Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Кулик, Регулярные гауссовские случайные операторы и теорема Струка–Варадана для симметрических стохастических уравнений типа Фредгольма, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 2, 262–273

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1802>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:59:14

© 1997 г.

КУЛИК А. М.*

**РЕГУЛЯРНЫЕ ГАУССОВСКИЕ
СЛУЧАЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ
И ТЕОРЕМА СТРУКА-ВАРАДАНА
ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ ТИПА ФРЕДГОЛЬМА**

Введено определение и исследованы свойства регулярных гауссовских функционалов, полученные результаты использованы для исследования свойств распределения решений уравнений с гауссовскими случайными операторами. В частности, доказан аналог теоремы Струка-Варадана для линейных стохастических интегральных уравнений типа Фредгольма.

Ключевые слова и фразы: гауссовский белый шум, регулярный случайный элемент, сильный случайный оператор, топологический носитель меры.

1. Введение. Предметом настоящей статьи являются локальные свойства гауссовских случайных операторов как функций от вероятностной переменной. Исследование таких свойств позволяет для уравнений вида

$$x = A \circ x + y, \quad (1)$$

где A — регулярно (в определяемом ниже смысле) зависящий от вероятностной переменной гауссовский случайный оператор в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве X , y есть X -значный случайный элемент, а $A \circ x$ — симметрическая суперпозиция случайного оператора A и элемента x , получить результат о носителе решения, аналогичный теореме Струка-Варадана для диффузионных процессов.

Гауссовским сильным случайным оператором (ГССО) A на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, действующим в пространстве X , называется (см. [1, гл. 1]) отображение, ставящее в соответствие каждому $x \in X$ гауссовский X -значный элемент Ax на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ таким образом, что

- 1) $\forall x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{R}: A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ (P -п.н.),
- 2) $E\|Ax_n - Ax\|^2 \rightarrow 0, x_n \rightarrow x.$

*Институт математики НАН Украины, ул. Терещенковская, 3, 252001 Киев, Украина.

Гауссовский сильный случайный оператор A называется ограниченным, если существует функция $\tilde{A}: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X)$, измеримая относительно σ -алгебры $\mathcal{M}$, задаваемой в $\mathcal{L}(X)$ семейством отображений $\{R_{x,y}: \mathcal{L}(X) \ni T \mapsto (Tx, y) \in \mathbb{R}, x, y \in X\}$, и такая, что $\forall x \in X (Ax)(\omega) = \tilde{A}(\omega)x$.

Отметим, что существуют ГССО, не являющиеся ограниченными (см. [1]).

Для произвольного ГССО равенством

$$A \circ x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) A e_k \quad (2)$$

определяется его симметрическая суперпозиция с теми X -значными случайными элементами x , для которых ряд в правой части (2) сходится по вероятности для любого ортонормированного базиса $\{e_k\}$ в X и сумма ряда не зависит от выбора базиса (см. [2]). Если ГССО A ограничен, то симметрическая суперпозиция $A \circ x$ определена для всех случайных элементов x и $(A \circ x)(\omega) = \tilde{A}(\omega)x(\omega)$ (P-п.н.).

2. Случайные элементы, регулярные относительно гауссовского белого шума. Гауссовским белым шумом (H, ξ) будем называть вещественное сепарабельное гильбертово пространство H с заданным на нем обобщенным гауссовским случайным элементом ξ с нулевым средним и единичным корреляционным оператором (см. [2]). Элемент ξ представляет собой линейное отображение, ставящее в соответствие каждому $h \in H$ гауссовскую случайную величину (h, ξ) со средним 0 и дисперсией $\|h\|_H^2$, и задает в H цилиндрическую меру μ с характеристическим функционалом $\varphi_\mu(h) = \exp(-\|h\|^2/2)$, $h \in H$, (см. [3, гл. 1, § 4]).

Пусть гауссовский белый шум (H, ξ) на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ таков, что $\mathcal{F} = \sigma(\xi)$.

О п р е д е л е н и е 1. Случайный элемент η , заданный на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, со значениями в банаховом пространстве B , измеримый относительно борелевской σ -алгебры $\mathcal{B}(B)$, регулярен относительно белого шума (H, ξ) , если существует оператор j вложения H в некоторое сепарабельное банахово пространство W такой, что jH плотно в W , норма $\|\cdot\| = \|j\cdot\|_W$ на H измерима относительно μ (см. [3]) и η п.н. совпадает с $\Phi(j\xi)$, где Φ — некоторое непрерывное отображение из W в B , а случайный элемент $j\xi$ в W задается соотношениями $(j\xi, w^*) = (j^*w^*, \xi)$, $w^* \in W^*$.

П р и м е р ы. 1. $H = \mathbb{R}^n$, ξ — гауссовский n -мерный вектор. Каждый случайный элемент η со значениями в B имеет вид $\eta = \Phi(\xi)$, Φ — измеримое отображение из $\mathbb{R}^n$ в B . Если W — образ $\mathbb{R}^n$ при плотном вложении j , то $W \cong \mathbb{R}^n$ и j можно отождествить с элементом $GL(n, \mathbb{R})$. Поэтому элемент η регулярен относительно белого шума (H, ξ) тогда и только тогда, когда $\eta = \Phi(\xi)$, $\Phi \in C(\mathbb{R}^n, B)$.

2. Пусть $\eta = (h_0, \xi)$ для некоторого $h_0 \in H$. Зафиксируем в H ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ так, чтобы $e_1 = h_0$ и выберем $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \in l_2$, $\lambda_k \neq 0$. Обозначим через H_- пополнение пространства H относительно нормы $\|\cdot\|_-$,

$$\forall h \in H \quad \|h\|_-^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (h, e_k)^2.$$

Каноническое отображение вложения H в H_- — оператор Гильберта-Шмидта, поэтому (см. [3]) норма $\|\cdot\|_-$ измерима, $\eta = \lambda_1^{-1}(jh_0, j\xi)_-$ и η регулярен относительно (H, ξ) . Этот результат можно сформулировать следующим образом: всякий измеримый линейный функционал (см. [4, гл. II, §3]) на сепарабельном банаховом пространстве W с гауссовской мерой μ регулярен относительно белого шума, задаваемого мерой μ на ее пространстве Камерона-Мартина.

3. Пусть η_1, η_2 — регулярные относительно белого шума (H, ξ) случайные элементы со значениями в пространствах B_1 и B_2 соответственно. Тогда случайный элемент $\eta = \eta_1 \times \eta_2$ со значениями в пространстве $B = B_1 \times B_2$ регулярен относительно (H, ξ) . Действительно, существуют j_i , $i = 1, 2$, удовлетворяющие условиям определения 1, и $\Phi_i \in C(W_i, B_i)$ такие, что $\eta_i = \Phi_i(j_i \xi)$ п.н. Существуют (см. [3]) такие банаховы пространства $\tilde{W}_i$ с компактными вложениями $k_i: \tilde{W}_i \rightarrow W_i$, $i = 1, 2$, и вложениями $\tilde{j}_i$, задающими на H измеримые нормы, такие, что $j_i = k_i \tilde{j}_i$, $i = 1, 2$. Зададим на H отображение со значениями в B : $\Phi(h) = (\Phi_1(k_1 \tilde{j}_1 h), \Phi_2(k_2 \tilde{j}_2 h))$; Φ непрерывно относительно нормы $\|\cdot\| = \|\tilde{j}_1 \cdot\|_{\tilde{W}_1} \vee \|\tilde{j}_2 \cdot\|_{\tilde{W}_2}$ равномерно на ограниченных (по той же норме) подмножествах H . Следовательно, Φ можно продолжить до непрерывной функции на пополнении $\tilde{W}$ относительно измеримой нормы $\|\cdot\|$, и $\eta = \Phi(j\xi)$ п.н., где каноническое вложение j пространства H в W удовлетворяет условиям определения 1.

4. Пусть $H = \mathbf{R}$, ξ — случайная величина, $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $\mathcal{F} = \sigma(\xi)$. Можно проверить существование такой функции $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, что 1) φ строго убывает и непрерывна на $\mathbf{R}^+$ и $\mathbf{R}^-$; 2) $\varphi(\pm\infty) = \pm\infty$, $\varphi(-\infty) = \varphi(+\infty) = 0$; 3) случайная величина $\eta = \varphi(\xi)$ имеет стандартное нормальное распределение. Тогда $\mathcal{F} = \sigma(\eta)$, и случайная величина η , регулярная относительно белого шума $(\mathbf{R}, \eta)$, не является регулярной относительно белого шума $(\mathbf{R}, \xi)$. Таким образом, определение 1 не инвариантно относительно замены белого шума (H, ξ) другим гауссовским белым шумом, порождающим σ -алгебру $\mathcal{F}$.

О п р е д е л е н и е 2. Белые шумы (H, ξ) и (H_1, ξ_1) эквивалентны, если существует такой изоморфизм F гильбертовых пространств H и H_1 , что $\forall h \in H$ $(h, \xi) = (Fh, \xi_1)$ п.н.

Определение 1 инвариантно относительно замены белого шума эквивалентным ему: если элемент η регулярен относительно (H, ξ) , $\eta = \Phi(j\xi)$

п.н. и (H_1, ξ_1) — гауссовский белый шум, эквивалентный (H, ξ) , то η п.н. равен $\Phi(j_1 \xi_1)$, где $j_1 = jF^{-1}$ задает в H_1 измеримую норму, т.е. η регулярен относительно (H_1, ξ_1) .

3. Регулярность гауссовских случайных элементов и операторов относительно совместно с ними гауссовских белых шумов. Пусть ГССО A задан на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, для которого $\mathcal{F} = \sigma(\xi)$, где (H, ξ) — некоторый совместно с A гауссовский белый шум. В этом случае A раскладывается в интеграл по белому шуму (H, ξ) ,

$$\forall x \in X \quad Ax = \alpha(x) + \beta(x, \xi), \quad (3)$$

$\alpha = EA \in \mathcal{L}(X)$, $\beta \in \mathcal{L}(X \times H, X)$ (см. [2, п. 2.3]), что позволяет исследование ГССО A свести к исследованию неслучайных оператора α и формы β . Следующая лемма показывает, что условие, наложенное нами на вероятностное пространство, не является ограничительным.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{F} = \sigma(A)$, тогда существует совместно с A гауссовский белый шум (H_A, ξ_A) такой, что $\mathcal{F} = \sigma(\xi_A)$. Если (H, ξ) — другой совместно с A гауссовский белый шум с $\sigma(\xi) = \mathcal{F}$, то шумы (H, ξ) и (H_A, ξ_A) эквивалентны.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $EA = 0$. Обозначим через L_0 алгебраическое тензорное произведение $X^{\otimes 2}$ и зададим на L_0 неотрицательно определенную симметрическую билинейную форму $(\cdot, \cdot)_A$: $(x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2) = E(Ax_1, y_1)(Ax_2, y_2)$. В L_0 полунормой $\|\cdot\|_A$, ассоциированной с формой $(\cdot, \cdot)_A$, задано соотношение эквивалентности $\sim_A$: $l_1 \sim_A l_2 \iff \|l_1 - l_2\|_A = 0$, и пространство $\tilde{L}_A = L_0 / \sim_A$ является предгильбертовым относительно нормы $\|\cdot\|_A$. Обозначим через H_A пополнение $\tilde{L}_A$ относительно $\|\cdot\|_A$; H_A сепарабельно в силу сепарабельности X и непрерывности ГССО A в среднем квадратическом. Положим $(x \otimes y, \xi_A) = (Ax, y)$ для $x \otimes y \in H_A$ и $(h, \xi_A) = L_2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (h_n, \xi_A)$, для $h \in H_A$, где $\{h_n\}$ — произвольная последовательность элементов $\tilde{L}_A$, сходящаяся к h по норме $\|\cdot\|_A$. Пара (H_A, ξ_A) — искомый белый шум. Пусть (H, ξ) — другой совместно с A гауссовский белый шум, A разлагается в интеграл по ξ : $Ax = \beta(x, \xi)$, $x \in X$. Отображение $F: H_A \rightarrow H$ зададим на элементах из $\tilde{L}_A$ вида $x \otimes y$ следующим образом: $F(x \otimes y) = (\beta(x, \cdot), y) \in H^* = H$, продолжим его по линейности на $\tilde{L}_A$; поскольку $\|F(l)\|_H = \|l\|_A$ для любого $l \in \tilde{L}_A$, отображение F может быть продолжено до изоморфизма H_A с некоторым замкнутым подпространством пространства H . Это подпространство совпадает со всем H , поскольку в противном случае существовал бы ненулевой элемент $h_0 \in H$ такой, что гауссовская случайная величина (h_0, ξ) была бы ортогональной в $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ всем величинам (Ax, y) , $x, y \in X$, и, следовательно, не зависела бы от σ -алгебры $\sigma(A) = \mathcal{F}$, что невозможно, так как она невырождена.

Наконец, $\forall h \in H_A$ $(h, \xi_A) = (Fh, \xi)$, поскольку это равенство выпол-

няется для всех h из тотального в H_A множества элементов вида $x \otimes y$, $x, y \in X$: $(x \otimes y, \xi_A) = (F(x \otimes y), \xi) = (Ax, y)$. Лемма доказана.

Пример 5. Пусть $\{W(s), s \in [0, 1]\}$ — винеровский процесс на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с $\mathcal{F} = \sigma(W)$ и ГССО A в $L_2([0, 1])$ — оператор стохастического интегрирования, $A: f(\cdot) \mapsto \int_0^\bullet f(s) dW(s)$. σ -алгебра, порождаемая A , совпадает с $\mathcal{F}$, и на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задан совместно с A гауссовский белый шум $(L_2([0, 1]), \xi)$, порождающий σ -алгебру $\mathcal{F}$: $\forall f \in L_2([0, 1]) (f, \xi) = \int_0^1 f(s) dW(s)$. Коэффициенты разложения оператора A по ξ имеют вид

$$\alpha = 0, \quad \beta(f, h)(\cdot) = \int_0^\bullet f(s) h(s) ds \quad \forall f, h \in L_2([0, 1]).$$

Форма $(\cdot, \cdot)_A$ на элементах вида $f \otimes g$, $f, g \in L_2([0, 1])$, равна

$$\begin{aligned} (f_1 \otimes g_1, f_2 \otimes g_2)_A &= E \left(\int_0^1 \left(\int_0^t f_1(s) dW(s) \right) g_1(t) dt \right) \\ &\quad \times \left(\int_0^1 \left(\int_0^t f_2(s) dW(s) \right) g_2(t) dt \right) \\ &= \int_0^1 \left(f_1(t) \int_t^1 g_1(s) ds \right) \left(f_2(t) \int_t^1 g_2(s) ds \right) dt, \end{aligned}$$

и эквивалентность белых шумов (H_A, ξ_A) и $(L_2([0, 1]), \xi)$ задается изоморфизмом $F: H_A \rightarrow L_2([0, 1])$, при котором образ элемента H_A вида $f \otimes g$, $f, g \in L_2([0, 1])$, есть $f(\cdot) \int_\bullet^1 g(s) ds$.

З а м е ч а н и е. Для гауссовских случайных элементов справедливо утверждение, аналогичное утверждению леммы 1 для ГССО. А именно, если η — гауссовский случайный элемент в сепарабельном банаховом пространстве W и H — его пространство Камерона–Мартин с каноническим оператором вложения в W j , то на H задан обобщенный гауссовский случайный элемент ξ $((j^* w^*, \xi) = \langle \eta, w^* \rangle$ на элементах из $j^* W^*$) и белый шум (H, ξ) является с точностью до эквивалентности единственным совместно с η гауссовским белым шумом, порождающим $\sigma(\eta)$.

Лемма 2. Пусть η — гауссовский случайный элемент в сепарабельном банаховом пространстве W . Тогда η регулярен относительно произвольного совместно с ним гауссовского белого шума.

Доказательство. Пусть H — пространство Камерона–Мартин случайного элемента h , j — каноническое вложение H в W . Легко проверить, что j задает в H измеримую норму и $\eta = j\xi$ п.н., где ξ — обобщенный гауссовский случайный элемент, задаваемый в H элементом η , т.е. η регулярен относительно белого шума (H, ξ) . Утверждение леммы следует теперь из предыдущего замечания и инвариантности определения 1 относительно выбора эквивалентных белых шумов. Лемма доказана.

О п р е д е л е н и е 3. Будем называть ГССО A регулярным относительно белого шума (H, ξ) , если существует такое отображение $\hat{A}: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X)$, измеримое относительно борелевской σ -алгебры в $\mathcal{L}(X)$, что $\forall x \in X \hat{A}(\omega)x = (Ax)(\omega)$ (Р-п.н.) и случайный элемент $\hat{A}$ со значениями в пространстве $\mathcal{L}(X)$ регулярен относительно (H, ξ) .

Отметим, что ГССО A , регулярный относительно некоторого белого шума, является ограниченным.

Лемма 3. *Ограниченный ГССО A регулярен относительно какого-либо совместно с ним гауссовского белого шума в том и только том случае, когда соответствующий ему случайный элемент $\hat{A}$ со значениями в пространстве $\mathcal{L}(X)$ сепарабельнозначен, т.е. существует такое замкнутое сепарабельное подпространство S пространства $\mathcal{L}(X)$, что $\hat{A} \in S$ п.н.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что так как σ -алгебра $\mathcal{M}$ содержит все открытые шары в $\mathcal{L}(X)$, каждое сепарабельное замкнутое множество $Q \subset \mathcal{L}(X)$ в силу представления $Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i \in I} B(q_i, 1/n)$, где $\{q_i, i \in I\}$ — счетное всюду в Q плотное подмножество, содержится в σ -алгебре $\mathcal{M}$. Пусть $P\{\hat{A} \in S\} = 1$ для некоторого сепарабельного замкнутого подпространства S пространства $\mathcal{L}(X)$; рассмотрим S -значный случайный элемент $\check{A}(\omega) = \hat{A}(\omega)\mathbb{I}_{\{\hat{A} \in S\}}$ и покажем, что $\check{A}$ — гауссовский, т.е. что для любого $s^* \in S^*$ случайная величина $\langle \check{A}, s^* \rangle$ — гауссовская. По построению элемента $\hat{A}$ это справедливо для s^* , лежащих в линейной оболочке R^* семейства линейных функционалов на S вида $R_{x,y}: S \ni T \mapsto (Tx, y)$, $x, y \in X$. Множество R^* плотно в S^* относительно $*$ -слабой топологии, поскольку иначе по теореме об отделимости (см. [5, гл. II, § 3]) существовал бы ненулевой элемент $s \in S$ такой, что $\langle s, R_{x,y} \rangle = 0$ ($\forall x, y \in X$), что невозможно. Тогда, поскольку $*$ -слабая топология на ограниченных подмножествах сопряженного к сепарабельному пространству метризуема (см. [6, гл. 3]), в силу теоремы Банаха–Штейнгауза существует последовательность $\{r_n^*, n \geq 1\} \subset R^*$, $*$ -слабо сходящаяся к s^* , и случайная величина $\langle \check{A}, s^* \rangle$ — гауссовская как поточечный предел гауссовских величин $\langle \check{A}, r_n^* \rangle$. Положив $\hat{A} = q\check{A}$, где $q: S \rightarrow \mathcal{L}(X)$ — канонический оператор вложения, и применяя к $\check{A}$ лемму 2, получим, что оператор A регулярен относительно произвольного совместно с ним гауссовского белого шума.

Обратное утверждение следует из того факта, что непрерывный образ сепарабельного множества сепарабелен. Лемма доказана.

Следующий пример показывает, что существуют ограниченные гауссовские операторы, не удовлетворяющие условиям леммы 3, т.е. в отличие от случая гауссовских элементов, ограниченный ГССО может не быть регулярным относительно ассоциированного с ним белого шума.

П р и м е р 6. Определим в пространстве $X = l_2$ ГССО A форму-

лой

$$Ax = \left(x_k \xi_k [\ln(k+1)]^{-1/2} \right)_{k=1}^{\infty} \quad (\forall x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2),$$

где $\{\xi_k\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Поскольку $\limsup_{k \rightarrow \infty} |\xi_k| [\ln(k+1)]^{-1/2} = \sqrt{2}$ п.н., то $\sup_k |\xi_k| [\ln(k+1)]^{-1/2} < +\infty$ п.н. и оператор A ограничен (см. [1]). С другой стороны, оператор A не может быть сепарабельнозначным, так как тогда последовательность операторов $A_n = \sum_{k=1}^n \xi_k [\ln(k+1)]^{-1/2} P_k = E[\tilde{A} | \xi_1, \dots, \xi_n]$ ($P_k \in \mathcal{L}(l_2)$ — проектор на k -й координатный вектор) сходилась бы по норме (см. [7, гл. II, § 4]) к $E[\tilde{A} | \xi_1, \xi_2, \dots] = \tilde{A}$ п.н., что невозможно, так как $\limsup_{k \rightarrow \infty} |\xi_k| [\ln(k+1)]^{-1/2} = \sqrt{2} > 0$ п.н.

З а м е ч а н и е. Для произвольного ГССО A равенство (3) можно переписать следующим образом: выберем в H ортонормированный базис $\{h_k\}$ и положим $\xi_k = (h_k, \xi)$, $B_k \in \mathcal{L}(X)$: $B_k x = \beta(x, h_k)$ ($\forall x \in X$). Тогда $\{\xi_k\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\xi_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, и (3) имеет вид

$$Ax = EAx + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k B_k x, \quad (4)$$

где ряд сходится п.н. для каждого $x \in X$. Представление (4) называется спектральным разложением ГССО A (см. [8, теорема 2.9]); отметим, что разложение (4) не единственно и определяется выбором базиса $\{h_k\}$. Аналогично предыдущему примеру можно получить следующий критерий регулярности ГССО A в терминах его спектрального разложения: ограниченный ГССО A сепарабельнозначен в том и только том случае, когда для некоторого (или, что эквивалентно, для каждого) разложения (4) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k B_k \quad (5)$$

сходится по норме с вероятностью 1.

Отметим, что ГССО A является ограниченным, в том и только том случае, когда для некоторого (или каждого) разложения (4) ряд (5) сходится сильно в $\mathcal{L}(X)$ с вероятностью 1. Действительно, если A ограничен, то с вероятностью 1 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k B_k x$ сходится к $\tilde{A}x$ для всех x из X_0 — некоторого счетного всюду в X плотного подмножества, и для доказательства сильной сходимости (5) достаточно проверить, что последовательность норм операторов $A_n = \sum_{k=1}^n \xi_k B_k$ ограничена с вероятностью 1, для чего, в свою очередь, достаточно (см. [9, гл. 3, § 3.1]) проверить, что последовательность $\{\|A_n\|\}$ ограничена в L_1 . Аналогично доказательству теоремы Ферника из [3, гл. III, § 3] можно показать, что случайная величина $\|\tilde{A}\|^2$ имеет экспоненциальный момент; поэтому

$(\forall n \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{x, y \in X'_0} \frac{|(A_n x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|} &= \mathbf{E} \sup_{x, y \in X'_0} \frac{|\mathbf{E}\{(Ax, y) \mid \xi_1, \dots, \xi_n\}|}{\|x\| \cdot \|y\|} \\ &\leq \mathbf{E} \left(\mathbf{E} \left\{ \sup_{x, y \in X'_0} \frac{|(Ax, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|} \mid \xi_1, \dots, \xi_n \right\} \right) \leq \mathbf{E} \|\tilde{A}\| \end{aligned}$$

для любого конечного подмножества $X'_0 \subset X_0$ и $\mathbf{E}\|A_n\| \leq \mathbf{E}\|\tilde{A}\| < +\infty$, что и требовалось.

Вопрос о сходимости ряда (5) представляет интерес в связи с тем, например, что в работе [8] для доказательства результата (теорема 3.5) о том, что ГССО, корреляционный оператор которого мажорируется корреляционным оператором ограниченного ГССО, является ограниченным, было использовано утверждение (как показывает пример 6, наверное) о том, что для произвольного ограниченного ГССО ряд (5) сходится по норме п.н. Приведенный результат, однако, остается справедливым и может быть доказан на основании утверждения о сильной сходимости п.н. ряда (5) посредством несколько модифицированных рассуждений теоремы 3.5 из [8].

4. Теорема Струка-Варадана для симметрических стохастических уравнений типа Фредгольма. Пусть ГССО A ограничен и п.н. является компактным, тогда, в силу сепарабельности пространства $\mathcal{K}(X)$ компактных операторов в X , ГССО A по лемме 3 регулярен относительно произвольного совместно с ним гауссовского белого шума.

Лемма 4. Пусть ограниченный ГССО A является компактным п.н. и оператор $E_X - EA$ обратим в $\mathcal{L}(X)$. Тогда с вероятностью 1 оператор $E_X - A$ имеет ограниченный обратный.

Доказательство. Поскольку $E_X - A = (E_X - EA)(E_X - (E_X - EA)^{-1}(A - EA))$, можно без ограничения общности считать, что $EA = 0$. Отметим, что

$$\{T \in \mathcal{L}(X): T \text{ обратим}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{x \in X_0} \left\{ \|Tx\| \geq \frac{\|x\|}{n}, \|T^*x\| \geq \frac{\|x\|}{n} \right\} \in \mathcal{M}.$$

Рассмотрим спектральное разложение оператора A : $A = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k B_k$. Ряд, в силу замечания к примеру 6, сходится по норме п.н. Тогда с вероятностью 1 найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что оператор $E_X - \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k B_k$ обратим, и множество $\{E_X - A \text{ необратим}\}$ с точностью до множества нулевой вероятности совпадает с объединением множеств $\mathcal{A}_n = \{E_X - \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k B_k \text{ обратим}, E_X - \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k B_k \text{ необратим}\}$. Покажем, что $P(\mathcal{A}_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Для любого обратимого оператора $L \in \mathcal{L}(X)$, компактного оператора K и невырожденной гауссовской случайной величины ξ оператор $L + \xi K = L(E_X + \xi L^{-1}K)$ имеет с вероятностью 1 ограниченный обратный, поскольку компактный оператор $L^{-1}K$ имеет не

более чем счетный спектр. Легко проверить, что операторы $\{B_k, k \geq 1\}$ компактны, и в силу независимости гауссовских величин $\|\xi_k\|$

$$\begin{aligned} P(\mathcal{A}_n) &= P\left(\{\xi_k\}: E_X - \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k B_k \text{ обратим, } E_X - \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k B_k \text{ необратим}\right) \\ &= \int P\left(E_X - \sum_{k=1}^{\infty} t_k B_{k+n} - \xi_n B_n \text{ необратим}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \mu(dt_k) = 0, \\ &\quad \left\{(t_1, t_2, \dots): E_X - \sum_{k=1}^{\infty} t_k B_{k+n} \text{ обратим}\right\}, \end{aligned}$$

здесь μ — стандартная гауссовская мера на $\mathbf{R}$. Лемма доказана.

Следствие. Для ГССО A , удовлетворяющего условиям леммы 4, решение уравнения (1) существует и единственно для любого X -значного элемента y . Это решение имеет вид $x = (E_X - A)^{-1}y$ п.н.

Результаты п. 3 позволяют получить результат о носителе этого решения, аналогичный теореме Струка-Варадана. Пусть (H, ξ) — совместно с A гауссовский белый шум и коэффициенты разложения A по нему равны $\alpha \in \mathcal{L}(X)$ и $\beta \in \mathcal{L}(X \times H, X)$. Будем обозначать через $\tilde{\beta} \in \mathcal{L}(H, \mathcal{L}(X))$ оператор $\tilde{\beta}(h)x = \beta(x, h)$, $x \in X$, $h \in H$.

Теорема 1. Пусть ГССО A компактен с вероятностью 1, оператор $E_X - \alpha$ обратим в $\mathcal{L}(X)$ и $y \in X$. Тогда носитель распределения в X решения уравнения (1) совпадает с замыканием множества $\{x \in X \mid x = y + \alpha(x) + \beta(x, h), h \in H^0\}$, где $H^0 = \{h \in H: \text{оператор } E_X - \alpha - \tilde{\beta}(h) \text{ обратим}\}$.

Доказательство. Поскольку оператор A регулярен относительно белого шума (H, ξ) , существует некоторое вложение j пространства H в сепарабельное банахово пространство W , задающее на H измеримую норму, и $\Phi \in C(W, \mathcal{L}(X))$, $\hat{A} = \Phi(j\xi)$ п.н. Покажем, что $(\forall h \in H) \Phi(jh) = \alpha + \tilde{\beta}(h)$. Для любых $x, y \in X$ случайная величина $(Ax, y) = (\beta(x, \xi), y)_X$ является, с одной стороны, непрерывным, а с другой стороны, линейным измеримым функционалом на W , следовательно, элемент $\beta_{x,y} \in H: (\beta_{x,y}, h)_H = (\beta(x, h), y)_X$, лежит в j^*W^* . Покажем, что отображение $(x, y) \mapsto (j^*)^{-1}\beta_{x,y}$ задает непрерывное отображение из W в $\mathcal{L}(X)$. Зафиксируем $x \in X$ и покажем, что отображение $\varphi_x: y \mapsto (j^*)^{-1}\beta_{x,y}$ лежит в $\mathcal{L}(X, W^*)$. Для этого достаточно показать замкнутость отображения φ_x : если $(j^*)^{-1}\beta_{x,y_n} \rightarrow w^*$ при $y_n \rightarrow 0$, то $j^*w^* = \lim_n \beta_{x,y_n} = 0$ и $w^* = 0$, так как $\text{Ker } j^* = \{0\}$. Таким образом, $(\forall x \in X) \varphi_x \in \mathcal{L}(X, W^*)$. Аналогично показываем, что линейное отображение $x \mapsto \varphi_x$ из X в $\mathcal{L}(X, W^*)$ замкнуто и непрерывно, и, следовательно, для некоторого $C > 0$

$$\forall x, y \in X, w \in W \quad |(w, (j^*)^{-1}\beta_{x,y})| \leq C \|x\|_X \|y\|_X \|w\|_W$$

и форма β имеет вид $\beta(x, h) = \beta_1(x, jh)$, где β_1 — непрерывное билинейное отображение из $X \times W$ в X , $(\beta_1(x, w), y)_X = (w, (j^*)^{-1}\beta_{x,y})$. Тогда с вероятностью 1 $Ax = \alpha(x) + \beta_1(x, j\xi)$ и $(\forall x \in X, w \in W)$ $\Phi(w)x = \alpha(x) + \beta_1(x, w)$, откуда и следует требуемое равенство. Обозначим через μ меру $P(j\xi)^{-1}$ на W , $\text{supp } \mu = W$. В силу непрерывности Φ множество $U = \{w \in W \mid E_X - \Phi(w) \text{ обратим}\}$ открыто в W , и по лемме 4, $\mu(U) = 1$. Будем рассматривать множество U как сепарабельное метрическое пространство с метрикой ρ , индуцированной нормой пространства W . Борелевская σ -алгебра S на (U, ρ) совпадает с $\beta(W) \cap U$ и на (U, S) можно задать вероятностную меру $\tilde{\mu}$: $(\forall C \in S) \tilde{\mu}(C) = \mu(C)$. Тогда мера на X , соответствующая решению $x = (E_X - A)^{-1}y$ уравнения (1), может быть получена как образ меры $\tilde{\mu}$ при непрерывном отображении $\Psi: U \rightarrow X$, $\Psi(u) = (E_X - \Phi(u))^{-1}y$, $u \in U$. Поскольку U — сепарабельное метрическое пространство, для носителя меры $\tilde{\mu}\Psi^{-1}$ справедлива формула $\text{supp } \tilde{\mu}\Psi^{-1} = \overline{\Psi(\text{supp } \tilde{\mu})}$, и, поскольку множество jH^0 плотно в $\text{supp } \tilde{\mu} = U$, носитель распределения в X решения уравнения (1) совпадает с замыканием множества $\{x = (E_X - \Phi(jh))^{-1}y, h \in H^0\} = \{x = (E_X - \alpha - \tilde{\beta}(h))^{-1}y, h \in H^0\}$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если y — регулярный относительно белого шума (H, ξ) X -значный случайный элемент, $y = Y(j\xi)$ п.н. для некоторых $j \in \mathcal{L}(H, W)$, $Y \in C(W, X)$, то, используя утверждение примера 3, можно аналогично доказать, что носитель решения уравнения (1) равен замыканию в X множества $\{x \in X \mid x = (Y \circ j)(h) + \alpha(x) + \beta(x, h), h \in H^0\}$.

Приведем пример ГССО A , не являющегося ограниченным, для которого, тем не менее, результаты п. 3 позволяют получить утверждение о носителе решения (1), аналогичное теореме 1.

Пусть $W = \{W(s), s \in [0, 1]\}$ — винеровский процесс на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{F} = \sigma(W)$ и ГССО A действует в $L_2([0, 1])$ по формуле

$$(Af)(t) = \int_0^1 L(t, s) f(s) dW(s), \quad t \in [0, 1].$$

Будем считать, что ядро $L(t, s)$, $0 \leq s, t \leq 1$, таково, что для соответствующего интегрального оператора имеет место представление

$$\int_0^1 L(t, s) f(s) ds = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k(t) \int_0^1 d_k(s) f(s) ds, \quad (6)$$

где $\{f_k\}, \{g_k\}$ — такие ортонормированные базисы в $L_2([0, 1])$, что $\|f_k\|_{L_4} \leq C$, $\|g_k\|_{L_4} \leq C$ для некоторого $C < +\infty$ и $\{\lambda_k\}$ — последовательность неотрицательных чисел с $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < +\infty$. Мы используем результат работы [10], сводящий решение уравнения

$$x(t) = g(t) + \int_0^1 L(t, s) x(s) \circ dW(s), \quad g \in L_2([0, 1]), \quad (7)$$

эквивалентного уравнению (1) для ГССО A , к решению уравнения в $l_2(\mathbf{N})$ со случайной матрицей Гильберта–Шмидта, что позволит применить теорему 1.

Теорема 2. Пусть ядро L удовлетворяет условию (6) и $g \in L_4([0, 1])$. Тогда уравнение (7) имеет единственное решение и носитель этого решения совпадает с замыканием в $L_2([0, 1])$ множества

$$\left\{ x \in L_2([0, 1]) \mid x(t) = g(t) + \int_0^1 L(t, s) x(s) h(s) ds, \quad t \in [0, 1], \quad h \in H^0 \right\},$$

где $H^0 = \{h \in L_2([0, 1]) \mid \text{оператор } R_h: f(\cdot) \mapsto f(\cdot) - \int_0^1 L(\cdot, s) f(s) h(s) ds \text{ обратим}\}$.

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned} \alpha_{ki} &= \sqrt{\lambda_k \lambda_i} \int_0^1 f_i(s) g_k(s) dW(s), & k, i &= \overline{1, +\infty}, \\ \gamma_k &= \sqrt{\lambda_k} \int_0^1 g(s) g_k(s) dW(s), & k &= \overline{1, +\infty}. \end{aligned}$$

Как показано в [10], уравнение (7) имеет единственное решение на множестве $\Omega_0 \subset \Omega$, на котором спектр матрицы $\{\alpha_{ki}\}_{k,i=1}^\infty$ не содержит единицы, и это решение имеет вид

$$x = g + \sum_{k=1}^\infty \sqrt{\lambda_k} f_k \xi_k, \quad (8)$$

где $\{\xi_k\} \in l_2$ удовлетворяет уравнению

$$\xi_k = \gamma_k + \sum_{i=1}^\infty \alpha_{ki} \xi_i, \quad k = \overline{1, +\infty}. \quad (9)$$

Поскольку

$$\sum_{k,i=1}^\infty \mathbf{E} \alpha_{ki}^2 = \sum_{k,i=1}^\infty \lambda_k \lambda_i \int_0^1 f_i^2(s) g_k^2(s) ds \leq C^4 \left(\sum_{k=1}^\infty \lambda_k \right)^2 < +\infty,$$

из утверждения леммы 4 следует, что решение (7) существует, единственно и имеет вид (8).

Матрица $\alpha = \{\alpha_{ki}\}_{k,i=1}^\infty$ является совместно гауссовской с белым шумом $(L_2([0, 1]), \xi)$, $(f, \xi) = \int_0^1 f(s) dW(s)$, $f \in L_2([0, 1])$, и может быть разложена в интеграл по этому белому шуму $\alpha = \beta(\xi)$, где $\beta_{ki}(h) = \sqrt{\lambda_k \lambda_i} \int_0^1 f_i(s) g_k(s) h(s) ds$, $h \in L_2([0, 1])$, $k, i = \overline{1, +\infty}$.

Учитывая, что по лемме 3 вектор $\gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ регулярен относительно белого шума $(L_2([0, 1]), \xi)$, из замечания к теореме 1 получаем,

что носитель в $l_2(\mathbf{N})$ решения уравнения (9) равен замыканию множества

$$\left\{ \{ \xi_k \} \mid \xi_k = \sqrt{\lambda_k} \int_0^1 g(s) g_k(s) h(s) ds + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k \lambda_i} \left(\int_0^1 f_i(s) g_k(s) h(s) ds \right) \xi_i, k = \overline{1, +\infty}, h \in H^1 \right\},$$

где $H^1 = \{h \in L_2([0, 1]) \mid 1 \notin \sigma(\beta(h))\}$. Тогда из (8), учитывая, что $L(t, s) = \sum_k \lambda_k f_k(t) g_k(s)$, получаем, что носитель в $L_2([0, 1])$ решения уравнения (7) совпадает с замыканием множества $\{x \in L_2([0, 1]) \mid x(t) = g(t) + \int_0^1 L(t, s) x(s) h(s) ds, t \in [0, 1], h \in H^1\}$. В силу соотношения (8), связывающего уравнения для операторов R_h и $E_{l_2} - \beta(h)$, $\text{Ker } R_n \neq \{0\} \iff \text{Ker}(E_{l_2} - \beta(h)) \neq \{0\}$, т.е. $H^1 = H^0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скорород А. В.* Случайные линейные операторы. Киев: Наукова думка, 1979, 200 с.
2. *Дороговцев А. А.* Стохастический анализ и случайные отображения. Киев: Наукова думка, 1992, 120 с.
3. *Го Х.-С.* Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979, 176 с.
4. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1982, 384 с.
5. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971, 360 с.
6. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975, 444 с.
7. *Ватания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985, 368 с.
8. *Dang Hung Thang.* Gaussian random operators in Banach spaces. — Acta Math. Vietnam., 1988, v. 13, № 1, p. 79–98.
9. *Булдыгин В. В.* Сходимость случайных элементов в топологических пространствах. Киев: Наукова думка, 1980, 240 с.
10. *Мацкявичус В.* Симметрические стохастические интегральные уравнения типа Фредгольма. — Литов. матем. сб., 1984, т. 24, в. 1, с. 121–129.

Поступила в редакцию
7.IV.1995