \sigma^2$$

при $n \rightarrow \infty$, $n \in \mathcal{N}$, откуда следует, что $\text{Var} X_1 < \infty$. По теореме из [16, с. 194] последовательность $\{F_n\}_{n \geq 1}$ слабо сходится к $\Phi(x/\sigma)$ и $EX_1 = 0$. Записав (1.3) для случайных величин $Y_k = X_k/\sigma$, $1 \leq k \leq n$, мы придем к равенству $G_3(x) = G_3(\sigma x)$, которое возможно только при $\sigma = 1$.

Аналогичные рассуждения применимы, если выполнено (1.4). Необходимые изменения в рассуждениях сводятся к формальной замене квадратов сумм случайных величин на их модули. Доказательства в остальных случаях могут быть скопированы с соответствующих доказательств из теоремы 2. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Оно может быть скопировано с доказательства теоремы 2. Изменения в доказательстве носят формальный характер и сводятся к замене величин $\sigma_{n,k}^2(\tau)$ и сумм $S_k^{(n)} - A_k^{(n)}$ соответственно дисперсиями $\text{Var} X_{n,k}$ и суммами $S_k^{(n)}$. Заметим, что утверждения (3.10) и (3.11) для $\lambda = 0$ доказаны в [15].

В заключение автор благодарит Ю. В. Прохорова и А. Н. Ширяева за конструктивное и полезное обсуждение истории открытия принципа инвариантности и его последующего развития.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н. Eine Verallgemeinerung des Laplace-Liapounoffschen Satzes. — Изв. АН СССР, сер. физ.-мат., 1931, № 7, с. 959–962. (См. также: Колмогоров А. Н. Избранные труды. Т. 2. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986.)
2. Erdos P., Kac M. On certain limit theorems in the theory of probability. — Bull. Amer. Math. Soc., 1946, v. 52, p. 292–302.
3. Mark A. M. Some probability theorems. — Bull. Amer. Math. Soc., 1949, v. 55, p. 885–900.
4. Donsker M. D. An invariance principle for certain probability limit theorems. — Mem. Amer. Math. Soc., 1951, № 6.
5. Гизман И. И. Об одной теореме А. Н. Колмогорова. — Ученые записки Киевского ун-та, 1953, т. 12, № 6, с. 75–94.

6. Fortet R., Mourier E. Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique. — Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 1953, t. 70, fasc. 3, p. 267–285.
7. Maruyama G. Continuous Markov processes and stochastic equations. — Rend. Circ. Mat. Palermo, 1955, № 4, p. 1–43.
8. Скороход А. В. О предельном переходе от последовательности сумм независимых случайных величин к однородному случайному процессу с независимыми приращениями. — Докл. АН СССР, 1955, т. 104, № 3, с. 364–367.
9. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. I, в. 2, с. 176–238.
10. Круглов В. М. Слабая сходимость случайных ломаных к винеровскому процессу. — Теория вероятн. и ее примен., 1985, т. XXX, в. 2, с. 209–218.
11. Mises R. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und Theoretischen Physik. Vien: Deuticke, 1931.
12. Cameron R. H., Martin W. T. The Wiener measure of Hilbert neighbourhoods in the space of real continuous functions. — J. Math. and Phys., 1944, v. 23, p. 195–209.
13. Rényi A. On the theory of order statistics. — Acta Math. Hungar., 1953, t. 4, fasc. 3–4, p. 191–231.
14. Wald A. Limit distribution of the maximum and minimum of successive cumulative sums of random variables. — Bull. Amer. Math. Soc., 1946, v. 53, № 2, p. 142–153.
15. Kруглов V. M. The central limit theorem and weak convergence of maxima of sums of independent random variables. — Lect. Notes in Math., 1985, v. 1155, p. 144–179.
16. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.
17. Круглов В. М. Характеризация одного класса безгранично делимых распределений в гильбертовом пространстве. — Матем. заметки, 1974, т. 16, № 5, с. 777–782.
18. Прохоров Ю. В. Несколько замечаний к усиленному закону больших чисел. — Теория вероятн. и ее примен., 1959, т. IV, в. 2, с. 215–220.
19. Kolmogorov A. N. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. — Giorn. Inst. Ital. Attuari, 1933, v. 4, p. 83–91. (См. также Колмогоров А. Н. Избранные труды. Т. 2. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986.)
20. Doob J. L. Heuristic approach to the Kolmogorov–Smirnov theorems. — Ann. Math. Statist., 1949, v. 20, p. 393–403.
21. Donsker M. L. Justification and extention of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov–Smirnov theorems. — Ann. Math. Statist., 1952, v. 23, p. 277–281.
22. Колмогоров А. Н. Проблемы теории вероятностей (Тезисы доклада на заседании Московского математического общества 11 декабря 1944 года). — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 2, с. 211–212.
23. Монин А. С. Дороги в Комаровку. — В кн.: Колмогоров в воспоминаниях. М.: Наука, 1993.
24. Жакод Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1, 2. М.: «Физ.-мат. лит.», 1994.

Поступила в редакцию
16.VI.1995