Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. Якшявичюс, О некотором способе разложения вероятностей решетчатых случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 2, 294–307

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1804>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:14:39

© 1997 г.

ЯКШЯВИЧЮС Ш.*

О НЕКОТОРОМ СПОСОБЕ
РАЗЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
РЕШЕТЧАТЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Исследование вероятностей при помощи асимптотических разложений проводилось достаточно широко. Здесь, например, можно отметить работы Г. Крамера, В. Рихтера, В. Петрова, В. Статулявичюса, И. Саулиса, П. Франкена, В. Калинина, А. Бикалиса, А. Жемайтиса и многих других. Разложения, как правило, строятся с использованием семиинвариантов в случае непрерывных случайных величин (с.в.) и с применением факториальных семиинвариантов в случае решетчатых с.в. В данной работе рассматривается построение разложения для вероятностей суммы независимых одинаково распределенных решетчатых с.в. При этом используются иные числовые характеристики — значения в нулевой точке производной логарифма производящей функции. Преимущества такого построения обсуждаются в контексте.

Ключевые слова и фразы: сумма независимых одинаково распределенных решетчатых случайных величин, производящая функция, значение в нулевой точке производной логарифма производящей функции.

1. Введение. Для большей общности вначале будут рассматриваться статистики. Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^k, \quad \varphi_0 > 0, \quad |z| < 1, \quad (1)$$

есть производящая функция конечных статистик φ_k . Введем числовую характеристику

$$\sigma_\nu = \left[\frac{d^\nu}{dz^\nu} \log f(z) \right]_{z=0}, \quad \nu = 0, 1, \dots \quad (2)$$

*Литовский сельскохозяйственный университет, Центральный корпус 347 к., 4324 Каунас-Академия, Литва.

Например,

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \log \varphi_0, \quad \sigma_1 = \varphi_1 \varphi_0^{-1}, \quad \frac{\sigma_2}{2!} = \varphi_2 \varphi_0^{-1} - \frac{1}{2} \varphi_1^2 \varphi_0^{-2}, \dots, \\ \frac{\sigma_\nu}{\nu!} &= \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_r \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{l_m!} (\varphi_m \varphi_0^{-1})^{l_m}, \quad \nu = 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (3)$$

Суммирование производится по всем целым неотрицательным решениям $l_1, l_2, \dots, l_\nu$ уравнения $l_1 + 2l_2 + \dots + \nu l_\nu = \nu$. Сумма $\sum_r$ содержит слагаемые, соответствующие таким решениям $l_1, l_2, \dots, l_\nu$, для которых значения $r = l_1 + l_2 + \dots + l_\nu$ совпадают (т.е. значения r могут повторяться). Нетрудно заметить, что величины σ_ν содержат лишь статистики φ_k , $0 \leq k \leq \nu$.

2. Некоторые свойства и оценки характеристик σ_ν . При $\varphi_0 > 0$ характеристики σ_ν всегда существуют. Имеет место «обратное» рекуррентное соотношение

$$\sigma_{\nu-1} = \frac{1}{\nu} \int \left(\frac{d}{d\varphi_1} \sigma_\nu \right) d\varphi_0, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Если $\varphi_k = \alpha \beta^k$, $k = 1, 2, \dots, \nu$, то

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_\nu}{\nu!} &= \beta^\nu \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^{r-1} \frac{(\nu-1)!}{r!(\nu-r)!} \left(\frac{\alpha}{\varphi_0} \right)^r \\ &= \beta^\nu \frac{1 - (1 - \alpha/\varphi_0)^\nu}{\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (4)$$

Если $\varphi_k = \alpha \beta^k / k!$, $k = 0, 1, \dots, \nu$, то

$$\sigma_1 = \beta, \quad \sigma_\nu = 0, \quad \nu = 2, 3, \dots$$

Если $\varphi_k = (n! / (k!(n-k)!)) \alpha^{n-k} \beta^k$, $\alpha > 0$, $k = 0, 1, \dots, \nu$, $n = 1, 2, \dots$, $k \leq n$, то

$$\frac{\sigma_\nu}{\nu!} = (-1)^{\nu-1} n \frac{(\beta/\alpha)^\nu}{\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Если $\varphi_k = ((n+k-1)! / (k!(n-1)!)) \alpha^n \beta^k$, $k = 0, 1, \dots, \nu$, $n = 1, 2, \dots$, то

$$\frac{\sigma_\nu}{\nu!} = \frac{n \beta^\nu}{\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Если $|\varphi_k| \leq C \delta^k$, $k = 1, 2, \dots, \nu$, то

$$\frac{|\sigma_\nu|}{\nu!} \leq \delta^\nu \frac{(1 + C/\varphi_0)^\nu - 1}{\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots\quad (5)$$

Здесь и далее символом C (с индексами или без них) обозначены неотрицательные ограниченные величины, не обязательно одни и те же всюду.

Если $|\varphi_k| \leq \varphi_0 \delta^k / k!$, $k = 1, 2, \dots, \nu$, то

$$\frac{|\sigma_\nu|}{\nu!} \leq \frac{(\nu\delta)^\nu}{\nu\nu!}, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (6)$$

В общем случае

$$\frac{|\sigma_\nu|}{\nu!} \leq \sum_{r=1}^{\nu} \frac{(\nu-1)!}{r!(\nu-r)!} \left(\frac{\mu_\nu}{\varphi_0} \right)^r, \quad \mu_\nu = \max_{1 \leq k \leq \nu} |\varphi_k|, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Следовательно,

$$\frac{|\sigma_\nu|}{\nu!} \leq \frac{(1 + \mu_\nu / \varphi_0)^\nu - 1}{\nu}. \quad (8)$$

При $\varphi_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, \nu$, имеет место более точная оценка:

$$\begin{aligned} \frac{|\sigma_\nu|}{\nu!} \leq \max & \left\{ \frac{1}{2\nu} \left| \left(1 + \frac{\mu_\nu}{\varphi_0}\right)^\nu - \left(1 - \frac{\mu_\nu}{\varphi_0}\right)^\nu - \left(1 + \frac{\eta_\nu}{\varphi_0}\right)^\nu - \left(1 - \frac{\eta_\nu}{\varphi_0}\right)^\nu + 2 \right|, \right. \\ & \frac{1}{2\nu} \left| \left(1 + \frac{\eta_\nu}{\varphi_0}\right)^\nu - \left(1 - \frac{\eta_\nu}{\varphi_0}\right)^\nu - \left(1 + \frac{\mu_\nu}{\varphi_0}\right)^\nu \right. \\ & \left. \left. - \left(1 - \frac{\mu_\nu}{\varphi_0}\right)^\nu + 2 \right| \right\}, \end{aligned}$$

$$\eta_\nu = \min_{1 \leq k \leq \nu} \varphi_k, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

(см. [8, с. 612, 2, 3]). В частности, при $\mu_\nu = \eta_\nu$ получаем равенство (4) с $\mu_\nu = \eta_\nu = \alpha$, $\beta = 1$.

3. Разложение статистик. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} f^n(z) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^k \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{n,k} z^k = \exp \{ n \log f(z) \} \\ &= \exp \left\{ n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sigma_l}{l!} z^l \right\}, \quad |z| < 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что верна оценка

$$\frac{|\sigma_\nu|}{\nu!} \leq \frac{|\varphi_{\nu,\nu}|}{\nu\varphi_0^\nu}, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Используя равенство (9) и формулу

$$k! \varphi_{n,k} = \frac{d^k}{dz^k} f^n(z) \Big|_{z=0}$$

строим разложение для $\varphi_{n,k}$:

$$\varphi_{n,k} = e^{n\sigma_0} \left\{ \frac{\alpha^k}{k!} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\nu} \frac{d^{\nu+r}}{d\alpha^{\nu+r}} \frac{\alpha^k}{k!} \sum_r \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{l_m!} \left(\frac{n\sigma_{m+1}}{(m+1)!} \right)^{l_m} \right\},$$

$\alpha = n\sigma_1$. Способ суммирования для каждого ν см. в (3). Учитывая, что производящую функцию сумм $\sum_{k=0}^{k_0} \varphi_{n,k}$ можно представить в виде $f^n(z)/(1-z)$, $|z| < 1$, тем же способом получаем

$$\sum_{k=0}^{k_0} \varphi_{n,k} = e^{n\sigma_0} \left\{ \frac{\alpha^{k_0}}{k_0!} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\nu} \frac{d^{\nu+r}}{d\alpha^{\nu+r}} \frac{\alpha^{k_0}}{k_0!} \sum_r \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{l_m!} \times \left(\frac{n\sigma_{m+1}}{(m+1)!} + \frac{1}{m+1} \right)^{l_m} \right\}, \quad \alpha = n\sigma_1 + 1.$$

Легко заметить, что правые части представленных разложений различаются лишь заменой $n\sigma_l/l!$ на $n\sigma_l/l! + 1/l$, $l = 1, 2, \dots, \nu + 1$, а k — на k_0 . Нетрудно проверить, что оба соотношения являются тождествами.

Теорема 1. Пусть φ_k , $k = 0, 1, \dots$, $\varphi_0 > 0$, $\varphi_1 > 0$, есть конечные статистики. Имеет место разложение

$$\varphi_{n,k} = e^{n\sigma_0} \frac{(n\sigma_1)^k}{k!} \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{k-1} n^{-\nu} \sum_{r=1}^{\nu} \frac{k!}{(k-\nu-r)!} \sum_r \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{l_m!} \times \left(\frac{\sigma_{m+1}}{\sigma_1^{m+1}(m+1)!} \right)^{l_m} \right\}, \quad (11)$$

причем при $k - \nu - r < 0$ слагаемые равны нулю. Суммирование для каждого ν производится по всем целым неотрицательным решениям $l_1, l_2, \dots, l_{\nu}$ уравнения $l_1 + 2l_2 + \dots + \nu l_{\nu} = \nu$. Сумма $\sum_r$ содержит слагаемые, соответствующие таким решениям $l_1, l_2, \dots, l_{\nu}$, для которых значения $r = l_1 + l_2 + \dots + l_{\nu}$ совпадают.

Сумма $\sum_{\nu}$ содержит лишь статистики φ_i , $i = 0, 1, \dots, k$.

Если $|\varphi_i| \leq C\delta^i$, $i = 1, 2, \dots, k$, то оценка суммы $\sum_{\nu}$ имеет вид

$$\left| \sum_{\nu} \right| \leq \sum_{\nu=1}^{k-1} \left(\frac{\beta}{n} \right)^{\nu} \sum_{r=1}^{\min(\nu, k-\nu)} \left(\frac{\beta}{2} \right)^r \frac{(\nu-1)!}{(r-1)!(\nu-r)!} \frac{k!}{r!(k-\nu-r)!}, \quad (12)$$

$$\beta = \frac{\delta(1+C/\varphi_0)}{\sigma_1}.$$

Слагаемые в правой части не превосходят $(C_{\nu}k^2/(\nu n))^{\nu}$.

Для выражения в фигурных скобках (11) верна оценка

$$\left\{ 1 + \left| \sum_{\nu} \right| \right\} \leq \left(1 + \frac{\beta\beta'k}{n} \right)^{k-1}, \quad \beta' = \max \left(1, \frac{\beta}{2} \right). \quad (13)$$

В общем случае можно положить $\delta = 1$, $C = \mu_k = \max_{1 \leq i \leq k} |\varphi_i|$.

Заметим, что в (11) при $k^2 < n$ и возрастании ν порядок слагаемых относительно k и n повышается достаточно быстро. Так, например, первый член имеет порядок $O(k(k-1)/n)$, а последний — $O(k!/n^{k-1})$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 имеет место разложение

$$\sum_{k=0}^{k_0} \varphi_{n,k} = e^{n\sigma_0} \frac{(n\sigma_1 + 1)^{k_0}}{k_0!} \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{k_0-1} n^{-\nu} \sum_{r=1}^{\nu} \frac{k_0!}{(k_0 - \nu - r)!} \sum_r \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{l_m!} \right. \\ \left. \times \left(\frac{\sigma_{m+1}/(m+1)! + 1/(n(m+1))}{(\sigma_1 + 1/n)^{m+1}} \right)^{l_m} \right\}. \quad (14)$$

В общем случае, т.е. при $\delta = 1$, $C = \mu_{k_0}$, оценки имеют тот же вид, что и в теореме 1.

4. Разложение вероятностей. Пусть

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_m + \dots + X_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

есть сумма n независимых одинаково распределенных с.в., причем X_m — решетчатые с.в. с вероятностями значений $p_k = P\{X_m = k\}$, $k = 0, 1, \dots$, $p_0 > 0$, и с максимальным шагом распределения, равным 1. Если $p_0 = 0$, но $p_1 > 0$, то решетку можно сдвинуть влево на единицу; если $p_0 = p_1 = 0$, но $p_2 > 0$, то решетку сдвигаем влево на две единицы, и т.д. Таким образом, условие $p_0 > 0$ области рассмотрений практически не ограничивает.

Для вероятностей $q_{n,k}$ значений суммы S_n имеет место разложение (11) с $\varphi_k = p_k$, а для сумм вероятностей $\sum_{k=0}^{k_0} q_{n,k}$ — разложение (14) с $\varphi_{n,k} = q_{n,k}$.

Факториальные семиинварианты γ_j порядка j , $j = 0, 1, \dots$, и величины σ_ν связаны формальными соотношениями

$$\sigma_\nu = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{\gamma_{\nu+l}}{l!}, \quad \nu = 0, 1, \dots, \\ \gamma_j = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sigma_{j+l}}{l!}, \quad j = 0, 1, \dots$$

Использование характеристик σ_ν имеет некоторые преимущества по сравнению с использованием семиинвариантов и факториальных семиинвариантов. Во-первых, структура, а следовательно, и вычисление величин σ_ν проще. Действительно, семиинварианты порядка ν содержат линейные комбинации произведений моментов $\sum_{k=0}^{\infty} p_k k^j$, $1 \leq j \leq \nu$, факториальные семиинварианты порядка ν содержат линейные комбинации произведений факториальных моментов $\sum_{k=j}^{\infty} p_k k!/(k-j)!$, $1 \leq j \leq \nu$, а характеристики σ_ν состоят из линейных комбинаций произведений величин вида $p_k k!/p_0$, $1 \leq k \leq \nu$. Во-вторых, для существования величин σ_ν достаточно условия $p_0 > 0$, которое к тому же сдвигом к нулю можно при необходимости обойти. Поэтому практически σ_ν всегда существуют, в то время как для существования семиинвариантов порядка ν необходимо существование моментов порядков от 1 до ν , а для существования

факториальных семиинвариантов порядка ν необходимо существование факториальных моментов порядков от 1 до ν . В-третьих, разложение для вероятностей, построенное с использованием σ_ν , получается в виде конечной суммы, а в случае построения с факториальными семиинвариантами — в виде бесконечного ряда.

Пример. Пусть $p_k = P\{X_m = k\}$, где вероятности $p_0 = 0,1$, $p_1 = 0,3$, $p_2 = 0,1$, $p_3 = 0,2$, $p_4 = 0,2$, $p_5 = 0,1$ выбираются произвольно. Вычислим приближенно вероятности $q_{100,k} = P\{S_{100} = k\}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, используя два первых члена разложения вида (11):

$$\begin{array}{cccc} k=0 & k=1 & k=2 & k=3 \\ q_{100,k} \approx 10^{-100} & 10^{-98} \cdot 3 & 10^{-96} \cdot 4,465 & 10^{-94} \cdot 4,395 \dots \\ q_{100,k} = 10^{-100} & 10^{-98} \cdot 3 & 10^{-96} \cdot 4,465 & 10^{-94} \cdot 4,395 \dots \\ \\ & k=4 & k=5 & \\ q_{100,k} \approx 10^{-92} \cdot 3,217 \dots & 10^{-90} \cdot 1,867 \dots & & \\ q_{100,k} = 10^{-92} \cdot 3,220 \dots & 10^{-90} \cdot 1,872 \dots & & \end{array}$$

Также приведены точные значения для $q_{100,k}$.

Заметим, что точность повышается с убыванием величины k^2/n и с возрастанием p_1 .

З а м е ч а н и е. Если в сумме S_n (15) независимые слагаемые X_m распределены неодинаково, то все построения сохраняются с заменой $p\sigma_\nu/\nu!$ на $pa_\nu/\nu!$, где $a_\nu = \sum_{m=1}^n \sigma_{m,\nu}/n$.

5. Аппроксимация распределениями пуассоновского, биномиального и паскалева типа. В качестве аппроксимирующих распределений для вероятностей сумм рассматриваются, как правило, нормальное или пуассоновское. Применение характеристик σ_ν позволяет строить и другие аппроксимации. Рассмотрим аппроксимацию распределениями: 1) пуассоновского типа; 2) биномиального типа; 3) паскалева типа. Заметим, что эти распределения могут оказаться ненормированными, но это, очевидно, несущественно.

1) «Вероятности» (меры) распределения пуассоновского типа определяются равенствами

$$p_{n,k} = e^{-n\lambda_1} \frac{(n\lambda_2)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0.$$

При $\lambda_1 = \lambda_2$ имеем закон Пуассона.

Теорема 3. Пусть $q_{n,k}$ — вероятности значений суммы (15), а p_k — вероятности значений слагаемых, причем $p_0 > 0$, $p_1 > 0$. Имеет место разложение

$$q_{n,k} = e^{n\sigma_0} \frac{(n\sigma_1)^k}{k!} \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{k-1} n^{-\nu} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{a_{\nu-j+1}^{(j)}}{\sigma_1^{\nu+j}} \frac{k!}{j!(k-\nu-j)!} \right\}, \quad (16)$$

причем слагаемые при $k - \nu - j < 0$ равны нулю. Здесь

$$\sigma_0 = \log p_0 < 0, \quad \sigma_1 = \frac{p_1}{p_0} > 0,$$

$$a_l^{(1)} = \frac{\sigma_{l+1}}{(l+1)!}, \quad a_l^{(j)} = \sum_{s=1}^l a_s^{(1)} a_{l-s+1}^{(j-1)}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad j = 2, 3, \dots$$

Сумма в (16) содержит лишь вероятности p_i , $i = 0, 1, \dots, k$. Если первые вероятности p_i , $i = 0, 1, \dots, t$, аппроксимируемого и аппроксимирующего распределений совпадают, то в сумме $\sum_\nu$ первые t слагаемых равны нулю.

Если $p_i \leq C\delta^i$, $i = 1, 2, \dots, k$, то оценка суммы $\sum_\nu$ имеет вид (12).

Соотношение (16) отличается от соотношения (11) лишь обозначениями.

2) «Вероятности» (меры) распределения биномиального типа определяются равенствами

$$p_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p_0^{n-k} p_1^k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$p_0 \geq 0, \quad p_1 \geq 0.$$

Теорема 4. Пусть $q_{n,k}$ — вероятности значений суммы (15), а p_k — вероятности значений слагаемых, причем $0 < p_1 \leq p_0$. Имеет место разложение

$$q_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p_0^{n-k} p_1^k \times \left\{ 1 + \frac{n^k(n-k)!}{n!} \left[\sum_{\nu=1}^{k-1} n^{-\nu} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{a_{\nu-j+1}^{(j)}}{\sigma_1^{\nu+j}} \frac{k!}{j!(k-\nu-j)!} + \sum_{\nu=2}^{k-2} n^{-\nu} \sum_{s=1}^{\nu-1} \sum_{j=1}^s \frac{1}{j!} \frac{a_{s-j+1}^{(j)}}{\sigma_1^{s+j}} \times \left(\sum_{i=1}^{\nu-s} \frac{1}{i!} \frac{b_{\nu-s-i+1}^{(i)}}{\sigma_1^{\nu-s+i}} \frac{k!}{(k-\nu-j-i)!} \right) \right] \right\}, \quad (17)$$

причем в сумме $\sum_1^{k-1}$ слагаемые равны нулю при $k - \nu - j < 0$, а в сумме $\sum_2^{k-2}$ — при $k - \nu - j - i < 0$. Здесь

$$a_l^{(1)} = \frac{\sigma_{l+1}}{(l+1)!} - \frac{(-1)^l \sigma_1^l}{l+1}, \quad b_l^{(1)} = \frac{(-1)^l \sigma_1^{l+1}}{l+1}, \quad l = 1, 2, \dots,$$

$$a_l^{(j)} = \sum_{s=1}^l a_s^{(1)} a_{l-s+1}^{(j-1)}, \quad b_l^{(j)} = \sum_{s=1}^l b_s^{(1)} b_{l-s+1}^{(j-1)}, \quad j = 2, 3, \dots$$

Множитель $p^k(n-k)!/n!$ при $k \leq \sqrt{n}$ ограничен и при $k = \sqrt{n}$, $n \rightarrow \infty$, сходится к e .

Суммы в (17) содержат лишь вероятности p_i , $i = 0, 1, \dots, k$. Если первые вероятности p_i , $i = 0, 1, \dots, t$, аппроксимируемого и аппроксимирующего распределений совпадают, то в суммах $\sum_1^{k-1}$ и $\sum_2^{k-2}$ первые t слагаемых равны нулю.

Если $p_i \leq C\delta^i$, $i = 1, 2, \dots, k$, то оценка сумм имеет вид

$$\begin{aligned} \left| \sum_1^{k-1} + \sum_2^{k-2} \right| &\leq \sum_{\nu=1}^{k-1} \left(\frac{\beta}{n} \right)^{\nu} \sum_{j=1}^{\min(\nu, k-\nu)} \left(\frac{\beta}{2} \right)^j \frac{(\nu-1)!}{(j-1)!(\nu-j)!} \frac{k!}{j!(k-\nu-j)!} \\ &\quad + \sum_{\nu=2}^{k-2} n^{-\nu} \sum_{s=1}^{\nu-1} \beta^s \sum_{j=1}^{\min(s, k-\nu)} \left(\frac{\beta}{2} \right)^j \frac{(s-1)!}{j!(j-1)!(s-j)!} \\ &\quad \times \left(\sum_{i=1}^{\min(\nu-s, k-\nu-j)} 2^{-i} \frac{(\nu-s-1)!}{i!(i-1)!(\nu-s-i)!} \frac{k!}{i(k-\nu-j-i)!} \right), \\ \beta &= \frac{\delta(1+C/p_0)}{\sigma_1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Слагаемые сумм не превосходят $(C_\nu k^2 / (\nu n))^\nu$.

Для выражения в квадратных скобках верна оценка

$$\begin{aligned} \left[\sum_1^{k-1} + \sum_2^{k-2} \right] &\leq \left(1 + \frac{\beta\beta'k}{n} \right)^{k-1} + \left(1 + \frac{(1+\beta\beta')k}{n} \right)^{k-2} - 2 \\ &\quad - \frac{(1+\beta\beta')k(k-2)}{n}, \quad \beta' = \max \left(1, \frac{\beta}{2} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

В общем случае следует положить $\delta = 1$, $C = \mu_k = \max_{1 \leq i \leq k} p_i$.

3) «Вероятности» (меры) распределения паскалева типа определяются равенствами

$$p_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} p_0^n \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \quad 0 < p_1 < p_0.$$

Теорема 5. Пусть $q_{n,k}$ — вероятности значений суммы (15), а p_k — вероятности значений слагаемых, причем $0 < p_1 < p_0$. Имеет место разложение

$$\begin{aligned} q_{n,k} &= \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} p_0^n \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^k \\ &\quad \times \left\{ 1 + \frac{n^k(n-1)!}{(n+k-1)!} \left[\sum_{\nu=1}^{k-1} n^{-\nu} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{a_{\nu-j+1}^{(j)}}{\sigma_1^{\nu+j}} \frac{k!}{j!(k-\nu-j)!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\nu=2}^{k-2} n^{-\nu} \sum_{s=1}^{\nu-1} \sum_{j=1}^s \frac{1}{j!} \frac{a_{s-j+1}^{(j)}}{\sigma_1^{s+j}} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^{\nu-s} \frac{1}{i!} \frac{b_{\nu-s-i+1}^{(i)}}{\sigma_1^{\nu-s+i}} \frac{k!}{(k-\nu-j-i)!} \right) \Bigg] \Bigg\}, \quad (20)$$

причем в сумме $\sum_1^{k-1}$ слагаемые равны нулю при $k-\nu-j < 0$, а в сумме $\sum_2^{k-2}$ — при $k-\nu-j-i < 0$. Здесь

$$a_l^{(1)} = \frac{\sigma_{l+1}}{(l+1)!} - \frac{\sigma_1^{l+1}}{l+1}, \quad b_l^{(1)} = \frac{\sigma_1^{l+1}}{l+1}, \quad l = 1, 2, \dots,$$

$$a_l^{(j)} = \sum_{s=1}^l a_s^{(1)} a_{l-s+1}^{(j-1)}, \quad b_l^{(j)} = \sum_{s=1}^l b_s^{(1)} b_{l-s+1}^{(j-1)}, \quad j = 2, 3, \dots$$

Множитель $n^k(n-1)!/(n+k-1)!$ не превосходит единицы.

Суммы в (20) содержат лишь вероятности p_i , $i = 0, 1, \dots, k$. Если первые вероятности p_i , $i = 0, 1, \dots, t$, аппроксимируемого и аппроксимирующего распределений совпадают, то в суммах $\sum_1^{k-1}$ и $\sum_2^{k-2}$ первые t слагаемых равны нулю.

Оценка суммы $\sum_1^{k-1} + \sum_2^{k-2}$ аналогична оценке той же суммы в теореме 4.

6. Исследование безграничной делимости (б.д.). Известно, что произведение конечного числа характеристических функций (х.ф.) распределений Пуассона представляет х.ф. некоторого б.д. распределения.

Пусть $f(z)$ — производящая функция с.в. X (см. (15)), $\tilde{f}(t) = f(e^{it})$ есть х.ф. с.в. X , а σ_l — числовые характеристики, определенные в (2).

Теорема 6. Если ряд $\sum_{l=1}^{\infty} |\sigma_l|/l!$ сходится, то

$$\tilde{f}(t) = \prod_{\sigma_l \geq 0} \exp \left\{ \frac{\sigma_l}{l!} (e^{itl} - 1) \right\} / \prod_{\sigma_l < 0} \exp \left\{ -\frac{\sigma_l}{l!} (e^{itl} - 1) \right\}, \quad l \geq 1. \quad (21)$$

В частности, заметим, что для сходимости ряда $\sum_{l=1}^{\infty} |\sigma_l|/l!$ достаточно выполнения условия $p_k \leq p_0 \delta^k$, $\delta < \frac{1}{2}$, $k = 1, 2, \dots$ (см. (5)).

Из теоремы 6 следуют некоторые заключения.

Следствие 1. В (21) как числитель, так и знаменатель представляют собой произведения х.ф. распределений Пуассона, причем ряды $\sum_{\sigma_l \geq 0} |\sigma_l|/l!$ и $\sum_{\sigma_l < 0} |\sigma_l|/l!$ сходятся. Следовательно, в условиях теоремы х.ф. с.в. X выражается отношением двух х.ф. б.д. распределений.

Следствие 2. В условиях теоремы 6 любое решетчатое распределение может быть представлено сверткой законов Пуассона, среди которых могут оказаться и законы Пуассона с отрицательным параметром.

Следствие 3. Если в условиях теоремы 6 все $\sigma_l \geq 0$, $l = 1, 2, \dots$, то распределение с.в. X является б.д.

Следствие 4. Для того, чтобы распределение с.в. X не было б.д., достаточно условия $\sigma_2 < 0$, т.е. $2p_0 p_2 < p_1^2$.

Можно предположить, что число первых неотрицательных характеристик σ_l следует рассматривать как некоторую меру близости данного распределения к б.д. распределению.

Докажем некоторые, возможно, не очевидные, соотношения.

Д о к а ж е м (4). Из (1) имеем:

$$\begin{aligned}\log f(z) &= \log \varphi_0 + \log \left(1 + \frac{f(z) - \varphi_0}{\varphi_0} \right) \\ &= \log \varphi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \left(\frac{f(z) - \varphi_0}{\varphi_0} \right)^j,\end{aligned}$$

поскольку при достаточно малом z отношение в скобках не превосходит 1. Возводя в степени j и группируя члены по степеням z , получаем

$$\log f(z) = \log \varphi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(j)} z^{j+l-1} \right), \quad (22)$$

где

$$a_l^{(1)} = \frac{\varphi_l}{\varphi_0}, \quad a_l^{(j)} = \sum_{s=1}^l a_s^{(1)} a_{l-s+1}^{(j-1)}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad j = 2, 3, \dots$$

Вычислим коэффициенты $a_l^{(j)}$, учитывая, что по предположению $\varphi_l = \alpha \beta^l$. Находим

$$\begin{aligned}a_l^{(1)} &= \frac{\alpha}{\varphi_0} \beta^l, \\ a_l^{(2)} &= \sum_{s=1}^l \frac{\alpha}{\varphi_0} \beta^s \frac{\alpha}{\varphi_0} \beta^{l-s+1} = \left(\frac{\alpha}{\varphi_0} \right)^2 \beta^{l+1} l, \\ &\dots\dots\dots \\ a_l^{(j)} &= \left(\frac{\alpha}{\varphi_0} \right)^j \beta^{l+j-1} \frac{(l+j-2)!}{(j-1)!(l-1)!}\end{aligned}$$

(см. [8, с. 598, 26]). Теперь в (22) проводим еще одну перегруппировку членов по степеням z :

$$\begin{aligned}\log f(z) - \log \varphi_0 &= \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} \sum_{r=1}^{\nu} \frac{(-1)^{r-1}}{r} a_{\nu-r+1}^{(r)} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta^{\nu} z^{\nu} \sum_{r=1}^{\nu} (-1)^{r-1} \left(\frac{\alpha}{\varphi_0} \right)^r \frac{(\nu-1)!}{r!(\nu-r)!}.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\log f(z) - \log \varphi_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sigma_{\nu}}{\nu!} z^{\nu}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z , приходим к (4).

Д о к а ж е м (10). Доказательство проведем для вероятностей, т.е. докажем неравенство $|\sigma_\nu|/\nu! \leq q_{\nu,\nu}/(\nu p_0)^\nu$. В случае статистик доказательство аналогично. Вероятности $q_{\nu,\nu}$ сумм S_ν (см. (15)) имеют вид

$$q_{\nu,\nu} = \nu! \sum_{r=1}^{\nu} \frac{p_0^{\nu-r}}{(\nu-r)!} \sum_r \prod_{m=1}^{\nu} \frac{p_m^{l_m}}{l_m!}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Способ суммирования здесь тот же, что и в (3). В правой части (3) полагаем $\varphi_m = p_m$, минусы заменяем плюсами, правую часть умножаем на p_0'/p_0'' , каждое слагаемое умножаем на $\nu!/(r-1)!(\nu-r)! \geq 1$. В результате в правой части (3) получаем $q_{\nu,\nu}/(\nu p_0')^\nu$.

Д о к а ж е м (6). Неравенство следует из (10).

Д о к а ж е м (12). Из (9) выводим:

$$f_\varepsilon^n(z) = \exp \{n \log f_\varepsilon(z)\} = \exp \{n\sigma_0 + n\sigma_1 z + ny(\varepsilon)\},$$

где $y(\varepsilon) = \sum_{l=2}^{\infty} \sigma_l z^l \varepsilon^{l-1}/l!$. Здесь для построения необходимого разложения временно введен параметр $\varepsilon > 0$. Ясно, что $f_1(z) = f(z)$. Справедливо соотношение

$$e^{ny(\varepsilon)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{d^\nu}{d\varepsilon^\nu} e^{ny(\varepsilon)} \right]_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(ny(\varepsilon))^\nu}{\nu!},$$

т.е. разложение экспоненциальной функции строится двумя способами. Имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu \sum_{r=1}^{\nu} \sum_r \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{l_m!} \left(\frac{n\sigma_{m+1} z^{m+1}}{(m+1)!} \right)^{l_m} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{n^\nu}{\nu!} \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(\nu)} z^{l+2\nu-1} \varepsilon^{l+\nu-1} \right).$$

В левой части способ суммирования см. в (11). Здесь

$$a_l^{(1)} = \frac{\sigma_{l+1}}{(l+1)!}, \quad a_l^{(\nu)} = \sum_{s=1}^l a_s^{(1)} a_{l-s+1}^{(\nu-1)}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad \nu = 2, 3, \dots$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu z^\nu \sum_{r=1}^{\nu} n^r z^r \sum_r \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{l_m!} \left(\frac{\sigma_{m+1}}{(m+1)!} \right)^{l_m} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu z^\nu \sum_{r=1}^{\nu} \frac{n^r}{r!} a_{\nu-r+1}^{(r)} z^r, \\ \sum_r \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{l_m!} \left(\frac{\sigma_{m+1}}{(m+1)!} \right)^{l_m} &= \frac{a_{\nu-r+1}^{(r)}}{r!}. \end{aligned}$$

Оценим коэффициенты $a_l^{(\nu)}$, учитывая, что в силу (5) $|\sigma_{l+1}|/(l+1)! \leq h^{l+1}/(l+1)$, где $h = \delta(1 + C/\varphi_0)$:

$$|a_l^{(1)}| \leq \frac{h^{l+1}}{l+1},$$

$$\begin{aligned}
 |a_l^{(2)}| &\leq \sum_{s=1}^l \frac{h^{s+1}}{s+1} \frac{h^{l-s+1+1}}{l-s+1+1} \leq \frac{h^{l+3}}{2(l+1)} l, \\
 |a_l^{(3)}| &\leq \sum_{s=1}^l \frac{h^{s+1}}{s+1} \frac{h^{l-s+1+3}}{2(l-s+1+1)} \leq \frac{h^{l+5}}{2^2(l+1)} \frac{l(l+1)}{2}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 |a_l^{(\nu)}| &\leq \frac{h^{l+2\nu-1}}{2^{\nu-1}(l+1)} \frac{(l+\nu-2)!}{(l-1)!(\nu-1)!}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \sum_r \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{l_m!} \left(\frac{\sigma_{m+1}}{(m+1)!} \right)^{l_m} &\leq \frac{h^{\nu+r}}{2^{r-1}(\nu-r+2)} \frac{(\nu-1)!}{r!(r-1)!(\nu-r)!} \\
 &\leq \frac{h^{\nu+r}}{2^r} \frac{(\nu-1)!}{r!(r-1)!(\nu-r)!}.
 \end{aligned}$$

Подставляя оценку в (11), приходим к (12).

Покажем также, что слагаемые в (12) не превосходят $(C_\nu k^2/(\nu n))^\nu$.
Имеем:

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{\nu} \right| &\leq \sum_{\nu=1}^{k-1} \left(\frac{\beta}{n} \right)^{\nu \min(\nu, k-\nu)} \sum_{r=1}^{\nu} \left(\frac{\beta}{2} \right)^r \frac{(\nu-1)!}{(r-1)!(\nu-r)!} \frac{k!}{r!(k-\nu-r)!} \\
 &= \sum_{\nu=1}^{[k/3]} + \sum_{\nu=[k/3]+1}^{k-1}.
 \end{aligned}$$

Здесь $[l]$ — целая часть числа. Для первой суммы справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
 \sum_{\nu=1}^{[k/3]} &\leq \sum_{\nu=1}^{[k/3]} \left(\frac{\beta}{n} \right)^{\nu} \frac{k!}{\nu!(k-2\nu)!} \sum_{r=1}^{\nu} \left(\frac{\beta}{2} \right)^r \frac{(\nu-1)!}{(r-1)!(\nu-r)!} \\
 &\leq \frac{\beta}{2+\beta} \sum_{\nu=1}^{[k/3]} \frac{(k(k-\nu)(\beta/n)(1+\beta/2))^{\nu}}{\nu!}.
 \end{aligned}$$

Для второй суммы аналогично получаем

$$\sum_{\nu=[k/3]+1}^{k-1} \leq \frac{\beta}{2+\beta} \sum_{\nu=[k/3]+1}^{k-1} \left(\frac{\beta}{n} (1+\beta) \right)^{\nu} \frac{k!}{\nu m_1! m_2!}.$$

Здесь $m_1 = m_2 = ((k-\nu)/2)!$ при четном $k-\nu$ и $m_1 = ((k-\nu-1)/2)!$, $m_2 = ((k-\nu+1)/2)!$ при нечетном $k-\nu$. Остается оценить $k!/(m_1! m_2!)$. Рассмотрим случай $m_1 = m_2$ (второй случай рассматривается аналогично).

но). С учетом формулы Стирлинга находим:

$$\begin{aligned} \frac{k!}{(m_1!)^2} &\leq \frac{(2e)^{(k-\nu)/2}}{\sqrt{\pi(k-\nu)}} \frac{k(k-1)\dots(k-\nu)\dots((k-\nu)/2+1)}{(k-\nu)^{(k-\nu)/2}} \\ &\leq \frac{(2e)^\nu}{\sqrt{\pi(k-\nu)}} k(k-1)\dots(k-\nu+1) \leq \frac{(2ek)^\nu}{\sqrt{\pi(k-\nu)}}. \end{aligned}$$

Из этих оценок получаем доказываемый результат.

Д о к а ж е м (13). Имеем:

$$\begin{aligned} 1 + \left| \sum_{\nu} \right| &\leq 1 + \sum_{\nu=1}^{k-1} \left(\frac{\beta\beta'}{n} \right)^\nu \\ &\quad \times \frac{k!}{(k-\nu)!} \sum_{r=1}^{\min(\nu, k-\nu)} \frac{(\nu-1)!}{(r-1)!(\nu-r)!} \frac{(k-\nu)!}{r!(k-\nu-r)!} \\ &= 1 + \sum_{\nu=1}^{k-1} \left(\frac{\beta\beta'}{n} \right)^\nu \frac{k!}{(k-\nu)!} \frac{(k-1)!}{\nu!(k-\nu-1)!} \\ &\leq \sum_{\nu=0}^{k-1} \left(\frac{(k-1)!}{\nu!(k-\nu-1)!} \right) \left(\frac{k}{n} \beta\beta' \right)^\nu = \left(1 + \frac{k}{n} \beta\beta' \right)^{k-1} \end{aligned}$$

(см. [8, с. 617, 25]).

Д о к а ж е м (19). Оценка для $a_l^{(1)} = \sigma_{l+1}/(l+1)! - (-1)^l \sigma_1^l$ та же, что и для $\sigma_{l+1}/(l+1)!$ в теореме 3. Оценку для $b_l^{(j)}$ находим тем же способом, что и для $a_l^{(j)}$. Оценка суммы $\sum_{\nu=1}^{k-1}$ получена выше. Оценим сумму $\sum_{\nu=2}^{k-2}$. Последовательно оцениваем суммы по i, j, s, ν . Для суммы $\sum_i$ выводим:

$$\begin{aligned} \sum_i &\leq \frac{k!}{(k-\nu-j)!} \sum_{i=1}^{\min(\nu-s, k-\nu-j)} 2^{-i} \frac{(\nu-s-1)!}{(i-1)!(\nu-s-i)!} \frac{(k-\nu-j)!}{i!(k-\nu-j-i)!} \\ &= \frac{k!}{(k-\nu-j)!} \frac{(k-s-j-1)!}{(\nu-s)!(k-\nu-j-1)!} \\ &\leq \frac{k!}{j!(k-\nu-j)!} \frac{(k-s-2)!}{(\nu-s)!(k-\nu-2)!}, \end{aligned}$$

поскольку отношение $(k-s-j-1)!/(k-\nu-j-1)!$ убывает с возрастанием j . Для суммы $\sum_j$ находим:

$$\begin{aligned} \sum_j &\leq (\beta')^s \frac{k!}{(k-\nu)!} \frac{(k-s-2)!}{(\nu-s)!(k-\nu-2)!} \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{\min(s, k-\nu)} \frac{(s-1)!}{(j-1)!(s-j)!} \frac{(k-\nu)!}{j!(k-\nu-j)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\beta')^s \frac{k!}{(k-\nu)!} \frac{(k-s-2)!}{(\nu-s)!(k-\nu-2)!} \frac{(k-\nu+s-1)!}{s!(k-\nu-1)!} \\
&\leq (\beta')^s \frac{k!}{(k-\nu)!} \frac{(k-2)!}{(k-\nu-2)!s!(\nu-s)!},
\end{aligned}$$

так как произведение $(k-s-2)!(k-\nu+s-1)!$ наибольшего значения достигает при $s = \nu - 1$. Для сумм $\sum_s$ и $\sum_\nu$ справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}
\sum_s &\leq \frac{k!}{(k-\nu)!} \frac{(k-2)!}{\nu!(k-\nu-2)!} \sum_{s=1}^{\nu-1} \frac{\nu!}{s!(\nu-s)!} (\beta\beta')^s \\
&\leq \frac{(k-2)!}{\nu!(k-\nu-2)!} k^\nu (1 + \beta\beta')^\nu, \\
\sum_\nu &\leq \sum_{\nu=2}^{k-2} \frac{(k-2)!}{\nu!(k-\nu-2)!} \left(\frac{k}{n} (1 + \beta\beta') \right)^\nu \\
&= \left(1 + \frac{k}{n} (1 + \beta\beta') \right)^{k-2} - 1 - \frac{k(k-2)}{n} (1 + \beta\beta').
\end{aligned}$$

Отсюда и из (13) приходим к (19).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крамер Г. Об одной новой предельной теореме теории вероятностей. — Успехи мат. наук, 1944, т. X, с. 166–178.
2. Ризтер В. Локальные предельные теоремы для больших уклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1957, т. 2, в. 2, с. 214–229.
3. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.
4. Саулис Л., Статулявичюс В. Предельные теоремы о больших уклонениях. Вильнюс: Мокслас, 1989, 205 с.
5. Калинин В. М. Гамма-функция и вероятностные предельные теоремы. — Труды МИАН СССР, 1970, т. 111, с. 163–194.
6. Бикялис А. П. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. — Лит. матем. сб., 1978, т. XVII, № 4, с. 5–14.
7. Жемайтис А. Асимптотические разложения для функции распределения. — Лит. матем. сб., 1973, т. XIII, № 3, с. 91–96.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981, 797 с.
9. Franken P. Approximation der Verteilungen von Summen unabhängiger nichtnegativer ganzzahliger Zufallsgrossen durch Poissonsche Verteilungen. — Math. Nachr., 1964, B. 27, № 1, S. 303–340.

Поступила в редакцию
27.IX.1994

Исправленный вариант
17.V.1995