Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Островский, Оценки распределения максимума случайного поля, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 2, 350–358

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1808>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 15:41:35

6. Прохоров Ю.В. Экстремальные задачи в предельных теоремах. — В кн.: Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс, 1962, с. 77–84.
7. Пинелис И. Ф., Утев С. А. Оценки моментов независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. XXIX, в. 3, с. 554–557.
8. Утев С. А. Экстремальные задачи в моментных неравенствах. — Труды Ин-та матем. СО АН СССР, 1985, т. 5, с. 56–75.
9. Esseen C.-G. Bounds for the absolute third moments. — Scand. J. Statist., 1975, v. 2, № 3, p. 149–152.
10. Haagerup U. The best constants in the Khintchine inequality. — Studia Math., 1982, v. 70, p. 232–283.
11. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию
5.X.1995

© 1997 г.

ОСТРОВСКИЙ Е. И.*

ОЦЕНКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМУМА СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Пусть $\xi(t)$ — случайное поле со значениями в $\mathbf{R}^1$, определенное при $t \in T$, T — произвольное множество. В статье выводятся двусторонние экспоненциальные оценки для $P(T, u) = P\{\sup_{t \in T} \xi(t) > u\}$:

$$C_1 g_2(u) \leq \ln P(T, u) + g_1(u) \leq C_2 g_2(u),$$

где $g_1(u)$ — выпуклая вниз функция, $u \rightarrow \infty \Rightarrow \lim g'_1(u) = \infty$, $\lim [g_2(u)/g_1(u)] = 0$, C_k — положительные конечные величины, не зависящие от u .

Ключевые слова и фразы: энтропия, пространства $B(\varphi)$, энтропийный росток, емкость, экспоненциальная оценка.

Настоящая статья представляет собой обобщение результатов работы [1], где имеются ссылки на предшествующие работы. Пусть $\xi(t)$ — случайное поле, определенное при $t \in T$, T — произвольное множество, со значениями в $\mathbf{R}^1$, $u > 2$, $P(T, u) = P\{\sup_{t \in T} \xi(t) > u\}$. Наша цель — вывод двусторонних оценок вида

$$C_1 g_2(u) \leq \ln P(T, u) + g_1(u) \leq C_2 g_2(u). \quad (1)$$

Здесь g_1 выпукла вниз и $\lim_{u \rightarrow \infty} [g_2(u)/g_1(u)] = 0$; символами C_k в дальнейшем будем обозначать конечные положительные величины, не зависящие от u и других существенных в данном контексте параметров (t, s, λ и др.) и не обязательно одинаковые в различных случаях — точные их значения мы здесь не выписываем, однако они «конструктивны», т.е. сравнительно легко выражаются через исходные данные.

По сравнению с [1] в данной статье мы отказываемся от условия субгауссовости $\xi(t)$, заменяя его значительно более слабым условием Крамера, являющимся и необходимым для (1); учитываем неоднородность $\xi(t)$; приводим примеры классов полей, для которых верхние оценки отличаются от нижних степенным множителем или только мультипликативной константой.

*Обнинский институт атомной энергетики, Студенческий городок, 1, 249020 Обнинск, Калужская обл., Россия.

Изложение ведется в очень простых, естественных, легко вычисляемых на практике терминах $B(\varphi)$ -пространств (см. [2], [3]) и энтропийных характеристик метрических компактов (см. [4]). О возможных приложениях, помимо упомянутых в [1], см. [5]–[8].

1. Вспомогательные понятия и предположения. Положим $a(t) = E\xi(t)$, $\gamma(t) = D^{1/2}\xi(t)$, $\eta(t) = (\xi(t) - a(t))/\gamma(t)$,

$$\varphi(\lambda) = \sup_{t \in T} \max_{|\varepsilon|=1} \ln E \exp \lambda \varepsilon \eta(t).$$

Если $\gamma(t) = 0$, формально полагаем $\eta(t) = 0$. Предполагается, что $\varphi(\lambda)$ конечна на некотором интервале $\{\lambda: |\lambda| < \lambda_0, \lambda_0 > 0\}$ (условие Крамера равномерно по t) и что $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi'(\lambda) = \infty$ — в противном случае $P\{\sup_{t \in T} \eta(t) > u\} = 0$, $u > u_0$.

Следуя [2], [3], введем банахово пространство $B(\varphi)$ случайных центрированных величин с конечной нормой:

$$\eta \in B(\varphi) \Leftrightarrow \|\eta\| = \sup_{\lambda \neq 0} \sup_{|\varepsilon|=1} \ln \varphi^{-1} \frac{E \exp \lambda \varepsilon \eta}{|\lambda|} < \infty.$$

При этом поле $\xi(t)$ можно однозначно представить в виде

$$\xi(t) = a(t) + \sigma(t) \xi_0(t), \quad a(t) = E\xi(t), \quad \|\xi_0(t)\| = 1, \quad t \in T. \quad (2)$$

Для $S \subset T$ положим $P_0(S, u) = P\{\sup_{t \in S} \xi_0(t) > u\}$, $d(t, s) = \|\xi_0(t) - \xi_0(s)\|$, $d(t, s)$ представляет собой так называемую естественную полуметрику на T .

Будем обозначать через $H(S, \varepsilon)$ энтропию подмножества S пространства T в метрике d (см. [4]): $H(S, \varepsilon) = \ln N(S, \varepsilon)$, где $N(S, \varepsilon)$ есть наименьшее число d -шаров радиуса $\varepsilon > 0$, покрывающих S ; сам шар обозначим $B(t, \delta) = \{s: s \in T, d(t, s) \leq \delta\}$.

Будем говорить, что поле $\xi_0(t)$ локально однородно, если

$$G = \sup_{\delta \in (0,1)} \sum_{k=2}^{\infty} (1 - \delta) \delta^k h(\delta, \delta^k) < \infty, \quad h(\delta, \varepsilon) = \sup_{t \in T} H(B(t, \delta), \varepsilon). \quad (3)$$

Условие (3) выполнено, если конечна так называемая уточненная размерность $\text{tqdim } T = (\kappa_1, \kappa_2)$, определяемая из неравенства:

$$\forall \varepsilon \in (0, 1) \Rightarrow \sup_{\delta \in (0,1)} h(\delta, \delta \varepsilon) \leq C_4 + \kappa_1 |\ln \varepsilon| + \kappa_2 \ln |\ln \varepsilon|. \quad (4)$$

Если же при $\varepsilon \in (0, 1)$ справедливо неравенство

$$\inf_{\delta \in (0,1)} \inf_{t \in T} H(B(t, \delta), \delta \varepsilon) \geq C_5 + \kappa_1 |\ln \varepsilon| + \kappa_2 \ln |\ln \varepsilon|,$$

то пару (κ_1, κ_2) назовем обобщенной минорантной размерностью: $\text{tmdim } T = (\kappa_1, \kappa_2)$. Размерности $\text{tqdim } T$ и $\text{tmdim } T$ могут совпадать; в этом случае пространство (T, d) будем называть регулярным.

Емкостью $M(S, \varepsilon)$ множества $S \subset T$ относительно метрики d называется максимальное число непересекающихся d -шаров радиуса $\varepsilon > 0$, помещающихся в S ; обозначим $L(S, \varepsilon) = \ln M(S, \varepsilon)$. Согласно [4, с. 26], $H(S, 2\varepsilon) \leq L(S, \varepsilon) \leq H(S, \varepsilon)$.

Пусть $f(t)$ — произвольная числовая функция, определенная на T , и $Q > 1$ — фиксированная константа. Положим $T_k(\Delta) = \{t: t \in T, |f(t) - f_0| \in (Q^k \Delta, Q^{k+1} \Delta]\}$. Будем говорить, что функция $w(\Delta)$ есть энтропийный росток порядка (ν_1, ν_2) и

обозначать: $w(\Delta) = \text{rost}(\nu_1, \nu_2, f, f_0)$, если для любого $C_7 > 0$ существует такое $Q_1 = Q_1(C_7, Q) \in (0, \infty)$, что

$$N(T_k(\Delta), C_7 \Delta^{\nu_1} |\ln \Delta|^{\nu_2}) \leq Q_1^k w(\Delta), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, \quad \Delta \in (0, 1).$$

При $w(\Delta) = \Delta^{-\beta_1} |\ln \Delta|^{-\beta_2}$ росток естественно назвать степенным, а вектор (β_1, β_2) — его порядком, обозначение: $(\beta_1, \beta_2) = \text{qrost}(\nu_1, \nu_2, f, f_0)$.

Минорантный энтропийный росток $w_m(\Delta)$ порядка (ν_1, ν_2) определяется неравенством: $\forall \Delta \in (0, 1), \forall C_7 > 0 \exists C_8 < \infty$,

$$w_m(\Delta) \leq C_8 N(T_1(\Delta), C_7 \Delta^{\nu_1} |\ln \Delta|^{\nu_2}).$$

В случае, когда $w_m(\Delta) = \Delta^{-\beta_1} |\ln \Delta|^{-\beta_2}$, совокупность показателей (β_1, β_2) будем обозначать $\text{qmrost}(\nu_1, \nu_2, f, f_0)$. Функцию f назовем регулярно меняющейся в окрестности значения f_0 при совпадении минорантного и энтропийного ростков.

Следующий простой факт, аналогичный известной границе сферической упаковки в теории кодирования, применяется для двусторонней оценки емкости и энтропии $H(S, \varepsilon)$.

Предложение 1. Пусть на множестве S существует такая неотрицательная аддитивная функция μ от борелевских подмножеств S , что

$$0 < h_-(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{t \in S} \mu(B(t, \varepsilon)) \leq \sup_{t \in T} \mu(B(t, \varepsilon)) \stackrel{\text{def}}{=} h_+(\varepsilon) < \infty.$$

Тогда

$$\frac{\mu(S)}{h_+(2\varepsilon)} \leq M(S, \varepsilon) \leq \frac{\mu(S)}{h_-(\varepsilon)}.$$

Пусть, например, T — ограниченное подмножество $\mathbf{R}^m$, содержащее некоторую непустую окрестность нуля, $|t|$ — евклидова норма в $\mathbf{R}^m$, функция f и метрика d таковы, что при $\alpha \in (0, 1], \gamma > 0$

$$C_9 \leq d(t, s) |t - s|^{-\alpha} \leq C_{10}, \quad C_{11} \leq (1 - f(t)) |t|^{-\gamma} \leq C_{12}.$$

Тогда функция f регулярно меняется в окрестности значения 1, и с помощью предложения 1 находим:

$$\text{qrost}(\nu, 0, f, 1) = m \max \left((\gamma^{-1} - \nu \alpha^{-1}), 0 \right), \quad \text{tqdim } T = \frac{m}{\alpha}.$$

2. Предварительные оценки. Положим $\pi(u) = 1/(u\varphi^{*'}(u))$,

$$P_0(S, u) = \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in S} \xi_0(t) > u \right\}, \quad \varphi^*(u) = \sup_{x \in \mathbf{R}^1} (xu - \varphi(x)).$$

Лемма 1 [9, с. 215]. Если поле $\xi_0(t)$ локально однородно, то

$$\sup_{t \in T} P_0(B(t, \pi(u)), u) \leq \exp(1 + G - \varphi^*(u)). \quad (5)$$

Следствие 1. В тех же допущениях справедлива оценка:

$$P_0(T, u) \leq C_{13} N(T, \pi(u)) \exp(-\varphi^*(u)). \quad (6)$$

Доказательство. Обозначая через t_i точки минимальной $\pi(u)$ -сети и применяя (5), имеем:

$$P_0(T, u) = P \left\{ \bigcup_{i=1}^N \left\{ \sup_{t \in B(t_i, \pi(u))} \xi_0(t) > u \right\} \right\} \leq \sum_{i=1}^N P_0(B(t_i, \pi(u)), u) \\ \leq C_{13} N(T, \pi(u)) \exp(-\varphi^*(u)).$$

В частности, если $\text{tqdim } T = (\kappa, 0)$, то из (6) следует:

$$P(T_0, u) \leq C_{14} \pi^{-\kappa}(u) \exp(-\varphi^*(u)). \quad (7)$$

Нижние оценки вероятности $P_0(T, u)$ в общем случае см. в [9], они выводятся так же, как и в субгауссовском случае (см. [1]) и формулируются в терминах функции «хвоста» $\psi(u) = \inf_t P\{\xi_0(t) > u\} \exp(\varphi^*(u))$ и модуля выпуклости $\omega(T, \varepsilon)$ подмножества $B(\varphi, T)$ единичного шара пространства $B(\varphi)$ [3], порожденного значениями $\{\xi_0(t)\}$:

$$\omega(T, \varepsilon) = \inf \left\{ 2 - \|\xi_0(t) + \xi_0(s)\|, t, s \in T, d(t, s) \geq \varepsilon \right\}.$$

Лемма 2. Пусть $\psi(u) > 0$ при всех достаточно больших u ; $\omega(T, \varepsilon) \geq C_{15} \varepsilon^\alpha$, $\alpha \geq 1$; $\text{tqdim } T = (\kappa, 0)$; для любого $C_{16} > 0$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} M \left(T, C_{16} |\pi(u) \ln \psi(u)|^{1/\alpha} \right) \exp(-\varphi^*(u)) = 0.$$

Тогда при всех достаточно больших u

$$P_0(T, u) \geq C_{17} M \left(T, C_{18} |\pi(u) \ln \psi(u)|^{1/\alpha} \right) \psi(u) \exp(-\varphi^*(u)). \quad (8)$$

Следствие 2. Предположим, в дополнение к условиям леммы 2, что

$$\psi(u) \geq C_{19} \pi^{-\theta}(u), \quad \theta \geq 0; \quad \text{tmdim } T = (\kappa_1, \kappa_2), \quad \kappa_1, \kappa_2 \in [0, \infty).$$

Тогда при всех достаточно больших u

$$P(T_0, u) \geq C_{20} \pi^{-\theta + \kappa_1/\alpha}(u) |\ln \pi(u)|^{-\kappa_2/\alpha} \exp(-\varphi^*(u)). \quad (9)$$

При $\alpha = 1$, $\theta = \kappa_2 = 0$ нижняя оценка (9) смыкается с верхней (6).

3. Принцип локализации. Далее будет предполагаться, что $\sup_t \sigma(t) = \bar{\sigma} < \infty$, $\sup_t a(t) = \bar{a} < \infty$. При этом без ограничения общности будем считать, что $\bar{\sigma} = 1$. Для фиксированного $\delta \in (0, 1)$ положим $T_0 = \{t: \sigma(t) = 1\}$,

$$T(\delta) = \{t: \sigma(t) \in (1 - \delta, 1)\}, \quad V = \{t: \sigma(t) \leq 1 - \delta\} = T \setminus (T_0 \cup T(\delta)).$$

В этом пункте мы докажем, что вероятность $P(V, u)$ экспоненциально мала по сравнению с $\exp(-\varphi^*(u))$.

Теорема 1. Пусть сходится интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{H(V, x)}{\varphi^{-1}(H(V, x))} dx < \infty.$$

Тогда при всех достаточно больших значениях u

$$P(V, u) \leq \exp \left(-\varphi^*(u(1 + \delta_1)) \right), \quad \delta_1 > 0. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть сначала $a(t) = 0$. Имеем:

$$P(V, u) \leq P\left\{\frac{\xi(t)}{\sigma(t)} > \frac{u}{1-\delta}\right\} = P_0\left(V, \frac{u}{1-\delta}\right).$$

Для оценки правой части применим неравенство из [11]:

$$P_0(V, u) \leq \exp\left(-\varphi^*\left(u(1-\delta)^{-1} - 2\left(2uI(1-\delta)^{-1/2}\right)\right)\right). \quad (11)$$

Оценка (10) легко следует из (11). Случай $a(t) \neq 0$ несложен:

$$\begin{aligned} P(V, u) &\leq P\left\{\sup_{t \in V} \xi_0(t) > u - \bar{a}\right\} \leq \exp\left(-\varphi^*\left((u - \bar{a})(1 + \delta)\right)\right) \\ &\leq \exp\left(-\varphi^*\left(u(1 + \delta_1)\right)\right), \quad \delta_1 > 0. \end{aligned}$$

q Таким образом, если выполнено условие: для любого $C > 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(T, \epsilon) \exp\left(-\frac{C}{\epsilon}\right) = 0, \quad (12)$$

то вероятностью $P(V, u)$ можно «пренебречь», ибо

$$P(T, u) \in \left(\max\{P(T_0, u); P(T(\delta), u)\}; P(T_0, u) + P(T(\delta), u) + P(V, u)\right),$$

и, как вытекает из (10), $P(V, u) \leq \exp(-\varphi^*(u) - \delta/\pi(u))$, что «намного» меньше оценок (7), (9) для $P(T_0, u)$. Осталось оценить вероятность $P(T(\delta), u)$.

4. Оценки для централизованных полей. В этом пункте ограничимся часто встречающимся на практике (метод Монте-Карло, статистика) случаем $a(t) = 0$, $t \in T$.

Теорема 2. Пусть, в дополнение к условиям теоремы 1, выполнены следующие условия:

$$1) \forall C_1 > 1 \exists C_2 \in (1, C_1): \sup_{u > u_0} \left[\frac{\varphi^{*'}(1 + C_2 u)}{\varphi^{*'}(u)} \right] = C_3 < \infty;$$

2) функция $\sigma(t)$ имеет в окрестности значения 1 конечный энтропийный росток порядка 1: $w(\Delta) = \text{rost}(1, 0, \sigma(t), 1)$;

3) поле $\xi_0(t)$ на множестве T локально однородно. Тогда

$$P(T(\delta), u) \leq C_{17} w(\pi(u)) \exp(-\varphi^*(u)).$$

Доказательство. Разобьем множество $T(\delta)$ на слои:

$$T_k = \{t: t \in T(\delta), 1 - Q^k \pi(u) \leq \sigma(t) < 1 - Q^{k+1} \pi(u)\}.$$

Здесь k — целое число, $k \geq 1$, не превосходящее $\ln_Q(\delta/\pi(u))$. Имеем: $P(T(\delta), u) \leq \sum_k P(T_k, u)$;

$$\begin{aligned} P(T_k, u) &= P\left\{\sup_{t \in T_k} \sigma(t) \xi_0(t) > u\right\} \leq P\left\{\left(1 - Q^k \pi(u)\right) \sup_{t \in T_k} |\xi_0(t)| > u\right\} \\ &= P\left\{\sup_{t \in T_k} |\xi_0(t)| > \frac{u}{1 - Q^k \pi(u)}\right\} \leq P\left\{\sup_{t \in T_k} |\xi_0(t)| > u(1 + Q^k \pi(u))\right\}. \end{aligned}$$

По следствию 2,

$$\begin{aligned} P(T_k, u) &\leq 2C_{12} N\left(T_k, \pi(u(1 + Q^k \pi(u)))\right) \exp\left(-\varphi^*(u + uQ^k \pi(u))\right) \\ &\leq 2C_{12} N\left(T_k, \pi(C_{18}u)\right) \exp\left(-\varphi^*(u) - Q^k u \pi(u) \varphi^{*'}(u)\right) \\ &\leq C_{19}^k w(\pi(u)) \exp\left(-\varphi^*(u) - Q^k\right). \end{aligned}$$

Суммируя по k и распространяя сумму до бесконечности, приходим к утверждению теоремы.

Следствие 3. Пусть, в дополнение к условиям теоремы 2, выполнены условия леммы 1 и условие (10). Тогда

$$P(T, u) \leq C \max \left\{ N(T_0, \pi(u)), w(\pi(u)) \right\} \exp\left(-\varphi^*(u)\right).$$

Выведем теперь нижние оценки для $P(T, u)$.

Теорема 3. Пусть $P\{\xi_0(t) > u\} \geq \psi(u) \exp(-\varphi^*(u))$, при $t \in T(\delta)$, причем функция $\psi(u)$ отделена от нуля и для модуля $\omega(T, \epsilon)$ выполнено условие леммы 2. Предположим также, что:

- 1) $\lim_{u \rightarrow \infty} M\left(T_1, C \left| \pi(u) \ln \psi(u) \right|^{1/\alpha} \exp\left(-\varphi^*(u)\right)\right) = 0$ для любого $C > 0$;
- 2) $\dim T = \dim T(\delta) < \infty$ для некоторого $\delta > 0$;
- 3) $\sup_{u > u_0} \frac{\varphi^{*'}(u + 2u\pi(u))}{\varphi^{*'}(u)} < \infty$;
- 4) для любого $C_1 > 0$ существует такое $C_2 < \infty$, что

$$\begin{aligned} M\left(T_1, C_1 \left(\pi(u + 2u\pi(u)) \left| \ln \psi(u + 2u\pi(u)) \right| \right)^{1/\alpha} \psi(u + 2u\pi(u)) \right) \\ \geq C_2 \psi(u) M\left(T_1, C_2 \left| \pi(u) \ln \psi(u) \right|^{1/\alpha}\right). \end{aligned}$$

Тогда

$$P(T(\delta), u) \geq C_3 M\left(T_1, C_6 \left| \pi(u) \ln \psi(u) \right|^{1/\alpha}\right) \psi(u) \exp\left(-\varphi^*(u)\right). \quad (13)$$

Доказательство. Выделим в множестве $T(\delta)$ слой T_1 ; тогда

$$\begin{aligned} P(T(\delta), u) &\geq P\left\{ \sup_{t \in T_1} \sigma(t) \xi_0(t) > u \right\} \geq P\left\{ \sup_{t \in T_1} \xi_0(t) > \frac{u}{1 - \pi(u)} \right\} \\ &= P_0\left(T_1, \frac{u}{1 - \pi(u)}\right) \geq P_0(T_1, u + 2u\pi(u)), \quad \pi(u) \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Последнюю вероятность оценим по лемме 2:

$$\begin{aligned} P_0(T_1, u + 2u\pi(u)) &\geq C_8 \left[M\left(T_1, C_9 \left| \pi(u + 2u\pi(u)) \ln \psi(u + 2u\pi(u)) \right|^{1/\alpha}\right) \right] \\ &\quad \times \left[\ln \psi(u + 2u\pi(u)) \right] \left[\exp\left(-\varphi^*(u + 2u\pi(u))\right) \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

В силу выпуклости $\varphi^*(u)$ и по определению $\pi(u)$

$$\varphi^*(u + 2u\pi(u)) \leq \varphi^*(u) + 2u\pi(u) \varphi^{*'}(u + 2u\pi(u)) \leq C_{10} + \varphi^*(u).$$

Первые два сомножителя в правой части (14) оценим на основании условия 4) теоремы функций

$$C_{12} M \left(T_1, C_{13} \left| \pi(u) \ln \psi(u) \right|^{1/\alpha} \right) \psi(u).$$

Подставляя в (14), получаем утверждение теоремы.

Следствие 4. Пусть, в дополнение к условиям теоремы 3, выполнено условие

$$5) \quad \left| \ln \psi(u) \right| \geq C_{15} \pi^\theta(u) \left| \ln \pi(u) \right|^{\theta_1}, \quad \theta > 0.$$

Обозначая $w_m(\Delta) = \text{mrost}(1 + \theta/\alpha, \theta_1/\alpha, \sigma(t), 1)$, имеем:

$$P(T(\delta), u) \geq C_{16} w_m(\pi(u)) \psi(u) \exp(-\varphi^*(u)).$$

Если дополнительно предположить, что $\psi(u) \geq C_{17} \pi^\theta(u)$, $\theta > 0$, и положить $(\beta_1, \beta_2) = \text{qmrost}(1 + \theta/\alpha, \theta_1/\alpha, \sigma(t), 1)$, то получаем неравенство

$$P(T(\delta), u) \geq C_{18} \pi^{-\beta_1}(u) \left| \ln \pi(u) \right|^{-\beta_2} \psi(u) \exp(-\varphi^*(u)).$$

Привлекая нижнюю оценку $P(T, u)$, где в качестве T взято множество T_0 , при выполнении условий леммы 2 для множества T_0 имеем: при $u > u_0$

$$P(T, u) \geq C_{20} \psi(u) \max \left\{ w_m(u), M \left(T_0, C_{21} \left| \pi(u) \ln \psi(u) \right|^{1/\alpha} \right) \right\} \exp(-\varphi^*(u)).$$

При $\theta = 0$ получаем для $P(T, u)$ нижнюю оценку вида

$$P(T, u) \geq C_{22} \pi^{-C_{23}}(u) \left| \ln \pi(u) \right|^{C_{24}} \exp(-\varphi^*(u)).$$

Сравнение с верхними оценками показывает, что сформулированная в начале заметки задача решена. Заметим, что при $\theta = 0$, $\alpha = 1$ и условии регулярности множества T_0 и функции $\sigma(t)$ верхние и нижние оценки отличаются мультипликативной константой; при других значениях тех же параметров отличие только в степенном или даже логарифмическом члене.

5. Гауссовский случай. Пусть поле $\xi(t)$ — гауссово, $E\xi(t) = 0$, $D\xi(t) \leq 1$, $t \in T$. Тогда $\varphi(\lambda) = \lambda^2/2$, $\sigma^2(t) = D\xi(t)$ и метрика d совпадает с метрикой Дадли $d(t, s) = D^{1/2}(\xi(t) - \xi(s))$.

Лемма 3. Пусть пространство (T_0, d) в метрике d регулярно и имеет в метрике Дадли энтропийную размерность κ_0 . Тогда

$$C_1 \leq P(T_0, u) u^{1-\kappa_0} \exp\left(\frac{u^2}{2}\right) \leq C_2. \quad (15)$$

Неравенство (15) следует из имеющейся в [12] оценки

$$C_3 \leq P(B(t, u^{-1}), u) u \exp\left(\frac{u^2}{2}\right) \leq C_4 \quad (16)$$

и рассуждений п. 3; для вывода нижних оценок следует применить, помимо (16), метод, предложенный в [1], [9].

Теорема 4. Предположим, что существуют следующие величины: $\kappa = \dim T$,

$$(\kappa_0, 0) = \text{tqdim } T_0 = \text{tmdim } T_0; \quad (\beta, 0) = \text{mrost} \left(\frac{1}{2}, 0, \sigma(t), 1 \right).$$

Тогда при $u > 1$ для $P(T, u)$ справедлива двусторонняя оценка

$$C_5 \leq P(T, u) u^{1-\max(\kappa_0, \beta)} \exp \left(\frac{u^2}{2} \right) \leq C_6. \quad (17)$$

Доказательство аналогично приведенному выше (с заменой утверждений лемм 1 и 2 неравенством (16)) и потому опускается.

В ряде практически важных случаев ($T \subset \mathbb{R}^k$ и т.д.) точная асимптотика $P(T, u)$ вычислена Питербаргом, Беляевым и другими авторами (см. [13]), Талаграном [14], Пикандсом, Кволсом, Ватанабе [15]. Она согласуется с (17).

6. Общий случай. Разложение основной вероятности. В этом пункте мы сохраним предположение об ограниченности нормы: $\sigma(t) \leq 1$, но не будем считать, что поле $\xi(t)$ центрировано, т.е. пусть $a(t) \not\equiv 0$ и $\sup_{t \in T} |a(t)| < \infty$. Для краткости изложения ограничимся лишь указанием основных этапов рассуждений.

Введем в рассмотрение несколько множеств. Положим $\bar{a}_0 = \sup_{t \in T_0} a(t)$,

$$T_{00} = \{t, t \in T_0, a(t) = \bar{a}_0\}, \quad T_-(0) = \{t, t \in T_0, a(t) < \bar{a}_0\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\bar{a}_0 = 0$. Обозначим

$$\begin{aligned} T(\delta, -) &= \{t: t \in T(\delta), a(t) < 0\}; \quad T(\delta, +) = \{t: t \in T(\delta), a(t) > 0\}, \\ T(\delta, 0) &= \{t: t \in T(\delta), a(t) = 0\}, \quad \delta = \text{const} \in (0, 1). \end{aligned}$$

Все введенные множества предполагаются борелевскими относительно метрики d .

Лемма 4.

$$\begin{aligned} &\max \left\{ P(T_{00}, u), P(T_-(0), u), P(T(\delta, 0), u), P(T(\delta, -), u), P(T(\delta, +), u) \right\} \\ &\leq P(T, u) \leq P(V, u) + P(T_{00}, u) + P(T_-(0), u) \\ &\quad + P(T(\delta, 0), u) + P(T(\delta, -), u) + P(T(\delta, +), u). \end{aligned}$$

Утверждение леммы легко следует из элементарных свойств супераддитивности и монотонности вероятности. Разумеется, если какое-либо из введенных множеств пусто, то полагаем $P(S, u) = 0$.

Вероятности $P(T_{00}, u)$, $P(T(\delta, 0), u)$, $P(V, u)$ были оценены выше; остальные также допускают довольно точные двусторонние экспоненциальные оценки с помощью лемм 1 и 2 и разбиения каждого из введенных множеств на шары $B(t, \pi(u))$. Подробные выводы, достаточно, впрочем, громоздкие, предполагается опубликовать в другом месте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Островский Е. И.* Оценки распределения максимума негауссовского поля. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. XXXV, в. 3, с. 482.
2. *Островский Е. И.* Обобщение нормы Булдыгина–Козаченко и ЦПТ в банаховом пространстве. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. XXVII, в. 3, с. 618.
3. *Козаченко Ю. В., Островский Е. И.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских. — Теория вероятн. и матем. статист., Киев, КГУ, 1985, в. 32, с. 42–53.
4. *Витушкин А. Г.* Оценка сложности задачи табулирования. М.: ГИФМЛ, 1959, 228 с.
5. *Курбанмурадов О.* Существование и непрерывная зависимость решений динамических систем. — Препринт, № 1000, СО АН, 1993, 40 с.
6. *Островский Е. И. и др.* Устройство для сигнализации оборудования Авторское свидетельство СССР, № 1575790, 1988 г.
7. *Островский Е. И.* Способ контроля герметичности оборудования. Патент России, № 206806, 1994 г.
8. *Дмитровский В. А., Ермаков С. В., Островский Е. И.* ЦПТ для слабовязисимых величин со значениями в банаховом пространстве. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. XXVIII, в. 1, с. 83–97.
9. *Островский Е. И.* Двусторонние экспоненциальные оценки распределения максимума случайного поля. — Успехи матем. наук, 1992, т. 47, в. 6, с. 225–226.
10. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств. Киев, Вища школа, 1980, 453 с.
11. *Дмитровский В. А.* О распределении максимума и локальных свойствах реализаций предгауссовских полей. — Теория вероятн. и матем. статист., Киев, КГУ, 1981, в. 25, с. 154–164.
12. *Дмитровский В. А.* Оценка распределения максимума гауссовского случайного поля. — В сб.: Исследования по случайным полям. Под ред. Ю. К. Беляева. М.: МГУ, 1979, с. 22–31.
13. *Питербарг В. И.* Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. М.: МГУ, 1988, 175 с.
14. *Talagrand M.* Small tails for the supremum of a Gaussian process. — Ann. Inst. H. Poincaré, — Ser. B, 1988, t. 24, № 2, p. 307–315.
15. *Qualls C., Watanabe H.* Asymptotic properties of a Gaussian processes. — Ann. Math. Statist., 1972, v. 43, p. 580–596.

Поступила в редакцию
24. IV. 1995

© 1997 г.

РАДЧЕНКО В. Н.*

СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ ОТ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ПО СЛУЧАЙНЫМ МЕРАМ

Рассматриваются σ -аддитивные случайные меры в самом общем определении и интегралы по ним от действительных функций. Доказано утверждение о

*Киевский национальный университет, мех.-мат. факультет, кафедра теории вероятностей, ул. Владимирская, 64, 252017 Киев, Украина.