Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Радченко, Сходимость интегралов от неограниченных действительных функций по случайным мерам, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 2, 358–364

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1809>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 06:34:24

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Островский Е. И.* Оценки распределения максимума негауссовского поля. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. XXXV, в. 3, с. 482.
2. *Островский Е. И.* Обобщение нормы Булдыгина–Козаченко и ЦПТ в банаховом пространстве. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. XXVII, в. 3, с. 618.
3. *Козаченко Ю. В., Островский Е. И.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских. — Теория вероятн. и матем. статист., Киев, КГУ, 1985, в. 32, с. 42–53.
4. *Витушкин А. Г.* Оценка сложности задачи табулирования. М.: ГИФМЛ, 1959, 228 с.
5. *Курбанмуратов О.* Существование и непрерывная зависимость решений динамических систем. — Препринт, № 1000, СО АН, 1993, 40 с.
6. *Островский Е. И. и др.* Устройство для сигнализации оборудования Авторское свидетельство СССР, № 1575790, 1988 г.
7. *Островский Е. И.* Способ контроля герметичности оборудования. Патент России, № 206806, 1994 г.
8. *Дмитровский В. А., Ермаков С. В., Островский Е. И.* ЦПТ для слабозависимых величин со значениями в банаховом пространстве. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. XXVIII, в. 1, с. 83–97.
9. *Островский Е. И.* Двусторонние экспоненциальные оценки распределения максимума случайного поля. — Успехи матем. наук, 1992, т. 47, в. 6, с. 225–226.
10. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств. Киев, Вища школа, 1980, 453 с.
11. *Дмитровский В. А.* О распределении максимума и локальных свойствах реализаций предгауссовских полей. — Теория вероятн. и матем. статист., Киев, КГУ, 1981, в. 25, с. 154–164.
12. *Дмитровский В. А.* Оценка распределения максимума гауссовского случайного поля. — В сб.: Исследования по случайным полям. Под ред. Ю. К. Беляева. М.: МГУ, 1979, с. 22–31.
13. *Питербарг В. И.* Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. М.: МГУ, 1988, 175 с.
14. *Talagrand M.* Small tails for the supremum of a Gaussian process. — Ann. Inst. H. Poincaré, — Ser. B, 1988, t. 24, № 2, p. 307–315.
15. *Qualls C., Watanabe H.* Asymptotic properties of a Gaussian processes. — Ann. Math. Statist., 1972, v. 43, p. 580–596.

Поступила в редакцию
24. IV. 1995

© 1997 г.

РАДЧЕНКО В. Н.*

СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ ОТ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ПО СЛУЧАЙНЫМ МЕРАМ

Рассматриваются σ -аддитивные случайные меры в самом общем определении и интегралы по ним от действительных функций. Доказано утверждение о

*Киевский национальный университет, мех.-мат. факультет, кафедра теории вероятностей, ул. Владимирская, 64, 252017 Киев, Украина.

сходимости $\int f d\mu_n \xrightarrow{P} \int f d\mu$, $n \rightarrow \infty$, в условиях, аналогичных равномерной интегрируемости. Доказан аналог теоремы Валле-Пуссена. Дается критерий того, что $\int f_n g d\mu \xrightarrow{P} \int f g d\mu$, $n \rightarrow \infty$ для всех ограниченных g .

Ключевые слова и фразы: случайная мера, L_0 -значная мера, интеграл по случайной мере, равномерная интегрируемость, теорема Валле-Пуссена.

Пусть X — некоторое множество и $\mathcal{B}$ — σ -алгебра подмножеств X . Через $B(X)$ обозначим множество действительных измеримых ограниченных функций из X . Будем называть случайной мерой такой набор случайных величин $\{\mu(A), A \in \mathcal{B}\}$, что $\mu(A_n) \xrightarrow{P} 0$ для $A_n \downarrow \emptyset$, и для $A \cap B = \emptyset$ $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ п.н. Множество A называем μ -нулевым, если $\forall B \subset A, B \in \mathcal{B}: \mu(B) = 0$ п.н. Сходимость μ -п.в. — это сходимость всюду кроме μ -нулевого множества.

Для случайных величин ξ будем использовать обозначение $\|\xi\| = \sup\{\delta: P\{|\xi| > \delta\} > \delta\}$. Легко проверить, что $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$, $\|c\xi\| \leq c\|\xi\|$ для $c \geq 1$ и что $\xi_n \xrightarrow{P} 0 \iff \|\xi_n\| \rightarrow 0$ (здесь и далее пределы берутся при $n \rightarrow \infty$, если не указано другое).

Теорема 2 [1] дает, что к нашим случайным мерам применима построенная в [2] теория интеграла от измеримых функций по векторной мере (в [1] предполагается, что X — компактное хаусдорфово пространство и $\mathcal{B}$ — борелевская σ -алгебра, но в необходимых нам результатах это не используется). В частности, любая функция $f \in B(X)$ будет интегрируемой.

Если последовательность случайных мер μ_n такова, что $\mu_n(A) \xrightarrow{P} \mu(A)$ для всех $A \in \mathcal{B}$, то μ также является случайной мерой. Этот факт следует из теоремы 8.6 [3]. Теорема, доказанная в [4], дает критерий того, что для данной последовательности случайных мер μ_n сходимость $\int_X f d\mu_n \xrightarrow{P} \int_X f d\mu$ имеет место для каждой $f \in B(X)$. В данной статье мы получим подобный результат без требования ограниченности f .

Теорема 1. Пусть даны случайные меры μ и μ_n , $n \geq 1$, а также функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, интегрируемая по всем μ_n . Если выполняются условия:

- 1) $\mu_n(A) \xrightarrow{P} \mu(A)$ для любого множества $A \in \mathcal{B}$;
- 2) существует такая последовательность $\{c_n, n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$, что $\forall n$ $0 < c_{n+1} \leq c_n/2$ и $\forall \{k_n, n \geq 1\} \subset \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{B}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu_{k_n}(A)$ сходится по вероятности;
- 3) для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{A, n} P \left\{ \left| \int_{A \cap \{|f(x)| > c\}} f d\mu_n \right| > \varepsilon \right\} = 0, \quad (1)$$

то f интегрируема по μ и $\int_A f d\mu_n \xrightarrow{P} \int_A f d\mu$ для любого $A \in \mathcal{B}$.

Если $\int_X f d\mu_n \xrightarrow{P} \int_X f d\mu$ для любой $f \in B(X)$, то выполняются условия 1) и 2).

Если данная f интегрируема по μ и $\int_A f d\mu_n \xrightarrow{P} \int_A f d\mu$ для любого $A \in \mathcal{B}$, то имеет место 3).

Доказательство. Отметим, что условия 1) и 2) совпадают с условиями теоремы из [4], т.е. они необходимы и достаточны для того, чтобы для любой $f \in B(X)$ имела место сходимость $\int_X f d\mu_n \xrightarrow{P} \int_X f d\mu$.

Предполагая, что выполнены условия 1), 2) и 3), докажем интегрируемость f по μ и предельное соотношение для интегралов по μ_n . Положим $f_k(x) = f(x) I_{\{|f(x)| \leq k\}}$. Тогда при $k \rightarrow \infty$ $\forall n$ $f_k(x) \rightarrow f(x)$ μ_n -п.в., значит и μ -п.в.; будем считать, что

$f_k(x) \rightarrow f(x)$, $k \rightarrow \infty$, для всех $x \in X$. Каждая f_k — как ограниченная — интегрируема по μ . Для фиксированного $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\begin{aligned} \limsup_{c \rightarrow \infty} \sup_{k, A} \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{A \cap \{|f_k| > c\}} f d\mu \right| > \varepsilon \right\} &\leq \limsup_{c \rightarrow \infty} \sup_{k, A, j} \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{A \cap \{|f_k| > c\}} f_k d\mu_j \right| > \varepsilon \right\} \\ &\leq \limsup_{c \rightarrow \infty} \sup_{A, j} \mathbf{P} \left\{ \left| \int_{A \cap \{|f| > c\}} f d\mu_j \right| > \varepsilon \right\} = 0. \end{aligned}$$

(Здесь первое неравенство имеет место в силу сходимости интегралов на ограниченных функциях при $j \rightarrow \infty$, а второе следует из определения f_k .) Из теоремы в [5] следует, что f интегрируема по μ .

Выбором c мы можем сделать величину $\|\int_A f I_{\{|f| > c\}} d\mu\|$ сколь угодно малой равномерно по A (такая возможность вытекает из следствия 7.3.7 [2] — аналога теоремы Лебега). Пользуясь условием 3), возьмем c таким, чтобы величина $\|\int_A f I_{\{|f| > c\}} d\mu_n\|$ была достаточно малой по всем A, n . Имея утверждение для ограниченных функций, выбором n для данных A, c , можем сделать малой $\|\int_A f I_{\{|f| \leq c\}} d\mu - \int_A f I_{\{|f| \leq c\}} d\mu_n\|$. Поэтому $\int_A f d\mu_n \xrightarrow{P} \int_A f d\mu$.

Теперь пусть для данной f при любом A имеет место сходимость $\int_A f d\mu_n \xrightarrow{P} \int_A f d\mu$. Функция множеств $\eta_n(A) = \int_A f d\mu_n$ является случайной мерой (см. теорему 7.3.5 с) в [2]). По теореме 8.6 [3] (аналог теоремы Никодима) η_n равномерно σ -аддитивны. Поскольку $\{x: |f(x)| > c\} \downarrow \emptyset$, $c \uparrow \infty$, имеет место (1).

Для доказательства дальнейших утверждений нам понадобится следующий факт.

Лемма 1. Для функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, интегрируемой по случайной мере η , и измеримой функции $h: X \rightarrow \mathbb{R}$, $|h(x)| \leq \alpha$, выполняется неравенство

$$(\forall A \in \mathcal{B}) \quad \left\| \int_A f h d\eta \right\| \leq 16 \sup_{B \subset A} \left\| \alpha \int_B f d\eta \right\|.$$

Доказательство. Для $\nu(B) = \int_B f d\eta$ имеем

$$\int_B h d\nu = \int_B f h d\eta \quad (2)$$

(это легко проверить для простых h , затем надо использовать предельный переход и следствие 7.3.7 [2]). Неравенство (2) в [1], где в качестве B_0 взят набор $\{B \subset A, B \in \mathcal{B}\}$, нам даст для простых h' , $|h'(x)| \leq 1$: $\|\int_A h' d\nu\| \leq 16 \sup_{B \subset A} \|\nu(B)\|$. Остается рассмотреть предельный переход по простым $h' \rightarrow h$, $|h'(x)| \leq |h(x)| \leq \alpha$.

Теорема 2. Пусть функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по случайным мерам μ_n , $n \geq 1$, и имеет место (1). Пусть функция $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ измерима и $\forall x \ |g(x)| \leq |f(x)|$. Тогда g интегрируема по всем μ_n , и (1) выполняется также и для g (в (1) пишем g вместо f).

Доказательство. Интегрируемость g по μ_n следует из теоремы 7.3.5 [2]. Используя лемму 1 для $h = g/f$, $|h(x)| \leq 1$, и то, что $\{x: |g(x)| > c\} \subset \{x: |f(x)| > c\}$, имеем

$$\sup_{A, n} \left\| \int_{A \cap \{|g| > c\}} g d\mu_n \right\| \leq 16 \sup_{A, n} \left\| \int_{A \cap \{|f| > c\}} f d\mu_n \right\|.$$

Нетрудно видеть, что условие (1) для f эквивалентно сходимости правой части последнего неравенства к нулю при $c \rightarrow \infty$. Поэтому (1) выполняется и для g .

Условие (1) схоже с условием равномерной интегрируемости для L_0 -значных мер (см. теорему в [5]). По аналогии с равномерной интегрируемостью по действительным мерам, имеет место следующий аналог теоремы Валле-Пуссена (действительный случай — см. [6, гл. 2, теорема 22]).

Теорема 3. Пусть для случайных мер μ_n , $n \geq 1$, и функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, интегрируемой по всем μ_n , существует такая функция $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \left| \frac{G(t)}{t} \right| = \infty,$$

$G(f(x))$ интегрируема по всем μ_n , и набор случайных величин $\{\int_A G(f(x)) d\mu_n, A \in \mathcal{B}, n \geq 1\}$ ограничен по вероятности. Тогда выполняется (1).

Пусть для μ_n и f выполняется соотношение (1) и условия 1), 2) теоремы 1. Тогда существует функция G с указанными выше свойствами.

Доказательство. Пусть указанная G существует. Для каждого $\alpha > 0$ мы можем выбрать достаточно большое c , чтобы для x с $|f(x)| > c$ было справедливо неравенство $|f(x)/G(f(x))| \leq \alpha$. Используя лемму 1 для $h(x) = f(x)/G(f(x))$, получим:

$$\sup_{A, n} \left\| \int_{A \cap \{|f| > c\}} f d\mu_n \right\| \leq 16 \sup_{B, n} \left\| \alpha \int_{B \cap \{|f| > c\}} G(f(x)) d\mu_n \right\|.$$

Из ограниченности $\int_A G(f(x)) d\mu_n$ по вероятности следует, что правая часть стремится к нулю при $\alpha \rightarrow 0$. Значит, выбором c мы можем сделать сколь угодно малой левую часть, и (1) выполняется.

Теперь пусть имеют место условия 1), 2) и 3) теоремы 1. Пользуясь (1), возьмем $s_k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, такие, что $s_1 = 1$, $s_k \uparrow \infty$ и $\forall A, n$

$$\left\| \int_{A \cap \{|f| \geq s_k\}} f d\mu_n \right\| \leq 2^{1-k}. \quad (3)$$

Положим

$$r_k = \sum_{j=1}^k \max\{i: s_i \leq j\}, \quad G(t) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k I_{\{k \leq |t| < k+1\}}(t).$$

Поскольку $\max\{i: s_i \leq j\} \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_k}{k} = \infty, \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} \left| \frac{G(t)}{t} \right| = \infty.$$

Осталось доказать ограниченность по вероятности для интегралов.

$$\begin{aligned} G(f(x)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^k \max\{i: s_i \leq j\} \right) I_{\{k \leq |f(x)| < k+1\}}(x) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{q=s_j}^{\infty} I_{\{|f(x)| \geq q\}}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x), \end{aligned}$$

где $g_j(x) = \sum_{q=s_j}^{\infty} (q - s_j + 1) I_{\{q \leq |f(x)| < q+1\}}(x)$. Поскольку $|g_j(x)| \leq |f(x)|$, функции $g_j(x)$ интегрируемы по всем μ_n . Заметим, что $g_j(x) \neq 0$, только если $|f(x)| \geq s_j$. Поэтому для любых $\alpha \leq 1$ и измеримой $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$, $|\varphi(x)| \leq 1$, используя лемму 1 (для $h = g_j \varphi / f$, $|h(x)| \leq 1$), и (3), имеем: для всех n, A

$$\left\| \alpha \int_A g_j \varphi d\mu_n \right\| \leq 16 \sup_B \left\| \alpha \int_{B \cap \{|f| \geq s_j\}} f d\mu_n \right\| \leq 2^{5-j}. \quad (4)$$

По лемме Бореля–Кантелли ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \int_A g_j \varphi d\mu_n$ сходится п.н. Из теоремы 7.3.8 [2] следует, что $G(f(x))$ интегрируема по всем μ_n и $\int_A G(f(x)) d\mu_n = \sum_{j=1}^{\infty} \int_A g_j d\mu_n$.

Используя для $\varphi(x) \equiv 1$, $\alpha \leq 1$, полученные в (4) оценки, получаем:

$$\begin{aligned} \left\| \alpha \int_A G(f(x)) d\mu_n \right\| &\leq \sum_{j=1}^k \left\| \alpha \int_A g_j d\mu_n \right\| + \sum_{j=k+1}^{\infty} \left\| \alpha \int_A g_j d\mu_n \right\| \\ &\leq 16k \sup_{B,n} \left\| \alpha \int_B f d\mu_n \right\| + \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{5-j} \\ &\leq 16k \sup_{B,n} \left\| \alpha \int_{B \cap \{|f| \leq c\}} f d\mu_n \right\| + 16k \sup_{B,n} \left\| \alpha \int_{B \cap \{|f| > c\}} f d\mu_n \right\| + 2^{5-k}. \end{aligned}$$

Выбором k можем сделать сколь угодно малым последнее слагаемое. Затем для $\alpha = 1$ выбором c , используя (1), делаем малым второе слагаемое. Для первого слагаемого отметим, что из условий 1) и 2) нашей теоремы вытекает ограниченность по вероятности множества $\{\mu_n(A), A \in \mathcal{B}, n \geq 1\}$ (см. равенство (1) [4]). Взяв $f(x) \equiv 1$ в лемме 1, легко получим, что ограниченным будет и множество $\{\int_{B \cap \{|f| \leq c\}} f d\mu_n, B \in \mathcal{B}, n \geq 1\}$. Поэтому для данных k, c выбором малого $\alpha \leq 1$ можем уменьшать первое слагаемое. При таком изменении α второе слагаемое может только уменьшаться. Теорема доказана.

С помощью следующей леммы мы получим результат об устойчивости сходимости интегралов по случайным мерам.

Лемма 2. Для функции $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, интегрируемой по случайной мере μ имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall A \in \mathcal{B} \quad \sup_{B \subset A} \|\mu(B)\| < \delta \implies \left\| \int_A f d\mu \right\| < \varepsilon.$$

Доказательство. Из аналога теоремы Лебега (теорема 7.3.7 в [2]) легко вывести, что $\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_A \|\int_{A \cap \{|f| > c\}} f d\mu\| = 0$, и выбором c последний супремум можем сделать меньшим $\varepsilon/2$. Кроме того, по лемме 1 $\|\int_{A \cap \{|f| \leq c\}} f d\mu\| \leq 16 \sup_{B \subset A} \|c\mu(B)\|$, и для данного $c \geq 1$ достаточно взять $\delta < \varepsilon/(32c)$.

Теорема 4. Пусть функции $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, интегрируемы по случайной мере μ . Для того чтобы для данной случайной меры η имела место сходимость

$$\forall g \in B(X) \quad \int_X f_n g d\mu \xrightarrow{P} \int_X g d\eta, \quad (5)$$

необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия

$$(\forall A \in \mathcal{B}) \quad \int_A f_n d\mu \xrightarrow{P} \eta(A), \quad (6)$$

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{n, B \subset \{|f_n| > c\}} P\{|\mu(B)| > \varepsilon\} = 0. \quad (7)$$

Доказательство. Для $\eta_n(A) = \int_A f_n d\mu$ имеем: $\int_A f_n g d\mu = \int_A g d\eta_n$ (см. (2)), $\eta_n(A) \xrightarrow{P} \eta(A)$. Как видно из доказательства теоремы из [4], теперь достаточно проверить равенство (1) из [4] (т.е. совместную ограниченность по вероятности значений η_n). Имеем:

$$\sup_{A,n} \left\| \alpha \int_A f_n d\mu \right\| \leq \sup_{A,n} \left\| \alpha \int_{A \cap \{|f_n| > c\}} f_n d\mu \right\| + \sup_{A,n} \left\| \alpha \int_{A \cap \{|f_n| \leq c\}} f_n d\mu \right\|.$$

В силу (7) и леммы 2, для $\alpha = 1$ выбором c можем сделать сколь угодно малым первое слагаемое. По лемме 1, второе слагаемое не превосходит величины $16 \sup_A \|c\mu(A)\|$, которую для данного c можно сделать малой выбором малого α (при этом используем

теорему [7] об ограниченности значений случайной меры). Поэтому имеет место равенство (1) из [4] для η_n , и выполняется (5).

Если выполняется (5), то (6) очевидно. Тогда выполнение равенства (1) из [4] для η_n необходимо для выполнения (5) (см. [4]). Как следует из (2), $\mu(A) = \int_A (1/f_n) d\eta_n$ ($f_n(x) \neq 0$ на A). Для $A \subset \{|f_n| > c\}$ из леммы 1 имеем $\|\mu(A)\| \leq 16 \sup_{B \subset A} \|(1/c) \eta_n(B)\|$. Из (1) [4] следует, что правая часть стремится к нулю при $c \rightarrow \infty$ равномерно по n . Поэтому выполняется (7).

Автору неизвестно, является ли (7) следствием (6) в общем случае. Однако для некоторых μ это так.

Следствие. Пусть случайная мера μ такова, что $\forall \gamma > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists c > 0 \forall B \in \mathcal{B} (\|\mu(B)\| > \gamma) \exists A \subset B$:

$$\sup_{F \subset A} \|\mu(F)\| < \delta, \quad \|\mu(A)\| > \varepsilon. \quad (8)$$

Тогда для любых интегрируемых f_n , для которых выполняется (6), будет выполняться (7).

Доказательство. Обозначим $2\gamma = \lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{n, B \subset \{|f_n| > c\}} \|\mu(B)\|$. В соответствии с теоремой 4, нам достаточно показать, что $\gamma = 0$. Допустим, $\gamma > 0$. Берем произвольное $\delta > 0$ и для него $c > 0$ из (8). Тогда для этого c найдутся $n_c \in \mathbb{N}$ и $B \subset \{|f_{n_c}| > c\}$: $\|\mu(B)\| > \gamma$. Теперь берем $A \subset B$, удовлетворяющее (8), и, взяв в лемме 1 $\eta = c\mu$, $f = f_{n_c}$, $h = 1/f_{n_c}$, $\alpha = 1/c$, получим

$$\sup_{F \subset A} \left\| \int_F f_{n_c} d\mu \right\| \geq \frac{1}{16} \|c\mu(A)\| > \frac{\varepsilon}{16}.$$

Случайные меры

$$\eta_n(A) = \int_A f_n d\mu$$

абсолютно непрерывны относительно $\sup_{F \subset A} \|\mu(F)\|$ (лемма 2), $(\forall A) \eta_n(A) \xrightarrow{P} \eta(A)$. По аналогу теоремы Витали-Хана-Сакса (теорема 3.2 в [8]) η_n равномерно абсолютно непрерывны относительно $\sup_{F \subset A} \|\mu(F)\|$ (из следствия 7.3.7 [2] легко получить, что указанный супремум является субмерой в понимании [8]). В то же время в последних неравенствах $\sup_{F \subset A} \|\mu(F)\| < \delta$, где δ может быть взято сколь угодно малым. Получено противоречие.

Легко проверить, что случайная мера, порожденная винеровским процессом на $[0, 1]$: $w(A) = \int_0^1 I_A dw$, удовлетворяет (8) для любого $0 < \varepsilon < 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Радченко В. Н. Интегралы по случайным мерам и случайные линейные функционалы. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 3, с. 594–596.
2. Turpin P. Convexités dans les espaces vectorielles topologiques généraux. — Diss. Math., 1976, v. 131, 220 p.
3. Drewnowski L. Topological rings of sets, continuous set functions, integration. III. — Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys., 1972, v. 20, № 6, p. 439–445.
4. Радченко В. Н. О сходимости интегралов по L_0 -значным мерам. — Матем. заметки, 1993, т. 53, в. 5, с. 102–106.
5. Радченко В. Н. Равномерная интегрируемость для интегралов по L_0 -значным мерам. — Укр. матем. журн., 1991, т. 43, в. 9, с. 1264–1267.
6. Мейер П.-А. Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973, 328 с.

7. *Drewnowski L.* Boundedness of vector measures with values in the spaces L_0 of Bochner measurable function. — Proc. Amer. Math. Soc., 1984, v. 91, № 4, p. 581–588.
8. *Drewnowski L.* Topological rings of sets, continuous set functions, integration. I. — Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys., 1972, v. 20, № 4, p. 269–276.

Поступила в редакцию
23.VI.1995

© 1997 г.

CLEMENT E.*

BIAS CORRECTION FOR THE ESTIMATION OF DISCRETIZED DIFFUSION PROCESSES FROM AN APPROXIMATED LIKELIHOOD FUNCTION

Проводится оценивание параметров дискретизированного диффузионного процесса, основанное на аппроксимации функции правдоподобия. Предполагается, что шаг между двумя последовательными наблюдениями процесса фиксирован. Для корректировки смещения оценок предлагается использовать имитации процесса.

Ключевые слова и фразы: диффузионный процесс, схема дискретизации, схема Эйлера, асимптотические свойства оценок.

1. Notation. We consider the univariate diffusion process (X_t) , the solution of the stochastic differential equation:

$$dX_t = b(\theta, X_t) dt + a(\theta, X_t) dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad (1)$$

where W_t is a standard brownian motion, θ is a parameter belonging to a compact subset Θ of $\mathbf{R}^p$, a and b are two known functions. We are interested in estimating θ from discrete observations of the process $(X_{t_i})_{0 \leq i \leq n}$, with a step between two consecutive observations $\Delta = t_{i+1} - t_i$ fixed. Since the transition probability of the homogeneous Markov process (X_{t_i}) has an untractable form (see [1]), we will not estimate θ by a maximum likelihood method but we will maximize an approximation of the likelihood function. Since we assume that the observation step is fixed, such estimators are biased (see [4]) and we propose here to correct the bias of these estimators from simulations of the process following the method proposed by Gouriéroux–Monfort–Renault [2].

We denote by θ_0 the true parameter value. We assume that a and b are smooth enough such that equation (1) admits a unique weak solution for the true value θ_0 of parameter (see [5]) and we denote by $P_{x_0}^{\theta_0}$ the distribution of this solution on the space of continuous functions from $\mathbf{R}^+$ into $\mathbf{R}$ equipped with the canonical filtration. P^W stands for the brownian measure. We denote by $p_\Delta^\theta(x, y)$ and $\pi^\theta(x)$ respectively the densities of the transition probability at step Δ and the invariant measure of the process solution of (1) for any parameter value θ .

From the observations $(X_{t_i})_{0 \leq i \leq n}$ of the process, we construct a first step estimator:

$$F_n = \arg \min_{\beta \in \Theta} L_n(\beta), \quad (2)$$

*E.N.S.A.E. 3, Avenue Pierre Larousse, 92245 Malakoff Cedex, France.