Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Ибрагимов, Ш. Шарахметов, О точной константе в неравенстве Розенталя, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 2, 341–350

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1807>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:49:47

subject to condition (1.10), then, by the comparison principle (see, e.g., [1, Theorem 0.6]), $v \geq u$ on D .

In the case (II) we consider relatively open relatively compact sets $O_k \uparrow O$ such that $\overline{O_k} \subset O_{k+1}$. Construct a sequence of continuous functions $f_k \leq f$ on ∂D such that $f_k = f$ on O_k , $f_k = 0$ on $\partial D \setminus O_{k+1}$. By (I), $u_k = V_D(f_k)$ is the minimal element of $\mathcal{U}(D)$ subject to the condition $u_k = f_k$ on O_{k+1} . We have $u_k \uparrow u$. By Proposition 4.1, $u \in \mathcal{U}(D)$ and $u = f$ on O . If v has the same properties, then $v = f \geq f_k = u_k$ on O_{k+1} . Hence, $v \geq u_k$ for every k which implies $v \geq u$.

In the case (III), we introduce functions $f_k = f \wedge k$. By (II), $u_k = V_D(f_k)$ is the minimal element of $\mathcal{U}(D)$ such that $u_k = f_k$ on O . We have $u_k \uparrow u$. Let $c \in O$. If $f(c) < \infty$, then there exist a neighborhood $\tilde{O}$ of c and k such that $f < k$ in $\tilde{O}$. Hence $u_k = f_k = f$ in $\tilde{O}$. If $f(c) = \infty$, then, for every k , $\liminf_{x \rightarrow c} u(x) \geq \liminf_{x \rightarrow c} u_k(x) = f_k(c) = k$ and therefore $u(c) = \infty$.

Acknowledgment. I am indebted to S. E. Kuznetsov for valuable discussions on the subject of this paper. Some of his suggestions have been used in the proofs of Lemmas 3.1 and 3.3.

REFERENCES

1. Dynkin E. B. A probabilistic approach to one class of nonlinear differential equations. — Probab. Theory Relat. Fields, 1991, v. 89, p. 89–115.
2. Dynkin E. B. Superdiffusions and parabolic nonlinear differential equations. — Ann. Probab., 1992, v. 20, p. 942–962.
3. Dynkin E. B., Kuznetsov S. E. Linear additive functionals of superdiffusions and related nonlinear p.d.e. — Trans. Amer. Math. Soc., 1996, v. 348, p. 1959–1987.
4. Kuratowski K. Topology. New York–London: Academic Press, 1966.

Поступила в редакцию
25.XII.1996

© 1997 г.

ИБРАГИМОВ Р.*, ШАРАХМЕТОВ Ш.*

О ТОЧНОЙ КОНСТАНТЕ В НЕРАВЕНСТВЕ РОЗЕНТАЛЯ

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые симметрично распределенные случайные величины с конечным p -м моментом, $2 < p < \infty$. В настоящей статье показано, что точная константа C_p^* в неравенстве Розенталя

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_p \leq C_p \max \left(\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_2, \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_p^p \right)^{1/p} \right)$$

имеет вид

$$C_p^* = \left(1 + \frac{2^{p/2}}{\pi^{1/2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \right)^{1/p}, \quad 2 < p < 4,$$

$$C_p^* = \|\xi_1 - \xi_2\|_p, \quad p \geq 4,$$

*Ташкентский государственный университет, 700095 Ташкент, Узбекистан.

где $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, ξ_1, ξ_2 — независимые пуассоновские случайные величины с параметром 0.5. Доказано также, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} C_p^* \frac{\ln p}{p} = \frac{1}{e}.$$

Ключевые слова и фразы: неравенство Розенталя, симметрично распределенная случайная величина, пуассоновская случайная величина, момент.

Пусть $\|\xi\|_s$ — L_s -норма случайной величины ξ : $\|\xi\|_s = (E|\xi|^s)^{1/s}$, где $E(\cdot)$ — оператор математического ожидания.

Розенталем [1] доказано неравенство:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_p \leq C_p \max \left(\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_2, \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_p^p \right)^{1/p} \right), \quad (1)$$

где C_p — константа, зависящая только от p , $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые симметрично распределенные случайные величины (с.в.) с конечным p -м моментом, $2 < p < \infty$. При этом в качестве C_p можно взять $C_p = 2^p$.

Уточнению и обобщению неравенства (1) посвящены такие работы, как [2], [3], [5], [9].

Из оценки В. В. Сазонова [2] можно получить неравенство (1) с константой, имеющей порядок роста $2^{p/4}$.

Из результатов, полученных в работах [3], [4], следует, что в качестве C_p можно взять $C_p = Lp$, где L — некоторая абсолютная постоянная.

Пусть C_p^* — точная константа в неравенстве (1), т.е.

$$C_p^* = \frac{\sup \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_p}{\max \left(\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_2, \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_p^p \right)^{1/p} \right)},$$

где $\sup$ берется по всем независимым симметрично распределенным невырожденным с.в. $\xi_1, \dots, \xi_n$ с конечным p -м моментом, $2 < p < \infty$.

В работе [5] показано, что

$$\frac{p}{2^{1/2} e \max(1, \ln p)} \leq C_p^* \leq \frac{7.35p}{\max(1, \ln p)},$$

т.е. C_p^* ведет себя как $p/\ln p$ при $p \rightarrow \infty$.

Задача определения точной константы C_p^* тесно связана с проблемой вычисления экстремумов выпуклого функционала на классе сумм симметрично распределенных независимых случайных величин. Эта восходящая к работе Ю. В. Прохорова [6] проблема исследовалась в работах [7], [8].

В настоящей работе получено явное выражение для C_p^* при $p > 2$ и найдена точная асимптотика C_p^* при $p \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Точная константа C_p^* в неравенстве Розенталя имеет вид:

$$C_p^* = \left(1 + \frac{2^{p/2}}{\pi^{1/2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \right)^{1/p}, \quad 2 < p < 4,$$

$$C_p^* = \|\xi_1 - \xi_2\|_p, \quad p \geq 4,$$

где $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, ξ_1, ξ_2 — независимые пуассоновские случайные величины с параметром 0.5.

Теорема 2. $C_{2s}^* = T_{2s}^{1/(2s)}$, где T_{2s} — число разбиений $(2s)$ -множества (множества, состоящего из $2s$ элементов) на части, мощности которых суть четные числа, $s \in \mathbb{N}$.

Следствие. $\lim_{p \rightarrow \infty} C_p^*(\ln p)/p = 1/e$.

З а м е ч а н и е 1. Из теорем 1 и 2 вытекает следующее представление для чисел T_{2s} , являющееся аналогом формулы Добинского для чисел Белла:

$$T_{2s} = \frac{2}{e} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^{2s}}{k!(m+k)!2^{m+2k}}.$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится один вспомогательный результат, который представляет и самостоятельный интерес.

В обозначениях в основном будем следовать работе [8]. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые симметрично распределенные с.в. с конечным p -м моментом, $2 < p < \infty$, $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $a_i^p \leq b_i$, $i = 1, \dots, n$, $A, B, D \geq 0$. Положим

$$(\xi, n) = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad (a, n) = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

$$(b, n) = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

$$M_1(n, a, b) = \left\{ (\xi, n): E\xi_i^2 = a_i^2, E|\xi_i|^p = b_i, i = 1, \dots, n \right\},$$

$$M_2(n, a, b) = \left\{ (\xi, n): E\xi_i^2 = a_i^2, E|\xi_i|^p = b_i, i = 1, \dots, n \right\},$$

$$U_1(A, B) = \left\{ (\xi, n): n \geq 1, \sum_{i=1}^n E\xi_i^2 = B^2, \sum_{i=1}^n E|\xi_i|^p = A \right\},$$

$$U_2(A, B) = \left\{ (\xi, n): n \geq 1, \sum_{i=1}^n E\xi_i^2 \leq B^2, \sum_{i=1}^n E|\xi_i|^p \leq A \right\},$$

$$U(D) = \left\{ (\xi, n): n \geq 1, \max \left(\left(\sum_{i=1}^n E|\xi_i|^2 \right)^{p/2}, \sum_{i=1}^n E|\xi_i|^p \right) = D \right\}.$$

Пусть $\xi_1(A, B), \xi_2(A, B)$ — независимые пуассоновские с.в. с параметром $\frac{1}{2}(B^p/A)^{2/(p-2)}$, $\varepsilon_1(a_1, b_1, p), \dots, \varepsilon_n(a_n, b_n, p)$ — независимые с.в. с распределением $P\{\varepsilon(a, b, p) = 0\} = 1 - (a^p/b)^{2/(p-2)}$, $P\{\varepsilon(a, b, p)\} = \pm(b/a^2)^{1/(p-2)} = \frac{1}{2}(a^p/b)^{2/(p-2)}$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — независимые с.в. с распределением $P\{\varepsilon_1 = 1\} = P\{\varepsilon_1 = -1\} = \frac{1}{2}$, $i = 1, \dots, n$.

Предложение. При $2 < p < 4$

$$\sup_{(\xi, n) \in M_k(n, a, b)} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i^p) + E \left| \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right|^p, \quad k = 1, 2, \quad (2)$$

$$\sup_{(\xi, n) \in U_k(A, B)} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p = A + \frac{2^{p/2}}{\pi^{1/2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) B^p, \quad k = 1, 2. \quad (3)$$

При $3 \leq p < 4$

$$\inf_{(\xi, n) \in M_1(n, a, b)} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p = E \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(a_i, b_i, p) \right|^p, \quad (4)$$

При $p \geq 4$

$$\sup_{(\xi, n) \in M_k(n, a, b)} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p = E \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(a_i, b_i, p) \right|^p, \quad k = 1, 2, \quad (5)$$

$$\sup_{(\xi, n) \in U_k(A, B)} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p = \left(\frac{A}{B^2} \right)^{p/(p-2)} E |\xi_1(A, B) - \xi_2(A, B)|^p, \quad k = 1, 2, \quad (6)$$

$$\inf_{(\xi, n) \in M_1(n, a, b)} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i^p) + E \left| \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right|^p. \quad (7)$$

З а м е ч а н и е 2. Соотношения (5)–(7) являются содержанием теоремы 5 работы [8].

З а м е ч а н и е 3. Соотношения (5), (7) означают, что при $p \geq 4$

$$\sup_{(\xi, n) \in M_k(n, a, b)} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p, \quad k = 1, 2,$$

достигается на трехточечных, а

$$\inf_{(\xi, n) \in M_1(n, a, b)} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p$$

— на двухточечных распределениях. Соотношения (2), (4) показывают, что в случае $3 \leq p < 4$ ответ меняется с точностью до наоборот.

З а м е ч а н и е 4. Из соотношения (2) при $k = 1$, $n = 2$, $p = 3$ следует, что для независимых случайных величин X и Y с одинаковым симметричным распределением и конечным третьим моментом имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} E|X + Y|^3 &\leq 2E|X|^3 + 2(EX^2)^{3/2}, \\ E|X - Y|^3 &\leq 2E|X|^3 + 2(EX^2)^{3/2}, \end{aligned}$$

постоянные в которых оптимальны. Эти неравенства при условии $EX = 0$ были доказаны Эсseenом в работе [9].

Прежде чем приступить к доказательству соотношений (2)–(4), докажем несколько лемм.

Пусть ε — с.в. с распределением $P\{\varepsilon = 1\} = P\{\varepsilon = -1\} = \frac{1}{2}$. Следуя [8], положим

$$\begin{aligned} H(x, p, z) &= E|\varepsilon x^{1/2} + z|^p - x^{p/2} - z^p, \\ R(x, p, z) &= x^{-2/(p-2)} \left(E|\varepsilon x^{1/(p-2)} + z|^p - x^p - z^p \right), \quad x > 0, \quad z > 0. \end{aligned}$$

Лемма 1. Функция $H(x, p, z)$ неотрицательна и вогнута по x при $p \in (2, 4)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p \in (2, 4)$, $f(x) = E|\varepsilon x + z|^p - x^p - z^p$. Нетрудно проверить, что

$$f'(x) = p \left(\frac{1}{2} \left((x+z)^{p-1} + |x-z|^{p-2}(x-z) \right) - x^{p-1} \right) \geq 0$$

при всех $x \geq 0$, $z \geq 0$. Поскольку $f(0) = 0$, то функция $H(x, p, z)$ неотрицательна.

Покажем, что $H(x, p, z)$ вогнута по x при $p \in (2, 4)$. Поскольку

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0.25 p x^{p/2-2} \left((p-2) E|\varepsilon + u|^{p-2} - E|\varepsilon + u|^{p-2} \varepsilon u - (p-2) \right),$$

где $u = x^{-1/2}z$, достаточно установить справедливость неравенства

$$g(u) = (p-2) E|\varepsilon + u|^{p-2} - E|\varepsilon + u|^{p-2} \varepsilon u - (p-2) \leq 0$$

при $u \geq 0$, $p \in (2, 4)$.

При $u \geq 1$, $0 \leq \alpha < 1$ имеют место неравенства:

$$\begin{aligned}(u + \alpha)(u - 1)^\alpha &\leq (u + \alpha) \left(1 - \frac{\alpha}{u} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2u^2} \right) u^\alpha \\ &\leq (u - \alpha) \left(1 - \frac{\alpha}{u} + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2u^2} \right) u^\alpha \leq (u - \alpha)(u + 1)^\alpha,\end{aligned}$$

т.е. $\alpha E|\varepsilon + u|^\alpha \leq E|\varepsilon + u|^\alpha \varepsilon u$. Следовательно, $g(u) \leq 0$ при $p \in (2, 3)$, $u \geq 1$ и $g'(u) \leq 0$ при $p \in [3, 4)$, $u \geq 1$.

Поскольку при $0 \leq u < 1$ и $0 \leq \alpha < 1$

$$E|\varepsilon + u|^\alpha \leq 1, \quad (\alpha - u)(1 + u)^\alpha \leq (u + \alpha)(1 - u)^\alpha,$$

то $g(u) \leq 0$ при $p \in (2, 3)$, $0 \leq u < 1$ и $g'(u) \leq 0$ при $p \in [3, 4)$, $0 \leq u < 1$.

Объединяя полученные соотношения и учитывая равенство $g(0) = 0$, заключаем, что $g(u) \leq 0$ при $p \in (2, 4)$ и $u \geq 0$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для всех $p \in (2, 4)$, $0 \leq a_1 \leq a_2$, $0 \leq b_1 \leq b_2$, $z \geq 0$ имеет место неравенство

$$b_1 - a_1^p + E|a_1 \varepsilon + z|^p \leq b_2 - a_2^p + E|a_2 \varepsilon + z|^p.$$

Доказательство. Утверждение леммы 2 очевидным образом следует из того, что, как было показано при проверке неотрицательности функции $H(x, p, z)$, функция $E|\varepsilon x + z|^p - x^p$ не убывает по $x \geq 0$ при $z \geq 0$.

Лемма 3. Функция $R(x, p, z)$ неотрицательна и выпукла по x при $p \in [3, 4)$.

Доказательство. Из неравенства Иенсена следует, что функция $R(x, p, z)$ неотрицательна при $p \geq 1$. Для доказательства выпуклости $R(x, p, z)$ по x при $p \in [3, 4)$ достаточно проверить справедливость неравенства (см. [8, доказательство леммы 3.3]):

$$M(u) = (p - 3) E|\varepsilon u + 1|^{p-3} (\varepsilon u + 1) - (p - 1) E|\varepsilon u + 1|^{p-2} + 2 \leq 0, \quad u \geq 0.$$

Нетрудно показать справедливость следующих неравенств:

$$(\alpha u - 1)(u + 1)^\alpha - (\alpha u + 1)(u - 1)^\alpha \leq 0$$

при $u \geq 1$, $0 \leq \alpha < 1$,

$$\begin{aligned}(\alpha u + 1)(1 - u)^\alpha &\leq (\alpha u + 1) \left(1 - \alpha u + \frac{\alpha(\alpha - 1)u^2}{2} \right) \\ &\leq (1 - \alpha u) \left(1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha - 1)u^2}{2} \right) \leq (1 - \alpha u)(u + 1)^\alpha\end{aligned}$$

при $0 \leq u < 1$, $0 \leq \alpha < 1$. Поскольку

$$M'(u) = \frac{p-1}{2} \left[((p-3)u - 1)(u+1)^{p-3} - ((p-3)u + 1)(u-1)^{p-3} \right]$$

при $u \geq 1$ и

$$M'(u) = \frac{p-1}{2} \left[((p-3)u + 1)(1-u)^{p-3} - (1 - (p-3)u)(u+1)^{p-3} \right]$$

при $0 \leq u < 1$, то отсюда следует, что $M'(u) \leq 0$ при $u \geq 0$. Учитывая, что $M(0) = 0$, получаем утверждение леммы 3.

Следующие леммы 4–7 являются аналогами лемм, доказанных в работе [8].

Лемма 4. Пусть ξ — симметрично распределенная случайная величина, случайные величины ξ, η, ε независимы, $E\xi^2 = a^2$, $E|\xi|^p < \infty$, $E|\eta|^p < \infty$, $p \in (2, 4)$. Тогда

$$E|\xi + \eta|^p \leq E|\xi|^p + E|\varepsilon\alpha + \eta|^p - a^p. \quad (8)$$

Доказательство. Из доказательства леммы 7.4 в [8] следует, что для доказательства неравенства (8) достаточно проверить справедливость неравенства

$$H(x^2, p, z)\lambda + H(y^2, p, z)\mu \leq H(a^2)$$

при $\lambda + \mu \leq 1$, $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda x^2 + \mu y^2 = a^2$. В силу леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} H(x^2, p, z)\lambda + H(y^2, p, z)\mu &= (\lambda + \mu) \left(H(x^2, p, z) \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + H(y^2, p, z) \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) \\ &\leq (\lambda + \mu) H\left(\frac{a^2}{\lambda + \mu}\right) = (\lambda + \mu) H\left(\frac{a^2}{\lambda + \mu}\right) + (1 - \lambda - \mu) H(0) \leq H(a^2). \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть ξ — симметрично распределенная случайная величина, случайные величины ξ, η, ε независимы, $E|\eta|^p < \infty$, $E\xi^2 \leq a^2$, $E|\xi|^p \leq b$, $a^p \leq b$, $a, b \geq 0$, $p \in (2, 4)$. Тогда

$$E|\xi + \eta|^p \leq b + E|\varepsilon\alpha + \eta|^p - a^p.$$

Доказательство. Лемма 5 вытекает из лемм 2 и 4.

Лемма 6. Если случайные величины η и ε независимы, $E|\eta|^p < \infty$, $a^p \leq b$, $a, b \geq 0$, $p \in (2, 4)$, то

$$\sup_{\xi} E|\xi + \eta|^p = b + E|\varepsilon\alpha + \eta|^p - a^p,$$

где $\sup$ берется по всем симметрично распределенным случайным величинам ξ , независимым от η и удовлетворяющим условиям $E\xi^2 \leq a^2$, $E|\xi|^p \leq b$.

Доказательство. Лемма 6 очевидным образом следует из леммы 5 и доказательства леммы 7.5 в [8].

Лемма 7. Пусть ξ — симметрично распределенная случайная величина, случайные величины $\xi, \eta, \varepsilon(a, b, p)$ независимы, $E|\eta|^p < \infty$, $E\xi^2 = a^2$, $E|\xi|^p = b$, $a^p \leq b$, $a, b \geq 0$, $p \in [3, 4)$. Тогда

$$E|\xi + \eta|^p \geq E|\varepsilon(a, b, p) + \eta|^p.$$

Доказательство леммы 7 проводится аналогично доказательству леммы 7.1 в [8] с заменой знаков неравенств в (7.2) и (7.3) на противоположные в силу леммы 3.

Доказательство предложения. Неравенства (2) и (4) легко получаются из лемм 6 и 7 по индукции.

Докажем соотношение (3). Пусть

$$\begin{aligned} D_1^n(A, B) &= \left\{ (a, n), (b, n): a_i \geq 0, b_i \geq 0, a_i^p \leq b_i, i = 1, \dots, n, \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^n a_i^2 = B^2, \sum_{i=1}^n b_i = A \right\}, \end{aligned}$$

$$D_2^n(A, B) = \left\{ (a, n), (b, n): a_i \geq 0, b_i \geq 0, a_i^p \leq b_i, i = 1, \dots, n, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq B^2, \sum_{i=1}^n b_i \leq A \right\}, \\ D_1(A, B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_1^n(A, B), \quad D_2(A, B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_2^n(A, B).$$

Поскольку (см. [10])

$$E \left| \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right|^p \leq \frac{2^{p/2}}{\pi^{1/2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) B^p$$

при $\sum_{i=1}^n a_i^2 = B^2$, то

$$\sup_{(\xi, n) \in U_k(A, B)} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p = \sup_{(a, n), (b, n) \in D_k(A, B)} \sup_{(\xi, n) \in M_1(n, a, b)} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p \\ = \sup_{(a, n), (b, n) \in D_k(A, B)} \sum_{i=1}^n (b_i - a_i^p) + E \left| \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right|^p \\ \leq A + \frac{2^{p/2}}{\pi^{1/2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) B^p.$$

Так как

$$A + \sup_n B^p \left(E \left| \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{n^{1/2}} \right|^p - n^{1-p/2} \right) = A + \frac{2^{p/2}}{\pi^{1/2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) B^p,$$

то

$$\sup_{(\xi, n) \in U_k(A, B)} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p = A + \frac{2^{p/2}}{\pi^{1/2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) B^p.$$

Доказательство теоремы 1. Используя неравенства

$$\sup_{(\xi, n) \in U_1(D, D^{1/p})} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p \leq \sup_{(\xi, n) \in U(D)} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p \leq \sup_{(\xi, n) \in U_2(D, D^{1/p})} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p$$

и соотношения (3), (6), получаем, что

$$\sup_{(\xi, n) \in U(D)} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p = \left(1 + \frac{2^{p/2}}{\pi^{1/2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \right) D, \quad 2 < p < 4, \\ \sup_{(\xi, n) \in U(D)} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p = E |\theta_1 - \theta_2|^p D, \quad p \geq 4.$$

Отсюда и из очевидного соотношения

$$C_p^* = \sup_{D > 0} \left(\sup_{(\xi, n) \in U(D)} \frac{1}{D} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p \right)^{1/p}$$

следует утверждение теоремы.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2, сформулируем следующую лемму.

Лемма 8 [7]. При $p = 2s$, $s \in \mathbb{N}$, имеет место соотношение

$$\sup_{(\xi, n) \in U_1(A, B)} \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p = \sum_{j=1}^s \Gamma_{j,s} \left(A^{s-j} B^{2s(j-1)} \right)^{1/(s-1)},$$

где $\Gamma_{j,s} = (2s)! \sum_{r=1}^j \sum \prod_{k=1}^r ((2m_k)!)^{-j_k} / j_k!$, внутренняя сумма распространена на все натуральные $m_1 > \dots > m_r$ и $j_1, \dots, j_r$, удовлетворяющие условиям $m_1 j_1 + \dots + m_r j_r = s$, $j_1 + \dots + j_r = j$.

Доказательство теоремы 2. Из леммы 8 очевидным образом следуют соотношения:

$$\sup_{(\xi, n) \in U_k(D, D^{1/p})} \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p = \left(\sum_{j=1}^s \Gamma_{j,s} \right) D = T_{2,s} D, \quad k = 1, 2,$$

где $T_{2,s}$ — число разбиений $(2s)$ -множества на части, мощности которых суть четные числа (см. [11, с. 280–281]). Как и при доказательстве теоремы 1, отсюда получаем, что $C_{2,s}^* = T_{2,s}^{1/(2s)}$. Теорема 2 доказана.

Доказательство следствия. Мы докажем более сильный результат:

$$C_p^* = \frac{p}{e \ln p} \left(1 + o \left(\frac{\ln^2 \ln p}{\ln p} \right) \right).$$

Из теоремы 1 следует, что

$$(C_p^*)^p = \frac{2}{e} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^p}{k!(m+k)! 2^{m+2k}}.$$

Прежде всего, заметим, что

$$\frac{2}{e} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^p}{2^m m!} \leq (C_p^*)^p \leq \frac{2}{e} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^p}{2^m m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k} k!} \leq \frac{32}{15e} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^p}{2^m m!}. \quad (9)$$

Обозначим $S = \sum_{m=1}^{\infty} m^p / (2^m m!)$. Вычисление асимптотики S проведем аналогично вычислению асимптотики для чисел Белла [11, с. 283].

Разобьем сумму S на три суммы

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \sum_{m=1}^{\mu-1} + \sum_{m=\mu}^{\nu} + \sum_{m=\nu+1}^{\infty},$$

где $\mu, \nu = [e^r/2 + Ap^{1/2}]$, r — единственное решение уравнения $re^r = 2p$, A — положительная константа.

Применяя формулу Стирлинга, получаем (все погрешности имеют экспоненциальный характер):

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{-Ap^{1/2}}^{Ap^{1/2}} \left(m + \left[\frac{e^r}{2} \right] \right)^{p-m-[e^r/2]-1/2} \left(\frac{e}{2} \right)^{[e^r/2]+m} (1 + o(1)) \\ &= \frac{1}{(2\pi(r+1))^{1/2}} \left(\frac{e^r}{2} \right)^{p-e^r/2} \left(\frac{e}{2} \right)^{e^r/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{-Ap^{1/2}}^{Ap^{1/2}} \exp\left(-\frac{m^2 r(r+1)}{2p}\right) \left(\frac{r(r+1)}{m}\right)^{1/2} (1+o(1)) \\
& = \frac{1}{(2\pi(r+1))^{1/2} 2^p} \exp\left(p\left(r+\frac{1}{r}-1\right)\right) \int_{-A(p(r+1))^{1/2}}^{A(p(r+1))^{1/2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy (1+o(1)) \\
& = \frac{1}{(r+1)^{1/2} 2^p} \exp\left(p\left(r+\frac{1}{r}-1\right)\right) (1+o(1)).
\end{aligned}$$

По аналогии с [11] можно показать, что при некотором A

$$\frac{S_1}{S_2} = O\left(\frac{1}{r} \left(\frac{r}{p}\right)^{(r+1)/2}\right), \quad \frac{S_3}{S_2} = O\left(\frac{1}{r} \left(\frac{r}{p}\right)^{(r+1)/2}\right).$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{(r+1)^{1/2} 2^p} \exp\left(p\left(r+\frac{1}{r}-1\right)\right) (1+o(1)),$$

где r — единственное решение уравнения $re^r = 2p$.

Из (9), учитывая, что при больших p

$$r = \ln 2p - \ln \ln 2p + O\left(\frac{\ln \ln p}{\ln p}\right),$$

получаем:

$$\begin{aligned}
C_p^* &= S^{1/p} \left(1 + o\left(\frac{1}{p}\right)\right) = 0.5 \exp\left(r + \frac{1}{r} - 1\right) \left(1 + o\left(\frac{\ln p}{p}\right)\right) \\
&= \frac{p}{e \ln p} \left(1 + o\left(\frac{\ln^2 \ln p}{\ln p}\right)\right).
\end{aligned}$$

Следствие доказано.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту за замечания, способствовавшие улучшению изложения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rosenthal H. P.* On the subspaces of L^p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables. — *Israel J. Math.*, 1970, v. 8, № 3, p. 273–303.
2. *Сазонов В. В.* К оценке моментов сумм независимых случайных величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1974, т. XIX, в. 2, с. 383–386.
3. *Пинелис И. Ф.* Оценки моментов бесконечномерных мартингалов. — *Матем. заметки*, 1980, т. 27, № 6, с. 953–958.
4. *Нагаев С. В., Пинелис И. Ф.* Некоторые неравенства для распределений сумм независимых случайных величин. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1977, т. XXII, в. 2, с. 254–263.
5. *Johnson W. B., Schechtman G., Zinn J.* Best constants in moment inequalities for linear combinations of independent and exchangeable random variables. — *Ann. Probab.*, 1985, v. 13, № 1, p. 234–253.

6. Прохоров Ю.В. Экстремальные задачи в предельных теоремах. — В кн.: Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс, 1962, с. 77–84.
7. Пинелис И. Ф., Утев С. А. Оценки моментов независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. XXIX, в. 3, с. 554–557.
8. Утев С. А. Экстремальные задачи в моментных неравенствах. — Труды Ин-та матем. СО АН СССР, 1985, т. 5, с. 56–75.
9. Esseen C.-G. Bounds for the absolute third moments. — Scand. J. Statist., 1975, v. 2, № 3, p. 149–152.
10. Naagerup U. The best constants in the Khintchine inequality. — Studia Math., 1982, v. 70, p. 232–283.
11. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию
5.X.1995

© 1997 г.

ОСТРОВСКИЙ Е. И.*

ОЦЕНКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМУМА СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Пусть $\xi(t)$ — случайное поле со значениями в $\mathbf{R}^1$, определенное при $t \in T$, T — произвольное множество. В статье выводятся двусторонние экспоненциальные оценки для $P(T, u) = P\{\sup_{t \in T} \xi(t) > u\}$:

$$C_1 g_2(u) \leq \ln P(T, u) + g_1(u) \leq C_2 g_2(u),$$

где $g_1(u)$ — выпуклая вниз функция, $u \rightarrow \infty \Rightarrow \lim g'_1(u) = \infty$, $\lim [g_2(u)/g_1(u)] = 0$, C_k — положительные конечные величины, не зависящие от u .

Ключевые слова и фразы: энтропия, пространства $B(\varphi)$, энтропийный росток, емкость, экспоненциальная оценка.

Настоящая статья представляет собой обобщение результатов работы [1], где имеются ссылки на предшествующие работы. Пусть $\xi(t)$ — случайное поле, определенное при $t \in T$, T — произвольное множество, со значениями в $\mathbf{R}^1$, $u > 2$, $P(T, u) = P\{\sup_{t \in T} \xi(t) > u\}$. Наша цель — вывод двусторонних оценок вида

$$C_1 g_2(u) \leq \ln P(T, u) + g_1(u) \leq C_2 g_2(u). \quad (1)$$

Здесь g_1 выпукла вниз и $\lim_{u \rightarrow \infty} [g_2(u)/g_1(u)] = 0$; символами C_k в дальнейшем будем обозначать конечные положительные величины, не зависящие от u и других существенных в данном контексте параметров (t, s, λ и др.) и не обязательно одинаковые в различных случаях — точные их значения мы здесь не выписываем, однако они «конструктивны», т.е. сравнительно легко выражаются через исходные данные.

По сравнению с [1] в данной статье мы отказываемся от условия субгауссовости $\xi(t)$, заменяя его значительно более слабым условием Крамера, являющимся и необходимым для (1); учитываем неоднородность $\xi(t)$; приводим примеры классов полей, для которых верхние оценки отличаются от нижних степенным множителем или только мультипликативной константой.

*Обнинский институт атомной энергетики, Студенческий городок, 1, 249020 Обнинск, Калужская обл., Россия.