Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Новак, О распределении максимума частичных сумм
Эрдеша–Реньи, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42,
выпуск 2, 274–293

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1803>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 15:19:10

© 1997 г.

НОВАК С. Ю.*

**О РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМУМА
ЧАСТИЧНЫХ СУММ ЭРДЕША-РЕНЬИ**

В работе изучается распределение максимума частичных сумм (МЧС) Эрдеша-Реньи. Найден предельный закон. В частном случае, когда МЧС построен по последовательности Бернулли $B(\frac{1}{2})$, оценена скорость сходимости к предельному закону.

Ключевые слова и фразы: закон Эрдеша-Реньи, предельные теоремы.

1. Введение

В работе изучается распределение максимума частичных сумм (МЧС) Эрдеша-Реньи

$$R_n(k) = \max_{0 \leq i \leq n-k} (X_{i+1} + \dots + X_{i+k}),$$

где $X, X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

Асимптотика распределения статистики $R_n(k)$ в ситуациях, когда $k \equiv k(n)$ удовлетворяет соотношениям

$$k(n) \rightarrow \infty, \quad k(n) = o(n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.1)$$

активно исследуется на протяжении последних двадцати пяти лет (см. [1]–[9], [28], [29]). Для $R_n(k)$ при определенных видах зависимости k от n доказан аналог усиленного закона больших чисел (УЗБЧ) [1], получены утверждения типа закона повторного логарифма (ЗПЛ) [2]–[9], найден предельный закон [10].

Особый интерес исследователей (см. [1]–[4], [28]) привлекала ситуация, когда $k(n) = [c \ln n]$ (здесь и ниже $[x]$ — целая часть числа x). Аналог ЗПЛ для $R_n([c \ln n])$ установлен в [28], [3]. В то же время, насколько известно автору, предельное распределение статистики $R_n([c \ln n])$ не найдено даже в ситуации, когда МЧС построен по последовательности случайных величин с распределением Бернулли $B(\frac{1}{2})$.

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия.

В настоящей работе найдено решение указанной задачи. Предложен простой способ получения оценок скорости сходимости в предельной теореме для $R_n(k)$. Показано, что задача изучения асимптотики распределения $R_n(k)$ в известном смысле сводится к задаче о вероятностях больших отклонений $R_{2k}(k)$. Предельное распределение МЧС найдено в ситуации, когда $k \gg \ln n$ и с.в. X имеет конечный экспоненциальный момент. Новый результат типа ЗПЛ доказан для «непрерывного» аналога МЧС, заданного на винеровском процессе.

Пусть

$$\zeta_m \equiv \zeta_m(k) = X_{m+1} + \dots + X_{m+k} \quad (k \geq 1), \quad \zeta \stackrel{d}{=} \zeta_0.$$

Положим

$$R_n^* \equiv R_n^*(k) = \max_{0 \leq i \leq n} \zeta_i, \quad R_n \equiv R_n(k) = R_{n-k}^*(k). \quad (1.2)$$

Максимум частичных сумм R_n был введен Эрдешем и Реньи [1], установившими для последовательности $\{R_n\}$ аналог усиленного закона больших чисел в случае, когда $k(n) = [c \ln n]$, $c > 1/\Lambda_+$: с вероятностью единица

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{k(n)} = \Lambda^{-1} \left(\frac{1}{c} \right), \quad (1.3)$$

где функция Λ определена в (1.5).

Отметим, что статистика R_n имеет двойственную природу, охватывающую, в зависимости от соотношения между k и n , как свойства сумм случайных величин, так и свойства экстремумов:

$$R_n(1) = \max_{1 \leq i \leq n} X_i, \quad R_n(n) = X_1 + \dots + X_n. \quad (1.4)$$

Таким образом, теория распределений сумм случайных величин, равно как и теория экстремальных значений, представляют собой специфические разделы общей теории распределений статистик (1.2).

Асимптотика распределения случайных величин $R_n(k)$ в «краеугольных» ситуациях (1.4) хорошо изучена (включая обобщения на случай последовательности слабозависимых случайных величин [11]–[13], [25]–[27]). Поэтому все больший интерес исследователей в последнее время привлекают промежуточные ситуации (1.1).

Стандартные предположения, накладываемые на распределения случайных величин X_i при изучении МЧС $R_n(k)$, состоят в следующем:

- (A) $EX = 0$,
- (B) $DX = 1$,
- (C) $Ee^{tX} < \infty$ ($\exists t > 0$),

(D) *распределение случайной величины X субгауссово, то есть существует такая постоянная $\sigma \in (0; \infty)$, что $Ee^{tX} \leq e^{t^2 \sigma^2 / 2}$ для любого $t > 0$.*

Прежде чем сформулировать результаты, введем необходимые обозначения. Положим

$$\psi(t) = \ln E e^{tX}, \quad m(t) = \psi'(t), \quad \lambda(\cdot) = m^{-1}(\cdot), \quad t_+ = \sup \{t: \psi(t) < \infty\},$$

$$m_+ = \lim_{t \uparrow t_+} m(t), \quad \Lambda(\alpha) = \sup_t \{t\alpha - \psi(t)\} = \alpha\lambda(\alpha) - \psi(\lambda(\alpha)), \quad (1.5)$$

$$\sigma^2(\alpha) = m'(\lambda(\alpha)) = \frac{1}{\lambda'(\alpha)}, \quad \Lambda_+ = \lim_{\alpha \uparrow m_+} \Lambda(\alpha),$$

$$\alpha^3 G(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} - \Lambda(\alpha). \quad (1.6)$$

Функция Λ известна в литературе как функция больших уклонений (ФБУ) или как преобразование Лежандра; $G(x)$ есть ряд Крамера. Отметим, что

$$\Lambda'(\alpha) = \lambda(\alpha), \quad \Lambda(0) = \lambda(0) = 0, \quad \Lambda''(0) = \sigma^{-2}(0) = \frac{1}{DX}.$$

Верхней гранью области определения ФБУ Λ является число m_+ , причем $\sup_{0 \leq \alpha < m_+} \Lambda(\alpha) = \Lambda_+$. Нетрудно проверить, что

$$\Lambda_+ = \int_0^{m_+} \lambda(u) du = \int_0^{t_+} t m'(t) dt \quad (1.7)$$

(сделана замена переменной $t = \lambda(u)$).

Положим

$$\xi_t^* = \frac{\xi_t}{\sqrt{a_t}}, \quad \xi_t = \sup_{0 \leq s \leq t} (w_{s+a_t} - w_s), \quad u_t = \sqrt{2 \ln \left(t a_t^{-1} \sqrt{2 \ln \left(\frac{t}{a_t} \right)} \right)},$$

где $\{w_t, t \geq 0\}$ — стандартный винеровский процесс, $0 < a_t < t$. Случайная величина ξ_t является «непрерывным» аналогом $R_n^*(k)$.

В [2] показано, что для любого $y \in \mathbb{R}$ при $t/a_t \rightarrow \infty$

$$P \left\{ \sqrt{2 \ln \left(\frac{t}{a_t} \right)} (\xi_t^* - u_t) < y - \ln \sqrt{2\pi} \right\} \rightarrow \exp\{-e^{-y}\}. \quad (*)$$

Положим $\alpha = \Lambda^{-1}(1/c)$,

$$\eta_n = (R_n - \alpha k) \lambda(\alpha) + 0.5 \ln k - c^{-1} \{c \ln n\} - \ln \kappa(\alpha),$$

где $c > 1/\Lambda_+$; выражение $\lambda(\alpha) \sigma(\alpha) \kappa(\alpha) \sqrt{2\pi}$ равно единице, если распределение случайной величины X нерешетчато, и равно $h\lambda(\alpha)/(1 - \exp\{-h\lambda(\alpha)\})$, если распределение случайной величины X решетчато с шагом h ; $\{x\} = x - [x]$.

В приводимых ниже теоремах А-В считаются выполненными условия (А)-(С), а в теореме В, сверх того, и условие (D).

Теорема А [3]. Пусть $k = [c \ln n]$, распределение случайной величины X нерешетчато. Существует такая постоянная $\delta \leq 0$, что для любого $y \in \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$

$$P\{\eta_n < y + \delta\} \rightarrow \exp\{-e^{-y}\}. \quad (1.8)$$

В ситуациях, когда $k \gg \ln(n/k)$, аналоги ЗПЛ для $R_n(k)$ получены в [2]-[9]. Предельная теорема для случайных величин $R_n^*(k)$ в случае $k \gg \ln(n/k)$ установлена в [10].

Теорема В [10]. Пусть $\ln(n/k) \ll k \ll n$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для любого $y \in \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} P\left\{R_n^*(k)k^{-1/2} < l_n + \frac{y}{l_n}\right\} \\ = \exp\left\{-\exp\left\{-y + k^{-1/2}l_n^{3/2}G(l_n k^{-1/2})\right\}\right\} + o(1), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $l_n = [2 \ln(nk^{-1} \sqrt{\pi^{-1} \ln(n/k)})]^{1/2}$.

Случай $k = [c \ln n]$, $c = 1/\Lambda_+$, является своеобразным водоразделом в спектре ситуаций (1.1): при $k = [c \ln n]$, $c < 1/\Lambda_+$, перестает работать аппарат теории больших уклонений, эффективно используемый в зоне $k > (\ln n)/\Lambda_+$.

Основным результатом настоящей работы являются предложенные в разделе 3 оценки сверху и снизу для вероятностей $P\{R_n(k) < x\}$, установленные при слабых ограничениях на функцию $k(n)$. Эти оценки формируют базу единого подхода к изучению распределения случайных величин $R_n(k)$ во всем спектре ситуаций (1.1).

В разделе 2 изучается асимптотика распределения случайных величин $R_n(k)$ при $k > [(\ln n)/\Lambda_+]$. Теорема 2.1 устанавливает оценку скорости сходимости в предельной теореме для распределений случайных величин $R_n([c \ln n])$ в классической ситуации, когда случайная величина X имеет распределение Бернулли $B(\frac{1}{2})$. Асимптотика распределения случайных величин $R_n^*(k)$ при $k \gg \ln n$ описана теоремой 2.2. Утверждение типа ЗПЛ для процесса ξ_t приведено в теореме 2.3. Доказательства результатов вынесены в разделы 4, 5.

2. Предельные теоремы

Положим

$$H(x) = x \log_2 x + (1-x) \log_2(1-x) + 1, \quad q = \frac{1-\gamma}{\gamma},$$

где $\gamma \in (0.5; 1)$ есть правый корень уравнения $H(\gamma) = k^{-1} \log_2 n$, и пусть

$$\begin{aligned} g(k) &\equiv g(k, n) = \gamma k + 0.5 \log_q k, \quad g^*(k) = g(k) - [g(k)], \\ \xi_n &= R_n(k) - [g(k)], \\ \Delta(n, j) &= \left| \mathbf{P}\{\xi_n < j\} - \exp \left\{ -\frac{2\gamma-1}{2\sqrt{2\pi q}} q^{j-g^*(k)} \right\} \right|. \end{aligned}$$

Теорема 2.1. Если $\mathbf{P}\{X = 0\} = \mathbf{P}\{X = 1\} = \frac{1}{2}$ и $k = [d \log_2 n]$, $d > 1$, то

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \Delta(n, j) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2.1)$$

Отметим, что соотношение (2.1) эквивалентно следующему:

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}} \left| \mathbf{P}\{R_n(k) < x\} - \exp \left\{ -\frac{2\gamma-1}{2\sqrt{2\pi q k}} q^{x-\gamma k} \right\} \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right). \quad (2.1^*)$$

З а м е ч а н и е 2.1. Устанавливаемый теоремой 2.1 порядок скорости сходимости в предельной теореме для $R_n(k)$ связан с использованием приводимой в разделе 5 леммы А, дающей аппроксимацию вводимых в разделе 3 величин $b(k, x)$ с точностью до множителя $1 + O(1/\sqrt{k})$. При наличии более тонкой аппроксимации $b(k, x) = \mathbf{P}(D_k)$ метод доказательства теоремы 2.1 позволил бы получить оценку скорости сходимости вида $O(k^{-1}(\ln k)^2)$. Отметим, что таков порядок скорости сходимости и в предельной теореме для $R_n(1)$, если случайная величина X имеет нормальное $\mathcal{N}(0, 1)$ распределение (см. формулу (2.4.8) в [13]). Уместно предположить, что неулучшаемая оценка скорости сходимости в (2.1) имеет вид $O(1/\ln n)$. Учитывая хорошо известную оценку скорости сходимости в центральной предельной теореме (ЦПТ) (то есть в предельной теореме для $R_n(n)$), можно ожидать, что в зоне $\ln n \ll k \ll n$ правильная оценка скорости сходимости в предельной теореме для $R_n^*(k)$ имеет вид $O(1/\sqrt{k \ln(n/k)})$.

Рассмотрим ситуацию

$$\ln n \ll k \ll n \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2.2)$$

Отметим, что теорема В не дает исчерпывающего ответа на вопрос о предельном распределении случайной величины $R_n(k)$ при $k \equiv k(n)$, удовлетворяющем (2.2). А именно, возможны ситуации, когда выполнены условия теоремы В и (2.2), но $l_N(R_{kN}/\sqrt{k} - l_N)$ слабо сходится при $N, k \rightarrow \infty$ к вырожденному закону, сосредоточенному в точке $-\infty$ либо в точке $+\infty$. На это указывает следующий

П р и м е р. Пусть случайная величина ξ имеет распределение Бернулли $B(p)$: $\mathbf{P}\{\xi = 1\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi = 0\} = p$, $p \in (0, 1)$. Пусть $X =$

$(\xi - p)/\sqrt{p(1-p)}$. Тогда

$$\begin{aligned}\Lambda_X(x) &= p \left(1 + x \sqrt{\frac{1-p}{p}}\right) \ln \left(1 + x \sqrt{\frac{1-p}{p}}\right) \\ &\quad + (1-p) \left(1 - x \sqrt{\frac{p}{1-p}}\right) \ln \left(1 - x \sqrt{\frac{p}{1-p}}\right), \\ \lambda''(0) \equiv \Lambda_X'''(0) &= \frac{p^2 - (1-p)^2}{\sqrt{p(1-p)}}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Положим $k \equiv k(N) = (\ln N)^2/(9c^2)$, $c > 0$. Поскольку

$$l_N = \sqrt{2 \ln N} + O\left(\frac{\ln \ln N}{\sqrt{\ln N}}\right), \quad (2.4)$$

имеем: $l_N^3/\sqrt{k} = 6c\sqrt{2 \ln N} + o(1)$. Из (1.6) и (1.9) вытекает:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left\{l_N \left(\frac{R_{kN}}{\sqrt{k}} - l_N\right) < y\right\} \\ = \exp \left\{ - \exp \left\{ -y - \frac{k^{-1/2} l_N^3 \lambda''(0)}{6} + O\left(\frac{l_N^4}{k}\right) \right\} \right\} + o(1).\end{aligned}\quad (2.5)$$

Следовательно, при $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left\{l_N \left(\frac{R_{kN}}{\sqrt{k}} - l_N\right) < y\right\} \\ = \exp \left\{ - \exp \left\{ -y - c \lambda''(0) \sqrt{2 \ln N} + O(1) \right\} \right\} + o(1).\end{aligned}\quad (2.6)$$

Поэтому

$$l_N \left(\frac{R_{kN}}{\sqrt{k}} - l_N\right) \Rightarrow +\infty \quad (2.7)$$

при $N \rightarrow \infty$, если $\lambda''(0) < 0$, то есть если $p < 1-p$.

Введем обозначения:

$$u_n = \sqrt{2 \ln \left(\frac{n}{k} \sqrt{2 \ln \frac{n}{k}}\right)}, \quad \alpha_n = \frac{u_n}{\sqrt{k}}, \quad (2.8)$$

$$\psi(y, \alpha) = -y - \frac{y^2}{2} + (1+y)^3 \alpha G((1+y)\alpha).$$

Выделим следующие возможные ситуации: при $n \rightarrow \infty$

$$u_n^2 \alpha_n^{m-1} \rightarrow \infty, \quad u_n^2 \alpha_n^m \rightarrow 0, \quad (A_m)$$

$$u_n^2 \alpha_n^m \rightarrow c > 0. \quad (A_m^*)$$

Нетрудно проверить, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left(\ln \frac{n}{k}\right)^{1+2/m} \ll k \ll \left(\ln \frac{n}{k}\right)^{1+2/(m-1)}$$

в ситуации (A_m) и

$$\left(\ln \frac{n}{k}\right)^{2+m} k^{-m} \rightarrow c^2$$

в ситуации (A_m^*) .

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия (A)–(D) и (2.2). Если для некоторого $m \in \mathbb{N}$ имеет место (A_m) , то можно указать такие числа $c_1, \dots, c_{m-1}$, что для любого $z \in \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$

$$P\left\{\frac{u_n}{\sqrt{k}}(R_n^*(k) - u_n \sqrt{k}(1 + y_n)) < z\right\} \rightarrow \exp\left\{-\frac{e^{-z}}{\sqrt{2\pi}}\right\}, \quad (2.9)$$

где $y_n = \sum_{i=1}^{m-1} c_i \alpha_n^i$ (полагаем $y_n = 0$, если $m = 1$). Если же для некоторого $m \in \mathbb{N}$ имеет место (A_m^*) , то можно указать такие числа $c_1, \dots, c_m$, что для любого $z \in \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$ справедливо (2.9), где $y_n = \sum_{i=1}^m c_i \alpha_n^i$.

З а м е ч а н и е 2.2. Числа $\{c_i\}$ зависят только от производных $\{G^{(i)}(0)\}$ функции (1.6) и подбираются с помощью формулы Тейлора так, чтобы выполнялось соотношение $\psi(y, \alpha) = O(\alpha^{m+1})$ при $y_n = \sum_{i=1}^m c_i \alpha_n^i$, $\alpha \rightarrow 0$. Например,

$$c_1 = G(0) = -\frac{\lambda''(0)}{6}, \quad c_2 = G'(0) + 2.5 G^2(0), \quad (2.10)$$

и так далее. В частности, если $k(n) \sim c(\ln n)^2$, то

$$\frac{u_k}{\sqrt{k}}(R_n^*(k) - u_n \sqrt{k}(1 + c_1 \alpha_n + c_2 \alpha_n^2)) \Rightarrow \xi + \ln \sqrt{2\pi},$$

где $P\{\xi < z\} = \exp\{-e^{-z}\}$, константы c_1, c_2 определены в (2.10).

З а м е ч а н и е 2.3. Отметим, что для стандартного нормального распределения выполняется $G(\cdot) \equiv 0$, $\psi(0, \alpha) = 0$, и, следовательно, соотношение (2.9) справедливо с $y_n \equiv 0$ для любого $k \equiv k(n)$, удовлетворяющего (2.2).

Асимптотика распределения случайных величин ξ_t изучалась в [6]–[9], где при определенных ограничениях на рост $\{a_t\}$ получены утверждения типа закона повторного логарифма. В частности, в [6] доказана следующая

Теорема С. Пусть выполнены следующие условия:

- (i) $0 < a_t < t$, функция a_t не убывает;
- (ii) функция $t^{-1} a_t$ не возрастает;
- (iii) $\ln(t/a_t) \gg \ln \ln t$ при $t \rightarrow \infty$.

Тогда с вероятностью единица

$$0 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\xi_t^2}{a_t} - \rho_t \right) \leq 2 \ln 51, \quad (2.11)$$

где $\rho_t = u_t^2 - 2 \ln \ln \ln t - \ln(2\pi)$, $u_t = \sqrt{2 \ln(t a_t^{-1}) \sqrt{2 \ln(t/a_t)}}$.

С помощью оценок раздела 3 этот результат может быть уточнен.

Теорема 2.3. Пусть выполнены условия (i)–(ii), а также следующие условия:

(iv) $\ln(t/a_t) \gg \ln \ln \ln t$ при $t \rightarrow \infty$,

(v) если $t_m = \theta^m$ для некоторого $\theta > 1$, то $\sum_{m \geq 1} a_{t_m}/t_m < \infty$.

Тогда с вероятностью единица

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\xi_t^2}{a_t} - \rho_t \right) \leq 0. \quad (2.12)$$

Отметим, что (iii) влечет за собой (iv) и (v). Таким образом, в условиях теоремы С

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\xi_t^2}{a_t} - \rho_t \right) = 0. \quad (2.13)$$

3. Основные неравенства

Введем обозначения:

$$p_n \equiv p_n(k, x) = \mathbf{P}\{R_n^* < x\},$$

$$D_i \equiv D_i(k, x) = \{\zeta_i \geq x, \zeta_{i-1} < x, \dots, \zeta_{i-k} < x\} \quad (i \geq k),$$

$$D_i^* \equiv D_i(2k-1, x) = \{\zeta_i \geq x, \zeta_{i-1} < x, \dots, \zeta_{i-2k+1} < x\} \quad (i \geq 2k-1),$$

$$a \equiv a(k, x) = 2kb, \quad b \equiv b(k, x) = \mathbf{P}(D_k),$$

$$d \equiv d(k, x) = kb\mathbf{P}\{\zeta \geq x\}, \quad b^* \equiv b^*(k, x) = \mathbf{P}(D_{2k-1}^*).$$

Теорема 3.1. Если $n \geq 4k$, $8kb \leq 1$, то справедливы оценки

$$\mu^{1+n/(2k)}(p_{2k} - a - 4a^2) \leq \mathbf{P}\{R_n^* < x\} \leq \lambda^{[n/(2k)]-1} \left(p_{2k} + \frac{4a^2}{3} \right), \quad (3.1)$$

где

$$\mu = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}, \quad \lambda = (1 - b + d)^{2k}(1 + 2a^2).$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{R_n^* < x\} \leq \lambda_*^{[n/(2k)]-1} (p_{2k} + 8k^2bb^*), \quad (3.2)$$

где $\lambda_* = (1 - b^*(1 - kb))^{2k}(1 + 12k^2bb^*) \leq (1 - b^*(1 - 7kb))^{2k}$.

Отметим, что условия теоремы 3.1 не накладывают моментных ограничений на распределение случайной величины X ; не требуется, чтобы выполнялось условие (A).

При слабых ограничениях на вид зависимости k и x от n левая и правая границы для $P\{R_n^* < x\}$ в (3.1), (3.2) асимптотически эквивалентны $\exp\{-nb\}$. Поскольку $b = P\{R_{k-1}^* < x\} - P\{R_k^* < x\}$, достаточно тонкие (см. лемму А ниже) сведения об асимптотике вероятностей больших уклонений для R_k^* совместно с результатом теоремы 3.1 позволяют найти предельное распределение статистики $R_n([c \ln n])$, а также оценить скорость сходимости к нему.

Следствие 3.1. Пусть $n \geq 4k$ и $8kb \leq 1$. Тогда найдется такая постоянная c , не зависящая от распределения случайной величины X , что

$$p_k e^{-nb} - ckn^{-1} \leq P\{R_n^* < x\} \leq p_k \exp\{-nb(1 - kP\{\zeta \geq x\})\} + ckn^{-1}. \quad (3.3)$$

Если для некоторого $\varepsilon > 0$ множество $A_\varepsilon \equiv A_\varepsilon(k)$ таково, что $8kb \leq 1$ и $b^* \geq \varepsilon b$ при $x \in A_\varepsilon$, то найдется такая постоянная c_ε , что при $n \geq 4k$, $x \in A_\varepsilon$

$$P\{R_n^* < x\} \leq p_k e^{-nb^*} + c_\varepsilon kn^{-1}. \quad (3.4)$$

Положим $x_k \equiv x_k(\varepsilon) = \sqrt{2(1+\varepsilon)k \ln k}$.

Следствие 3.2. Если $n \geq 4k$ и выполнены условия (А)–(С), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная $c_\varepsilon \in (0, \infty)$, что при $k \rightarrow \infty$

$$\sup_{x \geq x_k} |P\{R_n^* < x\} - e^{-nb}| \leq c_\varepsilon (kn^{-1} + k^{-\varepsilon/2}). \quad (3.5)$$

В зоне $x \leq x_k$ при всех достаточно больших k справедлива оценка

$$P\{R_n^* < x\} \leq \exp\{-nk^{-2-2\varepsilon}\}. \quad (3.6)$$

4. Доказательства основных неравенств

Символами c, C (с индексами и без них) ниже обозначаются различные положительные постоянные.

Доказательство теоремы 3.1 состоит в составлении и решении рекуррентных неравенств для вероятностей $P\{R_n < x\}$ подобно тому, как это проделано в [14], [15] при изучении распределения максимума длин серий «успехов» L_n . Отметим, что случайные величины L_n и $R_n(k)$ связаны между собой соотношением

$$L_n = \max\{k \leq n: R_n(k) \geq k\}.$$

Подробнее о распределении случайных величин L_n см. в [16]–[23].

4.1. Положим $R_{-i} = -\infty$ ($i \in \mathbb{N}$). Заметим, что

$$\begin{aligned} \{R_n^* < x\} &= \{R_{n-1}^* < x\} \setminus \{R_{n-1}^* < x, \zeta_n \geq x\} \\ &= \{R_{n-1}^* < x\} \setminus \{R_{n-1-k}^* < x, D_n\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Поэтому

$$p_n = p_{n-1} - P\{R_{n-1-k}^* < x, D_n\} \quad (n \geq k). \quad (4.2)$$

Учитывая, что R_n^* монотонно не убывает с ростом n , из (4.2) выводим: при $n \geq 2k$

$$p_n \geq p_{n-1} - P\{R_{n-2k}^* < x, D_n\} = p_{n-1} - bp_{n-2k}. \quad (4.3)$$

С помощью рекуррентного соотношения (4.3) нетрудно составить следующее неравенство: при $n \geq 4k - 1$

$$p_n \geq p_{n-2k} - b \sum_{i=0}^{2k-1} p_{n-2k-i} \geq p_{n-2k} - 2kbp_{n-4k+1}. \quad (4.4)$$

Пусть μ_1 и μ_2 — корни уравнения $\mu^2 - \mu + a = 0$, являющегося характеристическим для рекуррентного неравенства (4.6). Положим

$$W_m = p_{2mk}, \quad U_m = W_m - \mu_1 W_{m-1}. \quad (4.5)$$

Тогда (4.4) можно переписать в виде

$$W_m \geq W_{m-1} - aW_{m-2} \quad (m \geq 2). \quad (4.6)$$

Из (4.5) и (4.6) получаем:

$$U_m \geq \mu_2 U_{m-1} \quad \text{при } m \geq 2. \quad (4.7)$$

Значит, $U_m \geq \mu_2^{m-2} U_2$ и, следовательно,

$$W_m \geq \mu_1 W_{m-1} + U_2 \mu_2^{m-2}. \quad (4.8)$$

Пусть $\mu_1 \geq \mu_2$. Если $U_2 \geq 0$, то из (4.8) вытекает: $W_m \geq \mu_1^{m-2} W_2$. Если же $U_2 < 0$, то из (4.8) выводим:

$$\begin{aligned} W_m &\geq \mu_1^{m-2} W_2 + U_2 \sum_{j=0}^{m-3} \mu_1^j \mu_2^{m-2-j} = \mu_1^{m-2} W_2 + \frac{U_2 \mu_2 (\mu_1^{m-2} - \mu_2^{m-2})}{\mu_1 - \mu_2} \\ &\geq \mu_1^{m-2} \left(W_2 + \frac{U_2 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Согласно (4.3), $W_1 \leq W_2 + a$. Поэтому

$$U_2 = W_2 - \mu_1 W_1 \geq \mu_2 W_2 - a\mu_1. \quad (4.10)$$

На основе (4.9) и (4.10) заключаем:

$$\begin{aligned} W_m &\geq \mu_1^{m-2} \{ W_2 + W_2 \mu_2^2 (1 - 2\mu_2)^{-1} - a^2 (1 - 2\mu_2)^{-1} \} \\ &= \frac{\mu_1^m (W_2 - \mu_2^2)}{1 - 2\mu_2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Таким образом,

$$W_m \geq \mu_1^m (W_2 - \mu_2^2) \quad (4.12)$$

при любом знаке U_2 .

Полезно отметить, что

$$a \leq \mu_2 \leq 2a, \quad 1 - a \geq \mu_1 \geq 1 - a(1 + 4a).$$

Отсюда и из (4.12) получим: при $n \geq 4k$

$$p_n \geq W_{[1+n/(2k)]} \geq \mu_1^{1+n/(2k)} (p_{4k} - 4a^2).$$

Согласно (4.6), $p_{4k} \equiv W_2 \geq p_{2k} - a$. Оценка снизу в (3.1) доказана.

4.2. Покажем теперь, что справедливо неравенство

$$P\{R_n^* < x\} \leq \lambda^{[n/(2k)]-1} \left(p_{2k} + \frac{4a^2}{3} \right). \quad (3.1^*)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} P\{R_{n-k-1}^* < x, D_n\} &= P\{R_{n-k-2}^* < x, D_n\} \\ &\quad - P\{R_{n-k-2}^* < x, \zeta_{n-k-1} \geq x, D_n\} \\ &= \dots = P\{R_{n-2k}^* < x, D_n\} - \sum_{i=1}^{k-1} P\{R_{n-k-i-1}^* < x, \zeta_{n-k-i} \geq x, D_n\}. \end{aligned}$$

Поэтому для любого $m \in \mathbb{N}$ при $n \geq k \vee (4k - m)$

$$\begin{aligned} P\{R_{n-k-1}^* < x, D_n\} &\geq P\{R_{n-k-1+m}^* < x, D_{n+m}\} \\ &\geq bp_{n-2k+m} - kbP\{\zeta \geq x\} p_{n-4k+m}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Полагая в (4.13) $m = 4k - 1$ и учитывая (4.2), будем иметь:

$$p_n \leq (1 + d)p_{n-1} - bp_{n+2k-1} \quad (n \geq k).$$

Но ввиду (4.4)

$$p_{n+2k-1} \geq p_{n-1} - ap_{n-2k} \quad (n \geq 2k).$$

Следовательно, при $n \geq 4k$

$$\begin{aligned} p_n &\leq p_{n-1}(1 - b + d) + abp_{n-2k-1} \\ &\leq \dots \leq p_{n-2k}(1 - b + d)^{2k} + a^2 p_{n-4k}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Пусть λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения $\lambda^2 - (1 - b + d)^{2k} \lambda - a^2 = 0$, причем

$$\lambda_1 = 0.5(1 - b + d)^{2k} \left\{ 1 + \sqrt{1 + 4a^2(1 - b + d)^{-4k}} \right\} > 0. \quad (4.15)$$

Отметим, что

$$0 > \lambda_2 \geq -a^2(1-b+d)^{-2k}. \quad (4.16)$$

Положим

$$W_m = p_{2mk}, \quad v_m = W_m - \lambda_2 W_{m-1}. \quad (4.17)$$

Тогда неравенство (4.14) можно переписать в виде

$$W_m \leq (1-b+d)^{2k} W_{m-1} + a^2 W_{m-2} \quad (m \geq 2). \quad (4.18)$$

Из (4.17), (4.18) выводим: при $m \geq 2$

$$W_m \leq v_m \leq \lambda_1 v_{m-1} \leq \dots \leq \lambda_1^{m-1} v_1. \quad (4.19)$$

Принимая во внимание (4.16) и (4.19), заключаем, что

$$W_m \leq \lambda_1^{m-1} (W_1 - \lambda_2) \leq \lambda_1^{m-1} (p_{2k} + a^2(1-b+d)^{-2k}). \quad (4.20)$$

Заметим, что $\lambda_1 \leq \lambda$. Поэтому при $n \geq 4k$

$$p_n \leq W_{[n/(2k)]} \leq \lambda^{[n/(2k)]-1} (p_{2k} + a^2(1-b)^{-2k}). \quad (4.21)$$

В условиях теоремы 3.1 $(1-b)^{-2k} \leq \frac{4}{3}$, $(1-b)^{-4k} < 2$. Справедливость (3.1*) теперь очевидна.

4.3. Докажем неравенство (3.2). Легко видеть, что

$$\{R_n^* < x\} = \{R_{n-1}^* < x\} \setminus \{R_{n-2k}^* < x, D_n^*\}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{R_{n-2k}^* < x, D_n^*\} &= b^* p_{n-3k} - \sum_{i=1}^k \mathbf{P}\{R_{n-2k-i}^* < x, \zeta_{n-2k-i+1} \geq x, D_n^*\} \\ &\geq b^* p_{n-3k} - kbb^* p_{n-6k}. \end{aligned}$$

Поэтому (ср. с (4.13)) для любого $m \in \mathbb{N}$ при $n \geq (2k-1) \vee (6k-m)$

$$p_n \leq p_{n-1} - b^* p_{n-3k+m} + kbb^* p_{n-6k+m}.$$

Полагая $m = 2k-1$, получим:

$$p_n \leq p_{n-1} (1 + kbb^*) - b^* p_{n+3k-1} \quad (n \geq 2k-1).$$

Согласно (4.3), при $n \geq 2k-1$

$$p_{n+3k-1} \geq p_{n-1} - 3kbp_{n-2k}.$$

Поэтому при $n \geq 4k$

$$\begin{aligned} p_n &\leq p_{n-1} (1 - b^*(1-bk)) + 3kbb^* p_{n-2k} \\ &\leq \dots \leq p_{n-2k} (1 - b^*(1-bk))^{2k} + 6k^2 bb^* p_{n-4k}. \end{aligned}$$

Рассуждения, аналогичные соотношениям (4.15)–(4.20), приводят теперь к (3.2). Теорема 3.1 доказана.

Доказательство следствия 3.1. Заметим, что

$$\mu^{1+n/(2k)}(p_{2k} - a - 4a^2) \geq \exp\{-nb(1 + c_1 kb)\}(p_{2k} - a - 4a^2). \quad (4.22)$$

Воспользуемся очевидным неравенством

$$|e^a - e^b| \leq |a - b| \exp(\max\{a, b\}). \quad (4.23)$$

Поскольку $\sup_{y>0}(y + y^2)e^{-y} < \infty$, из (4.22) и (4.23) следует:

$$\mu^{1+n/(2k)}(p_{2k} - a - 4a^2) \geq e^{-nb} p_{2k} - \frac{ck}{n}. \quad (4.24)$$

Принимая во внимание (4.2), нетрудно убедиться, что

$$|p_{(2k)} - p_k| e^{-nb} \leq kbe^{-nb} \leq \frac{k}{n}. \quad (4.25)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \lambda^{[n/(2k)]-1} \left(p_{2k} + \frac{4a^2}{3} \right) &\leq \exp\{-nb(1 - kP\{\zeta \geq x\} - c_2 kb)\} (1 + c_3 kb) \\ &\times \left(p_{2k} + \frac{4a^2}{3} \right) \leq p_k \exp\{-nb(1 - kP\{\zeta \geq x\})\} + \frac{ck}{n}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Объединяя (4.24)–(4.26), получим (3.3).

Заметим, что $\lambda_* \leq \exp\{-2kb^*(1 - 7kb)\}$. Поэтому при $x \in A_\varepsilon(k)$ правая часть (3.2) не превосходит $\exp(-nb^*)p_k + c_\varepsilon k/n$, что влечет за собой (3.4). Следствие 3.1 доказано.

Доказательство следствия 3.2. Из неравенства Чебышева и свойств функции Λ вытекает (ср. [30, §8.8, замечание 8]):

$$\begin{aligned} P\{\zeta \geq x\} &\leq P\{\zeta \geq x_k\} \leq \exp\left\{-k\Lambda\left(\frac{x_k}{k}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{x_k^2}{2k}(1 + o(1))\right\} \leq k^{-1-\varepsilon/2} \end{aligned} \quad (4.27)$$

при всех достаточно больших k . Из (4.27) и (4.23) выводим: при $x \geq x_k$

$$\left| e^{-nb} - \exp\{-nb(1 - kP\{\zeta \geq x\})\} \right| \leq c_1 k^{-\varepsilon/2}. \quad (4.28)$$

Легко видеть, что $1 - p_k \leq kP\{\zeta \geq x\} \leq k^{-\varepsilon/2}$. Объединяя (3.3) и (4.28), получим (3.5).

Поскольку $x_k = o(k)$, имеем (см. [24]): при $k \rightarrow \infty$

$$P\{\zeta \geq x_k\} \sim \frac{k/x_k}{\sqrt{2\pi k}} \exp\left\{-k\Lambda\left(\frac{x_k}{k}\right)\right\} = \frac{k^{-1-\varepsilon+o(1)}}{2\sqrt{(1+\varepsilon)\pi \ln k}}. \quad (4.29)$$

Поэтому при $x \leq x_k$ и всех достаточно больших k

$$\begin{aligned} P\{R_n^* < x\} &\leq P\{R_n^* < x_k\} \leq (P\{\zeta < x_k\})^{[n/k]} \\ &\leq \exp\left(-\left[\frac{n}{k}\right] P\{\zeta \geq x_k\}\right) \leq \exp(-nk^{-2-2\varepsilon}), \end{aligned}$$

то есть справедливо неравенство (3.6). Следствие 3.2 доказано.

5. Доказательства теорем 2.1–2.3

Доказательство теоремы 2.1. Положим $j_k = C \ln k$, и пусть

$$m \equiv m(n, j) = j + [\gamma k + 0.5 \log_q k]. \quad (5.1)$$

Тогда для любого $C > 0$ при $j \leq -j_k$ и всех достаточно больших k

$$\begin{aligned} \Delta(n, j) &\leq P\{\xi_n < -j_k\} + \exp\left\{-\frac{2\gamma-1}{2\sqrt{2\pi q}} q^{-j_k-g^*(k)}\right\} = \Delta(n, -j_k) \\ &+ 2 \exp\left\{-\frac{2\gamma-1}{2\sqrt{2\pi q}} q^{-j_k-g^*(k)}\right\} \leq \Delta(n, -j_k) + \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

При $j \geq j_k$

$$\begin{aligned} \Delta(n, j) &= \left| P\{\xi_n \geq j\} - \left(1 - \exp\left\{-\frac{2\gamma-1}{2\sqrt{2\pi q}} q^{j-g^*(k)}\right\}\right) \right| \\ &\leq P\{\xi_n \geq j_k\} + 1 - \exp\left\{-\frac{2\gamma-1}{2\sqrt{2\pi q}} q^{j_k-g^*(k)}\right\} \\ &\leq \Delta(n, j_k) + \frac{2\gamma-1}{2\sqrt{2\pi q}} q^{j_k-1} \leq \Delta(n, j_k) + \frac{c_1}{k}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

если $C \geq 1/\ln(1/q)$. Таким образом, теорема 2.1 будет доказана, если мы убедимся, что при $n \rightarrow \infty$, $C > 1/\ln(1/q)$,

$$\max_{|j| \leq j_k} \Delta(n, j) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right). \quad (5.4)$$

С учетом (3.5) (можно также воспользоваться оценками следствия 3.1) достаточно показать, что при $n \rightarrow \infty$

$$\max_{|j| \leq j_k} \left| \exp\{-nb(k, m)\} - \exp\left\{-\frac{2\gamma-1}{2\sqrt{2\pi q}} q^{j-g^*(k)}\right\} \right| \leq \frac{C_2}{\sqrt{k}}, \quad (5.5)$$

где $m \equiv m(n, j)$ определено в (5.1), $C \ln(1/q) > 1$.

Положим

$$p(k, m) = 2^{-k-1} C_k^m \left(1 - \frac{2(k-m)}{k-1}\right) \frac{m}{k}. \quad (5.6)$$

В [4] доказана следующая

Лемма А. При $m > k/2$, $m \in \mathbb{N}$

$$1 \leq \frac{b(k, m)}{p(k, m)} \leq 1 + \left(1 - \frac{2(k-m)}{k-1}\right)^{-1} \sqrt{\frac{2}{k}}. \quad (5.7)$$

Пользуясь формулой Стирлинга, нетрудно убедиться, что при $m > k/2$

$$\begin{aligned} p(k, m) &= \frac{\hat{\gamma}(2\hat{\gamma}-1)}{2\sqrt{2\pi k\hat{\gamma}(1-\hat{\gamma})}} 2^{-kH(\hat{\gamma})} \left(1 + O\left(\frac{1}{k-m}\right)\right) \\ &= \frac{2\gamma-1}{2\sqrt{2\pi kq}} 2^{-kH(\hat{\gamma})} \left(1 + O\left(\frac{j+\ln k}{k} + \frac{1}{k-m}\right)\right), \end{aligned}$$

где $\hat{\gamma} = m/k$. Применение формулы Тейлора при $m = m(n, j)$ дает:

$$kH\left(\frac{m}{k}\right) = \log_2 n - 0.5 \log_2 k - (j - g^*(k)) \log_2 q + O\left(\frac{j^2 + (\ln k)^2}{k}\right).$$

Поэтому в зоне $|j| \leq j_k$

$$np(k, m) = \frac{2\gamma-1}{2\sqrt{2\pi q}} q^{j-g^*(k)} \left(1 + O(k^{-1}(\ln k)^2)\right). \quad (5.8)$$

Справедливость оценок (5.4) и (5.5) вытекает из (4.23), (5.7), (5.8). Объединяя (5.2)–(5.4), получим (2.1). Теорема 2.1 доказана.

Как отмечено в [4], если $P\{X=0\} = P\{X=1\} = \frac{1}{2}$ и $k(n) \sim d \log_2 n$, $d < 1$, то с вероятностью единица $R_n(k) = k$ при всех достаточно больших n (это связано с результатами о максимуме длин серий «успехов»).

Из результатов по вероятностям больших отклонений следует, что

$$P\{\zeta \geq m\} \sim \frac{2^{-kH(m/k)}}{2\sqrt{2\pi\gamma(1-\gamma)k(1-\sqrt{q})}}$$

для любого $j \in \mathbb{Z}$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\frac{p(k, m)}{P\{\zeta \geq m\}} \rightarrow \theta = \gamma(2\gamma-1)(1-\sqrt{q}) \quad (k \rightarrow \infty).$$

В терминологии теории экстремальных значений [11], [13] этот факт означает, что в условиях теоремы 2.1 массив $\{\zeta_i, 1 \leq i \leq n\}_{n \geq 1}$ имеет экстремальный индекс θ .

Пусть $\bar{p}_n = 1 - p_n$.

Лемма 5.1. Если $\{\zeta_i, i \geq 0\}$ есть стационарная последовательность случайных величин, $b \equiv b(k, x) = P\{\zeta_0 < x, \dots, \zeta_{k-1} < x, \zeta_k \geq x\}$, то для любого $N \in \mathbb{N}$ имеют место оценки

$$\frac{\bar{p}_{Nk} - \bar{p}_k}{(N-1)k} \leq b \leq \frac{\bar{p}_k}{k}, \quad (5.9)$$

$$\frac{\bar{p}_{Nk} - \bar{p}_{2k}}{(N-2)k} \leq b^*. \quad (5.10)$$

Доказательство. Соотношения (4.1), (4.2) справедливы без ограничений на распределение последовательности $\{\zeta_i\}$. Поэтому $\bar{p}_n \leq \bar{p}_{n-1} + b$ при $n \geq k$, и, следовательно,

$$\bar{p}_{Nk} \leq \bar{p}_{Nk-1} + b \leq \dots \leq \bar{p}_k + (N-1)kb.$$

Оценка снизу в (5.9) доказана. Аналогично доказывается (5.10). Второе неравенство в (5.9) принадлежит О'Брайену [25]. Для полноты изложения приведем его вывод (используется стационарность последовательности $\{\zeta_i, i > 1\}$):

$$\bar{p}_k = \sum_{i=0}^k \mathbf{P}\{X_i \geq x, R_{i-1} < x\} \geq \sum_{i=0}^k \mathbf{P}\{X_k \geq x, R_{k-1} < x\} = (k+1)b.$$

Лемма 5.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.2 опирается на следующий результат [10, теорема 1].

Теорема D. Пусть выполнены условия (A)–(D). Если $x \equiv x(k) \gg \sqrt{k}$, $x = o(k)$, то для всякого $N \in \mathbf{N}$ при $k \rightarrow \infty$

$$\bar{p}_{Nk} \sim \frac{Nx}{\sqrt{2\pi k}} \exp \left\{ -k\Lambda\left(\frac{x}{k}\right) \right\}. \quad (5.11)$$

Из (5.9)–(5.11) выводим: в условиях теоремы D при $k \rightarrow \infty$

$$\bar{p}_{3k} - \bar{p}_{2k} \sim \bar{p}_{2k} - \bar{p}_k \sim \bar{p}_k, \quad b^* \sim b \sim k^{-1}\bar{p}_k. \quad (5.12)$$

Кроме того, при выборе $x \equiv x(k) = u_n\sqrt{k}(1 + o(1))$ имеем:

$$kb \sim \bar{p}_k \leq u_n \exp \left\{ -0.5 u_n^2 (1 + o(1)) \right\} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (5.13)$$

Применяя оценки (3.3) и (3.4) с учетом (5.11)–(5.13), получаем:

$$\mathbf{P}\{R_n^*(k) < x\} = \exp \left\{ -\frac{nx}{k\sqrt{2\pi k}} e^{-k\Lambda(x/k)} (1 + o(1)) \right\} + o(1) \quad (5.14)$$

при $x = u_n\sqrt{k}(1 + O(\alpha_n))$, $n \rightarrow \infty$. Положим

$$x = u_n\sqrt{k}(1 + y_n), \quad \tau_n = nxk^{-3/2}e^{-k\Lambda(x/k)}. \quad (5.15)$$

Требуется для всякого $z \in \mathbf{R}$ подобрать $y_n \equiv y_n(z)$ так, чтобы при $n \rightarrow \infty$ выполнялось

$$\tau_n \rightarrow e^{-z}. \quad (5.16)$$

Принимая во внимание, что $\Lambda(x) = x^2/2 - x^3G(x)$, получим: при $n \rightarrow \infty$

$$\tau_n \sim (1 + y_n) \exp \{u_n^2 \psi(y_n, \alpha_n)\}. \quad (5.17)$$

Понятно, что если y_n отделено от нуля, то (5.16) не имеет места. Тем самым с необходимостью $y_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Если имеет место ситуация (A_1) , то есть если

$$\left(\ln \frac{n}{k}\right)^3 \ll k \ll n \quad (n \rightarrow \infty), \quad (5.18)$$

то выбор $y_n \equiv y_n(z) = z/u_n^2$ приводит к (5.16). Отметим также, что если

$$\left(2 \ln \frac{n}{k}\right)^3 k^{-1} \rightarrow c^2 \quad (5.19)$$

при $n \rightarrow \infty$ ($c > 0$), то при $y_n = z/u_n^2$ имеем $u_n^2 \psi(y_n, \alpha_n) = -z + \alpha_n u_n^2 G(0) + o(1)$, откуда следует, что $\tau_n \rightarrow \exp(-z - c\lambda''(0)/6)$, то есть при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ R_n^* < u_n \sqrt{k} \left(1 + \frac{z}{u_n^2} \right) \right\} \\ & \rightarrow \exp \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z - c\lambda''(0)/6} \right\} \quad (z \in \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Пусть теперь при $n \rightarrow \infty$

$$\ln \frac{n}{k} \ll k \ll \left(\ln \frac{n}{k}\right)^3. \quad (5.21)$$

Пользуясь формулой Тейлора, можно подобрать числа $c_1, \dots, c_{m-1}$ так, чтобы для $y_n^* = \sum_{i=1}^{m-1} c_i \alpha_n^i$ выполнялось

$$\psi(y_n^*, \alpha_n) = O(\alpha_n^m). \quad (5.22)$$

Положим $y_n = y_n^* + z/u_n^2$. Нетрудно убедиться, что в ситуации (A_m) при таком построении последовательности $\{y_n\}$ будет верно соотношение

$$u_n^2 \psi(y_n, \alpha_n) = -z + o(1) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (5.23)$$

которое ввиду (5.17) влечет за собой (5.16). Если же имеет место ситуация (A_m^*) , то, пользуясь формулой Тейлора, можно подобрать числа $c_1, \dots, c_m$ так, чтобы для $y_n^* = \sum_{i=1}^m c_i \alpha_n^i$ было справедливо соотношение $\psi(y_n^*, \alpha_n) = O(\alpha_n^{m+1})$. Тогда, как нетрудно убедиться, для $y_n = y_n^* + z/u_n^2$ также будет иметь место (5.23) и, следовательно, (5.16). Теорема 2.2 доказана.

Отметим, что описанная процедура построения центрирующей последовательности не работает (в общем случае), если $k \ll (\ln n)^{1+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$. Действительно, в этой ситуации $u_n^2 \alpha_n^m \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $m \in \mathbf{N}$.

Доказательство теоремы 2.3 опирается на следующие утверждения.

Лемма В [14]. Пусть последовательность событий $\{B_i, i \geq 1\}$ такова, что $\sum_{i \geq 1} P(B_i) = \infty$, и для некоторой функции $h(\cdot) > 0$ выполнены следующие условия:

- (i) $h(n) / \sum_{i=1}^n P(B_i) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$,
- (ii) $P(B_i B_j) \sim P(B_i) P(B_j)$ при $j \geq i + h(i) \rightarrow \infty$. Тогда

$$P\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{i \geq n} B_i\right) = 1.$$

Лемма 5.2. Если $T \geq 4$, $u^2 \geq 8e^{-1/2}$, то

$$P\{W_T < u\} \geq \exp\{-Tp^*(u)\} - \frac{C}{T}, \quad (5.24)$$

где C — абсолютная постоянная, $W_T = \sup_{0 \leq t \leq T} (w_{t+1} - w_t)$,

$$p^*(u) = P\left\{\sup_{0 \leq t \leq 1} (w_{t+1} - w_t) \geq u\right\} \sim u\varphi(u) \quad (5.25)$$

при $u \rightarrow \infty$, φ — плотность нормального $N(0, 1)$ распределения.

Справедливость (5.24) будет установлена ниже. Близкое (5.24) утверждение другими методами доказано в [2]. Отметим, что в лемме 5.2, в отличие от результата статьи [2], в явном виде указаны границы допустимых значений T и u .

Положим

$$u \equiv u(T, \varepsilon) = \sqrt{\rho_T + 4\varepsilon}.$$

Отметим, что

$$P\left\{\frac{\xi_T}{\sqrt{a_T}} < u\right\} = P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T/a_T} (w_{t+1} - w_t) < u\right\}. \quad (5.26)$$

Отсюда и из (5.24) выводим: при $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{\xi_T}{\sqrt{a_T}} < u\right\} &\geq \exp\left\{-Ta_T^{-1}u\varphi(u)(1+o(1))\right\} - \frac{ca_T}{T} \\ &\geq \frac{1}{(\ln T)^{\varepsilon-\varepsilon}} - \frac{ca_T}{T}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Полагая в (5.27) $T_m = \theta^m$, $m \in \mathbb{N}$, получим

$$\sum_{m \geq 1} P\left\{\frac{\xi_{T_m}}{\sqrt{a_{T_m}}} < u(T_m, \varepsilon)\right\} = \infty.$$

Для завершения доказательства теоремы 2.3 достаточно применить лемму В с $h(t) = \ln t$ подобно тому, как это было проделано в [14], [15] при выводе аналогичных утверждений. Теорема 2.3 доказана.

Доказательство леммы 5.2. Для любого $\tau > 0$ найдется такое $\varepsilon_\tau \equiv \varepsilon_\tau(T) > 0$, что

$$\mathbf{P}\{W_T < u\} \geq \mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq i \leq [T/\varepsilon]} (w_{\varepsilon(i+1/\varepsilon)} - w_{\varepsilon i}) < u\right\} - \tau$$

при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\tau]$. В дальнейшем нам будет удобно считать, что $1/\varepsilon \in \mathbf{N}$. Положим

$$N = \left\lceil \frac{T}{\varepsilon} \right\rceil, \quad K = \frac{1}{\varepsilon}, \quad X_i \sqrt{\varepsilon} = w_{\varepsilon i} - w_{\varepsilon(i-1)}, \quad \zeta_i = X_{i+1} + \dots + X_{i+K}.$$

Согласно следствию 3.1 и лемме 5.1,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\max_{0 \leq i \leq N} \zeta_i < \frac{u}{\sqrt{\varepsilon}}\right\} &\geq \exp\{-NK^{-1}\bar{p}_K\} - \frac{cK}{N} \\ &\geq \exp\left\{-\varepsilon \left\lceil \frac{T}{\varepsilon} \right\rceil p^*(u)\right\} - \frac{c}{\varepsilon [T/\varepsilon]}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Условия следствия 3.1 выполнены, так как $8Kb \leq 8\bar{p}_K \leq 8K\mathbf{P}\{X > u/\sqrt{\varepsilon}\} \leq 1$. Устремляя в (5.28) ε к нулю, получим:

$$\mathbf{P}\{W_T < u\} \geq \exp\{-Tp^*(u)\} - \frac{c}{T} - \tau,$$

что ввиду произвольности τ влечет за собой (5.24). Соотношение (5.25) приведено в [10]. Лемма 5.2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Erdős P., Rényi A. On a new law of large numbers. — J. Anal. Math., 1970, v. 22, p. 103–111.
2. Deheuvels P., Revesz P. Weak laws for the increments of Wiener processes, brownian bridges, empirical processes and partial sums of i.i.d. r.v.'s. — In: Mathematical Statistics and Probability Theory. Vol. A./Ed. by M. L. Puri et al. Dordrecht: Reidel, 1987, p. 69–88.
3. Deheuvels P., Devroye L. Limit laws of Erdős–Rényi–Shepp type. — Ann. Probab., 1987, v. 15, № 4, p. 1363–1386.
4. Deheuvels P., Erdős P., Grill K., Revesz P. Many heads in a short block. — In: Mathematical Statistics and Probability Theory. Vol. A./Ed. by M. L. Puri et al. Dordrecht: Reidel, 1987, p. 53–67.
5. Deheuvels P., Steinebach J. Exact convergence rates in strong approximation laws for large increments of partial sums. — Probab. Theory Relat. Fields, 1987, v. 76, p. 369–393.
6. Revesz P. On the increments of Wiener and related processes. — Ann. Probab., 1982, v. 10, p. 613–622.
7. Ortega J., Wschebor M. On the increments of a Wiener process. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1984, B. 65, H. 3, S. 329–339.
8. Csörgő M., Revesz P. How big are the increments of a Wiener process. — Ann. Probab., 1979, v. 7, p. 731–737.

9. Csaki E., Révész P. How big must be the increments of a Wiener process. — Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1979, v. 33, p. 37–49.
10. Пугерберг В. И. О больших скачках случайного блуждания. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, № 1, с. 54–64.
11. Leadbetter M. R., Rootzen H. Extremal theory for stochastic processes. — Ann. Probab., 1988, v. 16, № 2, p. 431–478.
12. Утев С. А. Об одном способе исследования сумм слабозависимых случайных величин. — Сиб. матем. журн., 1991, т. 32, № 4, с. 165–183.
13. Leadbetter M. R., Lindgren G., Rootzen H. Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes. New York: Springer-Verlag, 1983.
14. Новак С. Ю. Об отрезках времени постоянного пребывания однородной марковской цепи в фиксированном подмножестве состояний. — Сиб. матем. журн., 1988, т. 29, № 1, с. 129–140.
15. Novak S. Yu. Longest runs in a sequence of m -dependent random variables. — Probab. Theory Relat. Fields, 1992, v. 91, № 3, p. 269–281.
16. Erdős P., Révész P. On the length of the longest head-run. — Colloq. Math. Soc. János Bolyai: Topics Inform. Theory, 1975, v. 16, p. 219–228.
17. Самарова С. С. О длине максимальной серии успехов для марковской цепи с двумя состояниями. — Теория вероятн. и ее примен., 1980, т. 26, № 3, с. 510–520.
18. Deheuvels P. On the Erdős-Rényi theorem for random fields and sequences and its relationships with the theory of runs and spacings. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1985, B. 70, H. 1, S. 91–115.
19. Gordon L., Schilling M. F., Waterman M. S. An extreme value theory for long head runs. — Probab. Theory Relat. Fields, 1986, v. 72, № 2, p. 279–287.
20. Csaki E., Foldes A., Komlos J. Limit theorems for Erdős-Rényi type problems. — Studia Sci. Math. Hungar., 1987, v. 22, p. 321–332.
21. Новак С. Ю. Асимптотические разложения в задаче о максимуме длин серий успехов для марковской цепи с двумя состояниями. — Труды ин-та матем. СО АН СССР, 1989, т. 13, с. 136–147.
22. Новак С. Ю. Скорость сходимости в задаче о максимуме длин серий успехов. — Сиб. матем. журн., 1991, т. 32, № 3, с. 113–118.
23. Novak S. Yu. On the asymptotic distribution of the number of random variables exceeding a given level. — Siberian Adv. Math., 1993, v. 3, № 4, p. 108–122.
24. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные случайные величины. М.: Наука, 1965.
25. O'Brien G. Extreme values for stationary and Markov sequences. — Ann. Probab., 1987, v. 15, № 1, p. 281–291.
26. Peligrad M. An invariance principle for φ -mixing sequences. — Ann. Probab., 1985, v. 13, № 4, p. 1304–1313.
27. Hsing T. Estimating the parameters of rare events. — Stoch. Process. Appl., 1991, v. 37, № 1, p. 117–139.
28. Deheuvels P., Devroye L., Lynch J. Exact convergence rates in the limit theorems of Erdős-Rényi and Shepp. — Ann. Probab., 1986, v. 14, p. 209–223.
29. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986, 431 с.
30. Steinebach J. On a necessary condition for the Erdős-Rényi law of large numbers. — Proc. Amer. Math. Soc., 1978, v. 68, № 1, p. 97–100.

Поступила в редакцию

26.V.1995