Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Королев, XVIII международный семинар (1996 г.) по проблемам устойчивости стохастических моделей (тезисы докладов), *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 2, 371–445

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1811>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:22:15

© 1997 г.

**XVIII МЕЖДУНАРОДНЫЙ СЕМИНАР
ПО ПРОБЛЕМАМ УСТОЙЧИВОСТИ
СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

XVIII Международный семинар по проблемам устойчивости стохастических моделей состоялся с 26 января по 1 февраля 1997 г. в небольшом курортном городке Хайдусобосло в нескольких километрах от Дебрецена, Венгрия. По традиции семинар проводился под эгидой Математического института РАН. Семинар проходил при поддержке Дебреценского университета имени Лайоша Кошута, Московского государственного университета, Венгерского общества имени Бернулли, Венгерского национального фонда научных исследований и фонда «Catching Up with European Higher Education».

В семинаре приняли участие более ста специалистов из Бельгии, Болгарии, Венгрии, Германии, Голландии, Греции, Израиля, Индии, Литвы, Польши, России, Украины, Франции, Швейцарии, Югославии, Японии.

Тематика докладов, представленных на семинаре, охватывала направления теории вероятностей и математической статистики, традиционно обсуждаемые на семинарах по проблемам устойчивости стохастических моделей: *предельные теоремы теории вероятностей и математической статистики, характеристики вероятностных распределений и их устойчивость, теория вероятностных метрик, предельные теоремы и характеристические задачи в стохастическом анализе, теория восстановления, теория массового обслуживания, метрики в математической статистике, прикладная статистика*. Наряду с этими темами, некоторые сообщения были посвящены задачам актуарной и финансовой математики.

Нынешний семинар имел одну замечательную особенность. Он был посвящен шестидесятилетнему юбилею В. М. Золотарева — основателя, организатора и руководителя международных семинаров по проблемам устойчивости стохастических моделей и М. Арато — активнейшего участника всех семинаров и организатора нескольких последних семинаров. В своих научных сообщениях и неформальных выступлениях на юбилейном вечере участники семинара отмечали выдающийся вклад В. М. Золотарева и М. Арато в современную теорию вероятностей.

На семинаре царил атмосфера доброжелательности и дружелюбия. Этому очень способствовали усилия венгерских организаторов семинара, предоставивших замечательные условия для плодотворных научных дискуссий и неформального общения участников. В этом нынешний семинар ни в чем не уступал XVI семинару, который также проводился в Венгрии (в Эгере) с 29 августа по 3 сентября 1994 г. при самом активном участии более ста математиков из двадцати стран. Мы получили возможность убедиться, что Венгрия гостеприимна в любое время года. К сожалению, труды XVI семинара, как и труды XVII семинара, состоявшегося 19–26 июня 1995 г. в Казани (собравшего более семидесяти участников из пятнадцати стран), не публиковались на русском языке. Они опубликованы в журнале «Journal of Mathematical Sciences» (т. 76, № 2 (1995), т. 78, № 1 (1996), т. 81, № 5 (1996), т. 83, № 3 (1997) и др.)

В этом выпуске журнала «Теория вероятностей и ее применения» публикуются краткие изложения сообщений участников XVIII семинара по проблемам устойчи-

ности стохастических моделей, вызвавшие наибольший интерес. Труды семинара будут опубликованы в трех номерах журнала «Journal of Mathematical Sciences».

Следующий, XIX Международный семинар по проблемам устойчивости стохастических моделей пройдет в сентябре 1998 г. в Вологде.

В. Ю. Королев

Абусев Р. А. (Пермь, Россия) Статистическое оценивание распределений выборочных характеристик обратного нормального распределения.

Обратное нормальное распределение $ON(x; \mu, \lambda)$ с плотностью

$$p(x | \mu, \lambda) = \frac{\lambda^{1/2}}{(2\pi)^{1/2} x^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{\lambda(x - \mu)^2}{2\mu^2 x} \right\}, \quad x > 0, \quad \mu > 0, \quad \lambda > 0 \quad (1)$$

впервые было введено Шредингером в 1915 г. и впоследствии широко исследовано многими авторами. Если $\pi_{00} = \{x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n_0}\}$ — выборка из распределения (1) и $n_0 \bar{x}_0 = \sum_{i=1}^{n_0} x_{0i}$, $V_0 = \sum_{i=1}^{n_0} [x_{0i}^{-1} - \bar{x}_0^{-1}]$, то $\bar{x}_0$, V_0 являются независимыми полными минимальными достаточными статистиками для μ , λ и $\bar{x}_0 \sim ON(\bar{x}_0; \mu, n_0 \lambda)$, $V_0 \sim \chi^2(V_0; n_0 - 1, \lambda^{-1})$, т.е. хи-квадрат распределение с $(n_0 - 1)$ степенями свободы и параметром $1/\lambda$.

Пусть

$$L(\pi_{00} | \mu, \lambda) = \prod_{i=1}^{n_0} p(x_{0i} | \mu, \lambda) = \frac{\lambda^{n_0/2} \prod_{i=1}^{n_0} x_{0i}^{-3/2}}{(2\pi)^{n_0/2}} \exp \left\{ -\left[\frac{n_0 \lambda (\bar{x}_0 - \mu)^2}{2\mu^2 \bar{x}_0} + \frac{\lambda V_0}{2} \right] \right\},$$

$$p(\bar{x}_0, V_0 | \mu, \lambda) = \frac{\sqrt{n_0 \lambda^{n_0} V_0^{(n_0-3)}}}{\sqrt{\pi 2^{n_0} \bar{x}_0^3} \Gamma((n_0 - 1)/2)} \times \exp \left\{ -\left[\frac{n_0 \lambda (\bar{x}_0 - \mu)^2}{2\mu^2 \bar{x}_0} + \frac{\lambda V_0}{2} \right] \right\}, \quad \bar{x}_0 > 0, \quad V_0 > 0,$$

— функция правдоподобия выборки π_{00} и плотность совместного распределения статистик $\bar{x}_0$, V_0 соответственно.

В данном резюме впервые приводятся основные результаты по построению несмещенных оценок, байесовских оценок и оценок максимального правдоподобия для распределений (2), (3) и маргинальных распределений статистик $\bar{x}_0$, V_0 при различных априорных предположениях о параметрах.

Пусть $\pi_N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ — независимая повторная выборка из (1). Для $l < [n/2] - 1$ ($[z]$ — целая часть z) обозначим $p(x_1, x_2, \dots, x_l | \mu, \lambda)$ плотность распределения l независимых случайных величин $x_1, \dots, x_l$.

Теорема 1. Предположим, что параметры μ , λ неизвестны. Тогда несмещенная оценка $\hat{p}(x_1, x_2, \dots, x_l | \mu, \lambda)$ для плотности $p(x_1, x_2, \dots, x_l | \mu, \lambda)$, построенная по выборке π_N задается формулой

$$\hat{p}(x_1, x_2, \dots, x_l | \mu, \lambda) = \frac{(N - l) \Gamma((N - l)/2) \bar{x}_N^{3/2} \prod_{i=1}^l x_i^{-3/2} \sqrt{N}}{\pi^{l/2} \Gamma((N - l - 1)/2) [N \bar{x}_N - l \bar{x}_l]^{3/2} V_N^{(N-3)/2}} \times \left[V_N - V_l - \frac{(\bar{x}_l - \bar{x}_N)^2 l N}{\bar{x}_l \bar{x}_N [N \bar{x}_N - l \bar{x}_l]} \right]^{(N-l-3)/2} \quad (2)$$

и выражена только через достаточные статистики

$$N\bar{x}_N = \sum_{i=1}^N x_i, \quad V_N = \sum_{i=1}^N [x_i^{-1} - \bar{x}_N^{-1}],$$

где

$$l\bar{x}_l = \sum_{i=1}^l x_i, \quad V_l = \sum_{i=1}^l [x_i^{-1} - (\bar{x}_l)^{-1}].$$

Следствие 1. Несмещенная оценка $\hat{L}(\pi_{00} | \mu, \lambda)$ для функции правдоподобия (2), когда оба параметра μ, λ неизвестны, и построенная на основе выборки $\pi_n = \{x_1, \dots, x_n\}$, независимой от π_{n_0} ($n > n_0$), имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{L}(\pi_{00} | \mu, \lambda) = & \frac{n(n+n_0)^{1/2} \Gamma((n+n_0-1)/2) \bar{x}_{n+n_0}^{3/2} \prod_{j=1}^{n_0} x_{0j}^{-3/2}}{\pi^{n_0/2} \Gamma((n-1)/2) [(n+n_0) \bar{x}_{n+n_0} - n_0 \bar{x}_0]^{3/2} V_{n+n_0}^{(n+n_0-3)/2}} \\ & \times \left[V_{n+n_0} - V_0 - \frac{n_0(n+n_0)(\bar{x}_0 - \bar{x}_{n+n_0})^2}{\bar{x}_0 \bar{x}_{n+n_0} [(n+n_0) \bar{x}_{n+n_0} - n_0 \bar{x}_0]} \right]^{(n-3)/2} \end{aligned} \quad (3)$$

Следствие 2. Несмещенная оценка $\hat{p}(x | \mu, \lambda)$ плотности (1) обратного нормального распределения с неизвестными параметрами μ, λ , построенная на основе выборки π_n , равна

$$\begin{aligned} \hat{p}(x | \mu, \lambda) = & n(n+1)^{1/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \bar{x}_{n+1}^{3/2} x^{-3/2} \\ & \times \left[V_{n+1} - \frac{(n+1)(x - \bar{x}_{n+1})^2}{x \bar{x}_{n+1} [(n+1) \bar{x}_{n+1} - x]} \right]^{(n-3)/2} \\ & \times \left[\pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) [(n+1) \bar{x}_{n+1} - x]^{3/2} V_{n+1}^{(n-2)/2} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $x_{n+1} = x$.

Рассмотрим задачу байесовского оценивания (3), (4) на основе квадратической функции потерь и элемента лебеговой меры $p(\mu, \lambda) d\mu d\lambda = \mu^{-2} d\mu d\lambda$.

Теорема 2. Байесовская оценка $p_B(\bar{x}_0, V_0 | \mu, \lambda)$ для плотности (3) с неизвестными параметрами μ, λ , построенная на основе выборки π_n дается выражением

$$\begin{aligned} p_B(\bar{x}_0, V_0 | \mu, \lambda) = & \frac{\sqrt{n_0} \Gamma((n+n_0+1)/2) V_0^{(n_0-3)/2} \sqrt{(n+n_0) \bar{x}_{n+n_0} - n_0 \bar{x}_0}}{\sqrt{\pi} \Gamma((n_0-1)/2) \Gamma((n+1)/2) \bar{x}_0^{3/2} \sqrt{(n+n_0) \bar{x}_{n+n_0}} V_{n+n_0}^{n_0/2}} \\ & \times \left[1 - \frac{V_0}{V_{n+n_0}} - \frac{n_0(n+n_0)(\bar{x}_0 - \bar{x}_{n+n_0})^2}{\bar{x}_{n+n_0} [(n+n_0) \bar{x}_{n+n_0} - n_0 \bar{x}_0] \bar{x}_0 V_{n+n_0}} \right]^{(n+1)/2}. \end{aligned}$$

Следствие 3. Байесовская оценка для плотности (1) при неизвестных параметрах μ, λ имеет вид

$$\begin{aligned} p_B(x | \mu, \lambda) = & \frac{\Gamma((n+2)/2) \sqrt{(n+1) \bar{x}_{n+1} - x} x^{-3/2}}{\Gamma((n+1)/2) \sqrt{\pi} \sqrt{(n+1) \bar{x}_{n+1}} V_{n+1}} \\ & \times \left[1 - \frac{(n+1)(\bar{x}_{n+1} - x)^2}{x \bar{x}_{n+1} [(n+1) \bar{x}_{n+1} - x] V_{n+1}} \right]^{(n+1)/2} \end{aligned}$$

Найдены также несмещенные оценки для плотности (3), байесовская оценка функции правдоподобия (2). Аналогичные результаты получены для маргинальных распределений. Изучены свойства полученных оценок.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 95-01-00015а.

Almási B., Sztrik J. (Debrecen, Hungary) The effects of service disciplines on the performance of a nonreliable terminal system.

In this paper we consider a stochastic queueing model for the performance evaluation of a real life computer system consisting of n terminals connected with a CPU. A user at the terminal i has thinking and processing times depending on index i . Let us suppose that the operational system is subject to random breakdowns, which may be software and hardware ones, stopping the service both at the terminals and at the CPU. The failure-free operation times of the system and the restoration times are random variables. The busy terminals are also subject to random breakdowns not affecting the system's operation. The failure-free operation times and the repair times of busy terminal i are random variables with distribution function depending on the index i . The breakdowns are serviced by a single repairman providing preemptive priority to the system's failure, while the restorations at the terminals are carried out according to FIFO rule. We assume that each user generates only one job at a time, and he waits at the CPU before he starts thinking again, that is, the terminal is inactive while waiting at the CPU, and it cannot break down. All random variables involved in the model construction are supposed to be exponentially distributed and independent of each other.

The aim of this paper is to investigate the effect of the different service disciplines, such as FIFO, processor sharing (PS), priority processor sharing (PPS), polling, on the main performance measures, such as utilizations, response times, throughput, mean queue length.

To deal with the problem we have to introduce the following random variables: $X(t) = 1$, if the perating system is failed at time t , $X(t) = 0$ otherwise, $Y(t)$ = the number of failed terminals at time t , $YI(t)$ = the indices of these terminals in the order of their breakdowns, $Z(t)$ = the number of jobs residing at the CPU at time t , $ZI(t)$ = the indices of these jobs.

Depending on the service discipline the random variable $ZI(t)$ gives the order of service by the CPU, too. It can easily be seen that the stochastic process $M(t) = (X(t), Y(t), YI(t), Z(t), ZI(t))$ is a Markov chain having a rather complex, and large state space. To get its the steady-state probabilities an efficient recursive computational method has been introduced and used for different service rules mentioned earlier, c.f. [1], [2]. Using this procedure several examples have been given to illustrate the effect of different system parameters and scheduling disciplines on the performance measures.

As it has been shown their effects are unpredictable in many cases. For relatively small number of terminals the performance characteristics can be calculated numerically. For greater values stochastic simulation is recommended. Finally, the importance of the objective measures should be emphasized since even in social optimization it could easily be ocured that if a scheduling is optimal for a given measure it will not be optimal for a closely related another one.

For illustration the following results are shown. Let us denote by $\lambda_i, \mu_i, \gamma_i, \tau_i, w_i$ the parameters of the exponentially distributed thinking, processing, operating, repair times and weight for terminal i , $i = 1, \dots, n$, respectively. Furthermore, let α, β denote the failure and repair rate of the CPU, n_b, U_i, U_{CPU}, U, T the mean number of busy terminals, utilization of terminal i , overall response time of the system, respectively. We have: input parameters $n = 4$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 1.0$,

i	λ_i	μ_i	γ_i	τ_i	w_i	w_i	w_i
1	.1000	.6000	.1000	.3000	10.0	30.0	1.0
2	.2000	.8000	.1500	.3000	30.0	20.0	10.0
3	.3000	.7000	.2000	.3000	20.0	10.0	20.0
4	.4000	.5000	.2500	.3000	1.0	1.0	30.0

Performance measures

	FIFO	PS	POLLING	PPS-1	PPS-2	PPS-3
n_b	1.4006	1.4077	1.4013	1.4323	1.4371	1.3762
U_r	.8270	.8277	.8269	.8293	.8283	.8287
U_{CPU}	.4858	.4854	.4837	.4837	.4827	.4893
U	2.7134	2.7208	2.7139	2.7453	2.7481	2.6942
T	10.1904	10.0698	10.1648	9.7514	9.4748	11.2935

The work was partially supported by the Hungarian National Foundation for Scientific Research, grant OTKA-T014974/95.

REFERENCES

1. *Almási B.* Response time for finite heterogeneous nonreliable queueing systems. — *Comp. and Mathem. with Appl.*, 1996, v. 31, p. 55–59.
2. *Almási B., Sztrik J.* A queueing model for a nonhomogeneous terminal system subject to breakdowns. — *Comp. and Mathem. with Appl.*, 1993, v. 25, p. 105–111.

Arató N. M. (Budapest, Hungary) Mean estimation of Brownian and Ornstein–Uhlenbeck sheets.

The Brownian sheet is one of the most important examples of Gaussian random fields. Some fundamental results were proved on the properties of this field (e.g., in [1], [2], [3]). We determine here explicitly the maximum-likelihood estimator of the mean of the Brownian and Ornstein–Uhlenbeck sheets by the help of the method of stochastic partial differential equations.

We say $W(t)$ ($t = (t_1, t_2)$: $t_1, t_2 \geq 0$) is a standard Brownian sheet, if it is a mean-zero Gaussian random field with a covariance function

$$\text{cov}(W(t_1, t_2), W(s_1, s_2)) = \min(t_1, s_1) \cdot \min(t_2, s_2).$$

As a generalized field, W satisfies a linear stochastic partial differential equation $\partial^2 W / (\partial t_1 \partial t_2) = \eta$ in $\mathbf{R}_0^{+2}$. Suppose that in the domain $G \subset \mathbf{R}_0^{+2} = \{(t_1, t_2): t_1, t_2 \geq 0\}$ we can observe a field $\widetilde{W}$, which is the Brownian sheet with mean $m \cdot u(t)$, that is, $\widetilde{W} = W(t) + m \cdot u(t)$, $t \in G$, where the constant m is unknown for us.

Assuming a few properties of domain G and function $u(t)$, we can determine the general form of the maximum-likelihood estimator of m :

$$\hat{m} = \frac{(\widetilde{W}, \partial^4 u / (\partial^2 t_1 \partial^2 t_2)) + (\widetilde{W}, z_\Gamma)}{\|\partial^2 u / (\partial t_1 \partial t_2)\|_{L_2}^2 + (u_\Gamma, z_\Gamma)},$$

where z_Γ is a special boundary test function (functional) on $\Gamma = \partial G$ (the boundary of G).

When the mean is a constant, that is $u(t) \equiv 1$ in G and $G \subset \mathbf{R}_0^{+2}$ is an open domain, $\Gamma_0 \subset \partial G$ a part of the boundary, where

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{t = (t_1, t_2): a_1 \leq t_1 \leq b_1, t_2 = \gamma(t_1)\}, \\ G &\subseteq \{(t_1, t_2): a_1 \leq t_1 \leq b_1, \gamma(t_1) \leq t_2\} \cup \{(t_1, t_2): b_1 \leq t_1, a_2 \leq t_2\}, \end{aligned}$$

and γ is a twice differentiable strictly monotone decreasing function, then the following theorem is true.

Theorem. *Let us observe a Brownian sheet with an unknown mean m in the domain G . Then the Gaussian measures, corresponding to different means, are equivalent and the maximum-likelihood estimator of the mean depends on the values and the generalized normal derivatives of the field $\widetilde{W}$ only on the part Γ_0 of the boundary of G :*

$$\hat{m} = d_1 \widetilde{W}(a_1, b_2) + d_2 \widetilde{W}(b_1, a_2) + \int_{\Gamma_0} \left(y_1(s) \widetilde{W}(s) + y_2(s) \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial n}(s) \right) ds.$$

Turning to our next case, we observe in the square $G = [0, T] \times [0, T]$ the Ornstein-Uhlenbeck sheet (a transformation of a Brownian sheet, see [3]) ξ , disturbed by an unknown constant $E\xi(t) = 0$, $\forall t \in \mathbf{R}^2$,

$$\text{cov}(\xi(t_1, t_2), \xi(s_1, s_2)) = e^{-|t_1 - s_1| - |t_2 - s_2|},$$

$\tilde{\xi} = \xi + m$, then the maximum-likelihood estimator of m is the following:

$$\hat{m} = \frac{\int_G \tilde{\xi}(t) dt - \int_{\partial G} \tilde{\xi}(t) dt + \tilde{\xi}(0, 0) + \tilde{\xi}(0, T) + \tilde{\xi}(T, 0) + \tilde{\xi}(T, T)}{T^2 - T + 1}.$$

Research supported by the Nat. Sci. Research Fund OTKA, grants № T014116, № T166665.

REFERENCES

1. Розанов Ю. А. Некоторые граничные задачи для обобщенных случайных полей. — Теория вероятн. и ее примен., 1990, т. 35, в. 4, с. 625–641.
2. Dalang R. C., Walsh J. B. Geography of the level sets of the Brownian sheet. — Probab. Theory Related Fields, 1993, v. 96, № 2, p. 153–176.
3. Walsh J. B. An introduction to stochastic partial differential equations. — In École d'Été de Probabilités de Saint Flour XIV-1984. Ed. P. L. Hennequin. Lecture Notes Math., 1986, v. 1180, p. 266–437.

Афанасьев Г. А. (Москва, Россия) Оптимизация среднего дохода инвестора в контракте с Европейским опционом.

Рассматривается модель финансового рынка, функционирующего в моменты $n = 0, 1, \dots, N < \infty$ и состоящего из двух активов — банковского счета $B = (B_n)$ и акции $S = (S_n)$. Динамика банковского счета подчиняется рекуррентным соотношениям $B_n = (1 + r_n) B_{n-1}$, $B_0 > 0$, где $\{r_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, не зависящая от (S_n) . Стоимость акции эволюционирует по закону $S_n = (1 + \xi_n) S_{n-1}$, $S_0 > 0$, где $\{\xi_n\}$ — последовательность дискретных случайных величин, образующих цепь Маркова, удовлетворяющую условию

$$\mathbf{E} \left(\frac{\xi_n}{\xi_0}, \dots, \xi_{n-1} \right) = \mathbf{E} \left(\frac{\xi_n}{e_{n-1}} \right) \quad \text{п.н.}$$

Здесь $e_{n-1} = e(\xi_{n-1})$ и $e(x) = -1$ при $x < 0$, $e(x) = 0$ при $x = 0$, $e(x) = 1$ при $x > 0$.

Инвестор, оперирующий на финансовом рынке, имеет целью оптимизировать свой средний доход по истечении N периодов времени в контракте с Европейским опционом (см., например, [1]) при начальном капитале x_0 . Пусть γ_n — количество акций, которое инвестор оставляет в портфеле ценных бумаг на n -м периоде времени, и (a_n, b_n) — интервал, в котором может изменяться γ_n . Управление $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ назовем оптимальным, если оно максимизирует среднюю прибыль инвестора $\mathbf{E}(x_N - \max(0, S_N - K))$, x_N — капитал на шаге N и K — оговоренная стоимость акции в Европейском опционе.

Введем средние значения

$$\Delta_n^{(i)} = \mathbf{E} \left(\frac{\xi_n}{e_{n-1}} = i \right) - \mathbf{E} r_n, \quad i = -1, 0, 1,$$

и функции

$$g_n(x) = a_n l(x > 0) + b_n l(x < 0),$$

где $l(A)$ — индикатор множества A . С помощью динамического программирования доказывается

Теорема. *Оптимальное управление γ_n^0 на шаге n является функцией только e_{n-1} и $\gamma_n^0(e_{n-1}) = g_n(\Delta_n^{(e_{n-1})})$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В. К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. I. Дискретное время. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 1, с. 23–79.
2. Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В. К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. II. Непрерывное время. — Теория вероятн. и ее примен., 1994, т. 39, в. 1, с. 80–129.

Афанасьева Л. Г. (Москва, Россия), Делкон Ф., Файоль Г. (Франция) Классификация случайных блужданий, возникающих при описании транспортных сетей.

Рассматривается открытая сеть обслуживания с N узлами и V приборами (автомобилями), возникшая как математическая модель транспортной системы. Поток клиентов задается метрически транзитивной последовательностью $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ интервалов между поступлениями. Если первый клиент прибывает в сеть в момент $t_1 = 0$,

то $(n+1)$ -й — в момент $t_{n+1} = \sum_{j=1}^n a_j$. Он направляется в узел i с вероятностью γ_j , $i = 1, \dots, N$, $\gamma_j > 0$, $\sum_{j=1}^N \gamma_j = 1$. Автомобиль, прибывающий вместе с клиентом в узел его назначения, например, i , где есть ожидающие клиенты, берет одного из них и направляется в узел j с вероятностью p_{ij} . Матрица маршрутизации $P = (p_{ij}, i, j = 1, \dots, N)$ предполагается эргодической и $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$ обозначает соответствующую ей инвариантную меру. Если автомобиль находит очередь пустой, он остается в данном узле до появления новых клиентов. После прибытия в узел следования клиенты покидают сеть. Клиент, который после поступления в сеть направлен в узел, где нет автомобилей, становится в очередь и ждет их прибытия. Количество мест для ожидания клиентов и для парковки автомобилей в узлах неограниченно, так что нет ни пустых пробегов автомобилей, ни нетерпеливых клиентов.

Дается полная классификация процесса, описывающего сеть в терминах эргодичности, транзиентности или нуль-рекуррентности. В частности, показывается, что этот процесс не может быть эргодическим, если $N > 1$. Приводится также детальная классификация отдельных узлов.

Введем следующие обозначения: τ_{ij} — среднее время следования из узла i в узел j , $q_j(n)$ — число клиентов в узле j в момент $t_n = 0$, $\lambda = (Ea_n)^{-1} > 0$, $\tau = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \pi_i \tau_{ij}$.

Пусть $i(n)$ — номер узла, в который поступает n -й клиент, и $j(n)$ — номер узла, в который он намерен следовать. Далее предполагается, что $\{i(n), j(n)\}_{n=1}^\infty$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов, а число узлов в сети $N > 1$.

Теорема 1. При $\gamma \neq \pi$ сеть транзиентна, т.е. $\sum_{j=1}^N q_j(n) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) п.н.

Если $\gamma_k > \sum_{i=1}^N \gamma_i p_{ik}$, то узел k транзиентен.

Теорема 2. Если $\gamma = \pi$, то сеть транзиентна при $N \geq 4$. Она нуль-рекуррентна для $N = 2, 3$ и $\tau = 0$.

Нуль-рекуррентность означает, что нет собственного предельного распределения, но найдется состояние, которое процесс $Q(n) = \{q_i(n), i = 1, \dots, N\}$ посещает бесконечно много раз с вероятностью единица. Аналогичное определение вводится для отдельных узлов.

Теорема 3. Если $\gamma = \pi$, то все узлы а) транзиентны, когда $\lambda\tau > V$; б) нуль-рекуррентны, когда $\lambda\tau < V$.

Теорема 4. Пусть

$$\frac{\gamma_1}{\pi_1} = \dots = \frac{\gamma_{l-1}}{\pi_{l-1}} < \frac{\gamma_l}{\pi_l} \leq \dots \leq \frac{\gamma_N}{\pi_N}.$$

Тогда

а) для любого $i \geq l$ справедливо $q_i(n) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) п.н.

б) Пусть $l = 2$ и $\rho_l = \lambda\tau\gamma_l/\pi_l$.

Если $\rho_l < V$, то первый узел эргодичен. Если $\rho_l > V$, то первый узел транзиентен.

Доказательства теорем опираются на построение мажорирующих сетей, мартингальную технику, метод каплинга и теорию регенерирующих процессов.

Предложенная модель может рассматриваться также как поллинговая система (см., например, [1]), в которой приборы перемещаются только вместе с клиентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borovkov A.A., Schassberger R. Ergodicity of a polling network. — Stoch. Proc. Appl., 1994, v. 50, p. 253–262.

A. A. Balkema, Yong-Cheng Qi. (Amsterdam, Netherlands) **Multivariate residual life times.**

Introduction: Limit laws, stability and algebra. Sequences of partial sums $X_1 + \dots + X_n$ and partial maxima $X_1 \vee \dots \vee X_n$ of i.i.d. variables are unstable. They may be stabilized by introducing norming constants so that the probability distributions of the normalized variables converge weakly to a nondegenerate limit distribution. Normalization is done by centering and scaling. The set of all normalizations $x \mapsto (x - b)/a$ with $a > 0$ and $b \in \mathbf{R}$ forms a group, the group $\mathcal{A}$ of positive affine transformations on $\mathbf{R}$.

Consider partial maxima in $\mathbf{R}^d$. Since we wish to preserve the order structure of the space $\mathbf{R}^d$ we choose coordinate affine transformations (CATs) to normalize the vectors $Y_n = X_1 \vee \dots \vee X_n$. CATs act coordinatewise as positive affine transformations:

$$\gamma(x_1, \dots, x_d) = (\gamma_1(x_1), \dots, \gamma_d(x_d)), \quad \gamma_i(x_i) = \frac{x_i - b_i}{a_i},$$

with $a_i > 0$ and $b_i \in \mathbf{R}$. The group of CATs is the direct product $\mathcal{A}^d$.

Assume that there exist CATs γ_n such that $\gamma_n(Y_n) \Rightarrow Z$, where $\Rightarrow$ denotes weak convergence and Z is nondegenerate. One can show that $\gamma_{[st]}(Y_{[st]}) \Rightarrow Z_s$ as $t \rightarrow \infty$ for any $s > 0$, where Z_s , $s > 0$, is the max-id process associated with Z . Since $\gamma_{[st]}(Y_{[st]}) \Rightarrow Z$ Khinchin's convergence of types theorem implies

$$\gamma_{[st]} \gamma_{[t]}^{-1} \rightarrow \alpha(s), \quad Z_s \stackrel{d}{=} \alpha(s)Z.$$

We see that a) the limit laws depend on the group of normalizations; b) each limit law satisfies a family of stability relations determined by a one-parameter subgroup of normalizations; c) the norming transformations vary regularly in the group of normalizations.

1. Residual life times of a random vector. The residual life time of the vector X beyond a point p is the vector X^p whose probability distribution is that of X conditioned on the event $\{X \geq p\}$. Define the tail function of X as $R(x) = P\{X \geq x\}$. Residual life times are only defined for $R(p) > 0$. The tail function R^p of the residual life time beyond p has the simple expression $R^p(x) = R(x)/R(p)$, $x \geq p$.

Question: What limit laws are possible for residual life times in $\mathbf{R}^d$?

We have to find nondegenerate vectors U such that

$$\gamma_n(X^{p_n}) \Rightarrow U, \quad \gamma_n \in \mathcal{A}^d. \quad (1.1)$$

To avoid trivialities assume that (p_n) is increasing and $R(p_n) \downarrow 0$.

Let p_∞ be the limit of the sequence (p_n) . (The components of p_∞ may be infinite.) Assume $p_n < p_\infty$, so all points p_n lie in the open set $(-\infty, p_\infty) \subset \mathbf{R}^d$. Then the answer to the question above is simple: All nondegenerate probability distributions on $\mathbf{R}^d$ are possible as limit in (1.1).

Theorem 1. Let (p_n) be an increasing sequence in $\mathbf{R}^d$ which satisfies the condition above: $p_n < p_\infty$ for all n . Then for every nondegenerate random vector U there exists a random vector X and a sequence of CATs γ_n such that (1.1) holds.

If we replace the sequence (p_n) in (1.1) by a strictly increasing continuous curve $p(t)$, $t \geq 0$, in $\mathbf{R}^d$ so that $R(p(t)) \downarrow 0$ then, the limit vector U lives on the orthant $[0, \infty)^d$ after a suitable normalization. Exclude the irregular case that $\mathbf{P}\{U > 0\} = 0$. Then the tail function S of U will satisfy a large number of stability relations

$$\frac{S(q+x)}{S(q)} = S(\alpha(x)), \quad x \geq 0, \quad (1.2)$$

with $\alpha \in \mathcal{A}^d$. The class of limit distributions is large and varies with the curve $p(t)$. This makes the situation intractable. So we turn to another direction.

Example. Consider a random vector X uniformly distributed over the unit disk $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Its density is $f(x, y) = 1_D(x, y)/\pi$. Now take a point p_∞ on the boundary with both coordinates positive, and let $p_n \uparrow p_\infty$. It is clear that X^{p_n} properly normed converges to the variable U uniformly distributed over the triangle $\Delta = \{x \geq 0, y \geq 0 \mid x + y < 1\}$. This holds for all increasing sequences $p_n \uparrow p_\infty$. The distribution on the triangle has the property that $U^p = \gamma(U)$ for any CAT γ which leaves the line $\{x + y = 1\}$ invariant and which maps the origin into the point $p \in \Delta$.

The example suggests that we call a random vector U on $[0, \infty)^d$ with tail function S stable if

$$U^p = \gamma(U), \quad p \geq 0, \quad S(p) > 0. \quad (1.3)$$

Definition. The random vector U on $[0, \infty)^d$ is *RLT stable* if there exists a connected subgroup of CATs, $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}^d$ so that (1.3) holds with $p = \gamma(0)$ for all $\gamma \in \mathcal{G}$ with $\gamma(0) \geq 0$. We also assume that $\mathcal{G}(0)$ contains an open subset of the orthant $(0, \infty)^d$.

2. Connected groups of CATs and RLT stable distributions. In the introduction the limit laws for partial sums and partial maxima were characterized by the stability relations $\alpha(t)(Z) = Z_t$, where $\alpha(t)$, $t > 0$, was a one dimensional subgroup of the group of normalizations. Here we have a similar situation but now the subgroup has dimension $d > 1$. The task of determining the d -dimensional subgroups of the $2d$ -dimensional group $\mathcal{A}^d$ is not as simple as that of determining the d -dimensional linear subspaces of a $2d$ -dimensional vector space.

Example. Take $d = 2$ and let $\mathcal{G}$ be the connected subgroup of $\mathcal{A}^2$ generated by the two transformations

$$\alpha(x, y) = (x + 1, 2y), \quad \beta(x, y) = (2x, y + 1). \quad (2.1)$$

The group $\mathcal{G}$ contains the elements $\alpha^t(x, y) = (x + t, 2^t y)$ and β^t for all $t \in \mathbf{R}$. Think of the curves $\alpha^t \gamma$ and $\beta^t \gamma$ as two railway systems emanating from the points γ . Which CATs can be reached by train starting from the identity? The group $\mathcal{G}$ contains $\tau = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$. This is a translation since the multiplicative parts cancel. A simple computation gives $\tau(0, 0) = (-1, 1)$. Similarly $\alpha\tau\alpha^{-1}$ is the translation $(0, 0) \mapsto (1, 2)$. We conclude that $\mathcal{G}$ contains all translations, and hence all CATs. Two CATs suffice to generate the four dimensional group $\mathcal{A}^2$.

Using the theory of Lie algebras one can show

Theorem 2. Let $\mathcal{G}$ be a connected group of CATs on $\mathbf{R}^d$ of dimension $\geq d$. Assume that $\mathcal{G}$ is not a product and does not contain a translation along one of the axes. Then in proper coordinates all CATs γ in $\mathcal{G}$ have the form

$$x \mapsto ax + b, \quad a > 0, \quad b \in L = \{x \in \mathbf{R}^d \mid x_1 + \dots + x_d = 0\}.$$

Theorem 2 allows us to determine the set of RLT stable distributions. If we restrict ourselves to indecomposable distributions there are only three kinds: exponential, Pareto and power laws. (A vector $W = (U, V)$ in $\mathbf{R}^{d+e}$ with U and V independent is decomposable.)

Theorem 3. Any indecomposable RLT stable distribution on $\mathbf{R}^d$ can be normalized so that its tail function satisfies $R(x) < 1$ for $x \geq 0$, $x \neq 0$, and $R(0) = 1$. Write $\xi = x_1 + \dots + x_d$. Then the tail function has the form below on $[0, \infty)^d$:

$$\begin{aligned} d = 1, \quad R(x) &= e^{-x}, \\ d \geq 1, \quad R(x) &= \frac{1}{1 + \xi^\alpha}, \quad \alpha > 0 \\ d \geq 1, \quad R(x) &= (1 - \xi)_+^\alpha, \quad \alpha > d - 1, \quad \alpha \neq 0. \end{aligned}$$

Baum D. (Trier, Germany) A BMAP/G/1-analysis based on a convolution calculus.

Models arising in high speed communication systems technology with integrated services in many cases deal with special Markov additive processes, termed so far as «batch Mardovian arrival processes» (BMAPs). One of the core problems in analyzing queues with BMAPs is the efficient computation of fundamental-period-matrices, requiring the solution of nonlinear matrix equations of the form $G = \sum_{n=0}^{\infty} A_n G^n$ or $G = \sum_{n=0}^{\infty} R^n A_n$. Several efficient algorithms for that purpose have been reported in the literature. Addressing, in the first line, the BMAP/G/1-analysis, in this note a new approach for the description of BMAPs based on a convolution calculus for matrix sequences is presented, which provides novel insights into — and proofs for — the relationships between the various determinative matrices. Additionally, the approach gives rise to convolution algorithms, whose fairly high time complexity is compensated, to some extent, by ease of formulation and implementation.

A convolution calculus. The noncommutative semi-group $(\mathbf{U}_m, *)$ of infinite sequences of $(m \times m)$ -matrices is considered together with the convolution operation «*». The convolution $\Phi * \Psi$ of two sequences $\Phi = \{U_0, U_1, \dots\}$ and $\Psi = \{V_0, V_1, \dots\}$ is defined through $\Phi * \Psi = \{(\Phi * \Psi)_n\}_{n \in \mathbf{N}_0} = \{\sum_{l=0}^n U_l V_{n-l}\}_{n \in \mathbf{N}_0}$. As a norm over $(\mathbf{U}_m, *)$ (among various possibilities) the so called c_1 -norm is chosen: $\|\cdot\|_1^*: \mathbf{U}_m \rightarrow \mathbf{IR}_+ \cup \{\infty\}$, defined by $\|\Phi\|_1^* = \sum_{n=0}^{\infty} \|U_n\|_{\infty}$. An identity element in $(\mathbf{U}_m, *)$ is represented by $1 = \{I, O, O, \dots\}$. Many aspects of this calculus have been discussed; among them the following:

1. A sequence $\Phi = \{U_0, U_1, \dots\}$, whose first entry matrix U_0 is regular, possesses a left and right inverse $\Phi^{(*-1)} = \{u_0, u_1, u_2, \dots\}$ with $u_0 = U_0^{-1}$, $u_n = -U_0^{-1}(\sum_{l=1}^n U_l u_{n-l})$ for $n \geq 1$, such that $\Phi * \Phi^{(*-1)} = \Phi^{(*-1)} * \Phi = 1$.

2. For any $\Phi \in (\mathbf{U}_m, *)$ a convolutional exponential function $e^{*\Phi^t}$ can be defined through $e^{*\Phi^t} := \sum_{j=0}^{\infty} t^j \Phi^{*(j)} / j!$, where Φ^{*j} denotes the j -fold convolution of Φ with itself.

3. Those c_1 -norm-bounded sequences Φ, Ψ , which commute under $*$, satisfy the equation $e^{*t(\Phi+\Psi)} = e^{*t\Phi} * e^{*t\Psi}$ for $t \in \mathbf{R}$.

4. For member-wise defined derivatives, the relation $\frac{d}{dt} e^{*t\Phi} = \Phi * e^{*t\Phi} = e^{*t\Phi} * \Phi$ holds.

Kronecker products and Kronecker sums of sequences of square matrices are introduced as $\Phi \otimes' \Psi = \{\sum_{l=0}^n U_l \otimes V_{n-l}\}_{n \in \mathbf{N}_0}$, and $\Phi \oplus' \Psi = \{U_n \oplus V_n\}_{n \in \mathbf{N}_0}$, respectively. According to that, for sequences $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k \in (\mathbf{U}_m, *)$, the notation $\prod_{j=1}^k \Phi_j := \Phi_1 \otimes' \Phi_2 \otimes' \dots \otimes' \Phi_k$, and $\sum_{j=1}^k \Phi_j := \Phi_1 \oplus' \Phi_2 \oplus' \dots \oplus' \Phi_k$ is used. Then, for $\Phi_i, i \in \{1, \dots, k\}$, being c_1 -norm-bounded sequences, $e^{*(\sum_{j=1}^k \Phi_j)} = \prod_{j=1}^k e^{*\Phi_j}$.

BMAP characterization related to BMAP/G/1 queues. It can be shown that Poisson processes, compound Poisson processes, and batch Markovian arrival processes all exhibit the same form $\Pi(t) = e^{*t\Delta}$ of convolutional exponential state probability distribution, where $\Pi(t) = \{P_0(t), P_1(t), P_2(t), \dots\}$ is the sequence of state probabilities,

or state probability matrices, respectively, and $\Delta = \{D_0, D_1, D_2, \dots\}$ is characterized, in case, by the underlying Markov process. The superposition of k independent BMAPs with phase generators $D_{(i)}$, as is well known, results in a BMAP. We show that its state probability sequence $\Pi(t)$ can be written in this portrayal as $\Pi(t) = e^{*t\Delta} = e^{*t\sum_{i=1}^n \Delta_{(i)}}$.

For BMAP/G/1 queues, the solution $\Pi(t) = e^{*t\Delta}$ of the C-K-differential equations leads to the representation $A_n = \int_0^\infty \sum_{j=0}^\infty (\tau^j/j!) \Delta_n^{(*j)} dH(\tau)$ ($n \geq 0$) for the «arrival matrices» A_n . This relation, according to Fubini's theorem immediately provides the matrix-exponential representation $G = \int_0^\infty e^{\Delta[G]t} dH(t)$ of the fundamental-period matrix G , which had been proven via probability theoretical arguments by Lucantoni in 1991. As another by-product, the commutativity of the matrices $P(t) = \sum_{n=0}^\infty P_n(t)$, D , and $A = \sum_{n=0}^\infty A_n$, as well as that of the matrix transforms $\Pi(t)[G^*(z, s)]$, $\Delta[G^*(z, s)]$, and $G^*(z, s)$ is obtained.

Introducing so called *upper* (or *lower*) *semi-convolutions* $[*k]U_j$ (or $[_*k]U_j$), defined as self-convolutions of sequences, for which the first $k-1$ entries (or components with index greater than k , respectively) are the null-matrix, if k is the convolution order, the step matrix, if G_n is the convolution order, the step matrices G_n with $G = \sum_{n=1}^\infty G_n$ can be represented as $G_k = [*k-1]\alpha_{k-1}A_0 = [_*k-1]\alpha_{k-1}A_0$, where $\alpha = \{A_0, A_1, \dots\}$. Upper semi-convolutions satisfy the recursion equation $[*k+1]\alpha = [*k]\alpha A - g_k$, where each g_k is a vector of matrices $g_k = (O, O, \dots, O, G_{k+1}, O, \dots)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, and A

is the block Toeplitz matrix $A = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \cdot \\ 0 & A_0 & A_1 & \cdot \\ 0 & 0 & A_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$. The block Hessenberg matrix

$A_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \cdot \\ A_0 & A_1 & A_2 & \cdot \\ 0 & A_0 & A_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ allows to represent G as $G = (\sum_{k=0}^\infty A_1^k)_{00}A_0$. Resulting con-

volution algorithms exhibit captivating simplicity, although their asymptotic complexity still is of cubic order in matrix dimensions.

Бенинг В. Е. (Москва, Россия) Некоторые свойства асимптотически эффективных U -статистик.

Для функций распределения асимптотически эффективных U -статистик в задаче проверки гипотез получены оценки скорости сходимости и асимптотические разложения при справедливости альтернативной гипотезы. Найдены также формулы для дефектов критериев, основанных на таких статистиках. Аналогичные результаты для L - и R -статистик доказаны в [3], [4], [5].

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью $f(x, \theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}^1$. Рассмотрим задачу проверки простой гипотезы $H_0: \theta = 0$ против последовательности близких альтернатив $H_{1n}: \theta = \lambda n^{-1/2}$, $0 < \lambda \leq C$. Наилучший критерий уровня $\alpha \in (0, 1)$ основан на

$$\Lambda_n = \sum_{i=1}^n \log \frac{f(X_i, \lambda n^{-1/2})}{f(X_i, 0)}.$$

Рассмотрим асимптотически эффективную U -статистику вида

$$S_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} h(X_i, X_j),$$

где ядро $h(x, y)$ имеет вид

$$h(x, y) = l^{(1)}(x) + l^{(1)}(y) + \Psi(x, y),$$

$$l^{(k)}(x) = \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} \log f(x, \theta)|_{\theta=0}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и $\Psi(x, y)$ — некоторая симметричная функция, обладающая свойством

$$\mathbf{E}_0(\Psi(X_1, X_2) | X_1) = 0 \quad \text{п.в.}$$

Обозначим β_n^* и β_n мощности критериев уровня $\alpha \in (0, 1)$, основанных соответственно на Λ_n и S_n .

Теорема. 1. Пусть плотность $f(x, \theta)$ удовлетворяет условию (L) работы [3] и $\sigma^2 = \mathbf{E}_0(l^{(1)}(X_1))^2 > 0$, $\mathbf{E}_0 \Psi^2(X_1, X_2) < \infty$ (см. [1, следствие 2.1]). Тогда для любого $\gamma > 0$ существует константа $A > 0$ такая, что

$$\sup_{x \leq \gamma} \left| \mathbf{P}_1 \{ \sigma_n^{-1} S_n < x \} - \Phi(x - \lambda \sigma) \right| \leq A n^{-1/2},$$

где $\sigma_n^2 = n(n-1)^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} n(n-1) \mathbf{E}_0 \Psi^2(X_1, X_2)$.

2. Пусть плотность $f(x, \theta)$ удовлетворяет условию (A) [4], $\mathbf{E}_0 |l^{(1)}(X_1)|^3 < \infty$, для $r > 2$ $\mathbf{E}_0 |\Psi(X_1, X_2)|^r < \infty$ и при гипотезе $H_0 l^{(1)}(X_1)$ удовлетворяет условию (C) Крамера (см. [2, теорема 1.2]).

Тогда

$$\sup_{x \leq \gamma_n} \left| \mathbf{P}_1 \{ \sigma_n^{-1} S_n < x \} - G_n^{(1)}(x) \right| = o(n^{-1/2}),$$

где $\exp\{\gamma_n\}(\log n)^{-3/2} \rightarrow 0$ и

$$G_n^{(1)}(x) = \Phi(x - \lambda \sigma) - \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi(x - \lambda \sigma) \left[\frac{k_3}{6} (x^2 - 1) + \frac{\lambda I_0}{6\sigma} (x + \lambda \sigma) + \frac{\lambda^2}{2} I_1 \right],$$

$$k_3 = \sigma^{-2} (I_0 + 3I_2), \quad I_0 = \sigma^{-1} \mathbf{E}_0 (l^{(1)}(X_1))^3,$$

$$I_1 = \sigma^{-1} \mathbf{E}_0 l^{(1)}(X_1) l^{(2)}(X_1), \quad I_2 = \sigma^{-1} \mathbf{E}_0 l^{(1)}(X_1) l^{(1)}(X_2) \Psi(X_1, X_2).$$

3. При условиях регулярности, близких к условиям работы [5], справедлива формула

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\beta_n^* - \beta_n) = \frac{\lambda}{8\sigma} \varphi(u_\alpha - \lambda \sigma) \left[4(1 - u_\alpha^2) I_2^2 + 4\lambda u_\alpha I_2 (I_1 - \sigma) + \lambda^2 (I_3 - I_1^2) \right],$$

где $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$, $I_3 = \mathbf{E}_0 ((l^{(2)}(X_1))^2 - \sigma^2)$ и $\Phi(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ — функция распределения и плотность стандартного нормального закона.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 96-01-01919.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Helmert R., Van Zwet W. R.* The Berry-Esseen bound for U -statistics. — In: *Statistical Decision Theory and Related Topics 3*. S. S. Gupta and J. O. Berger, eds. v. 1, New York, Academic Press, 1982, p. 497–512.
2. *Bickel P. J., Goetze F., Van Zwet W. R.* The Edgeworth expansion for U -statistics of degree two. — *Ann. Statist.*, 1986, v. 14, № 4, p. 1463–1484.
3. *Bening V. E.* On the rate of convergence of L - and R -statistics under alternatives. — *J. Math. Sciences*, 1995, v. 76, № 2, p. 2227–2240.

4. Bening V. E. Asymptotic expansions for L - and R -statistics under alternatives. — J. Math. Sciences, 1995, v. 76, № 1, p. 2094–2109.
5. Bening V. E. A formula for deficiency: one sample L - and R -tests 1. — Math. Methods of Statistics, 1995, v. 4, № 2, p. 167–188.

Бенинг В. Е., Королев В. Ю. (Москва, Россия) Предельные теоремы для обобщенных неординарных процессов Кокса.

Пусть $Y_1, Y_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные неотрицательные целочисленные случайные величины (с.в.). Пусть $N_0(t)$, $t \geq 0$, — стандартный пуассоновский процесс (т.е. однородный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью), независимый от $Y_1, Y_2, \dots$. Положим

$$N_1(t) = \sum_{j=1}^{N_0(t)} Y_j, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

(для определенности мы считаем, что $\sum_{j=1}^0 = 0$). Пусть $\Lambda(t)$, $t \geq 0$, — случайный процесс с неубывающими непрерывными справа траекториями такой, что $\Lambda(0) = 0$ и $P\{\Lambda(t) < \infty\} = 1$ для всех $t > 0$. Предположим, что процессы $\Lambda(t)$ и $N_1(t)$ независимы. Положим

$$N(t) = N_1(\Lambda(t)), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Процесс $N(t)$ будем называть неординарным дважды стохастическим пуассоновским процессом (или неординарным процессом Кокса), управляемым процессом $\Lambda(t)$ и порожденным последовательностью $Y_1, Y_2, \dots$. Если $P\{Y_1 = 1\} = 1$, то $P\{N_1(t) = N_0(t)\} = 1$, и $N(t)$ становится ординарным, т.е. обычным, процессом Кокса.

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные с.в., не зависящие от процесса $N(t)$. Положим

$$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Процесс $S(t)$ будем называть обобщенным неординарным дважды стохастическим пуассоновским процессом (или обобщенным неординарным процессом Кокса), управляемым процессом $\Lambda(t)$ и порожденным последовательностями $Y_1, Y_2, \dots$ и $X_1, X_2, \dots$.

Процессы $S(t)$, определяемые соотношениями (1)–(3), являются вполне естественными моделями поведения некоторых характеристик в финансовой инженерии и страховании.

Будем считать, что существуют $EY_1 = a$ и $DY_1 = b^2$. Тогда из (1) следует, что $EN_1(t) \equiv at$ и $DN_1(t) \equiv t(a^2 + b^2)$. Предположим, что $E\Lambda(t) \equiv t$ и будем исследовать предельное поведение $S(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Предположим также, что существуют $EX_1 = \alpha$ и $DX_1 = \sigma^2$. Оказывается, что асимптотическое поведение процессов $S(t)$ принципиально различно в случаях $\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$. Нетривиальные предельные законы в этих двух случаях получаются при различных нормировках управляющего процесса.

Символы $\Rightarrow$ и $\xrightarrow{P}$ будут соответственно обозначать слабую сходимость и сходимость по вероятности. Стандартную нормальную функцию распределения (ф.р.) мы будем обозначать $\Phi(x)$.

Сначала предположим, что $\alpha = EX_1 = 0$ и, следовательно, $ES(t) \equiv 0$ и $DS(t) \equiv a\sigma^2 t$.

Теорема 1. Предположим, что $a > 0$ и $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty, t \rightarrow \infty$. Тогда одномерные распределения нормированного обобщенного неординарного процесса Кокса слабо сходятся к распределению некоторой случайной величины Z :

$$\frac{S(t)}{\sigma\sqrt{at}} \Rightarrow Z, \quad t \rightarrow \infty,$$

тогда и только тогда, когда существует неотрицательная случайная величина U такая, что

- 1) $P\{Z < x\} = \int_0^\infty \Phi(x/\sqrt{u}) dP\{U < u\}, x \in \mathbb{R};$
- 2) $\Lambda(t)/t \Rightarrow U, t \rightarrow \infty.$

Следует отметить, что класс масштабных смесей нормальных законов, которые являются предельными в теореме 1, весьма богат и содержит, в частности, распределения Коши, Стюдента, Лапласа (двойное показательное), симметричные устойчивые законы. Все масштабные смеси нормальных законов имеют более тяжелые хвосты нежели само нормальное распределение. Это обстоятельство особенно важно для их использования в задачах финансовой математики.

Теперь рассмотрим такие обобщенные неординарные процессы Кокса, в которых $\alpha = EX_1 \neq 0$.

Легко видеть, что при $t \geq 0$ мы имеем $ES(t) = \alpha at$, $DS(t) = \sigma^2 at + \alpha^2 DN(t)$, так что $DS(t) \neq \sigma^2 at$ при $a \neq 0$. Тем не менее, в теореме 2 мы будем нормировать процесс $S(t)$ величиной $\sqrt{t}$ вместо $\sqrt{DS(t)}$, формально не предполагая существования второго момента управляющего процесса $\Lambda(t)$.

Теорема 2. Пусть $a > 0$. Предположим, что $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty, t \rightarrow \infty$. Тогда одномерные распределения неслучайно центрированного обобщенного неординарного процесса Кокса слабо сходятся при $t \rightarrow \infty$ к распределению некоторой случайной величины Z : $(S(t) - \alpha at)/\sqrt{t} \Rightarrow Z, t \rightarrow \infty$, тогда и только тогда, когда существует случайная величина V такая, что

- 1) $P\{Z < x\} = E\Phi\{(x - \alpha aV)/\sqrt{\sigma^2 a + \alpha^2(a^2 + b^2)}\}, x \in \mathbb{R};$
- 2) $(\Lambda(t) - t)/\sqrt{t} \Rightarrow V, t \rightarrow \infty.$

Мы также приводим вытекающие из теорем 1 и 2 критерии асимптотической нормальности обобщенных неординарных процессов Кокса, оценки скорости сходимости в теоремах 1 и 2, асимптотические разложения и оценки функций концентрации одномерных распределений процессов $S(t)$ как с нулевым, так и с ненулевым средним. Доказательства базируются на результатах работ [1], [6], [7]. Отдельные случаи разобраны в [1]–[5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 96-01-01919.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gnedenko B. V., Korolev V. Yu. Random summation: limit theorems and applications. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1996.
2. Бенинг В. Е., Королёв В. Ю. Асимптотическое поведение обобщенных процессов Кокса. — Вестник моск. ун-та, сер. 15 вычисл. матем. и кибер., 1996, вып. 3, с. 55–68.
3. Бенинг В. Е., Королёв В. Ю. Предельное поведение неслучайно центрированных обобщенных процессов Кокса. — Фундаментальная и прикладная математика, 1996, т. 2, вып. 4, с. 957–975.
4. Bening V. E., Korolev V. Yu. Asymptotic behavior of generalized non-ordinary Cox processes. — In: Probabilistic Methods in Discrete Mathematics. Proceedings of the Fourth International Petrozavodsk Conference. VSP, Utrecht, 1997, p. 111–129.

5. Bening V. E., Korolev V. Yu. Asymptotic behavior of generalized non-ordinary Cox processes with nonzero means. — J. Math. Sci., 1997, (В печати).
6. Korolev V. Yu. A general theorem on limit behavior of superpositions of independent stochastic processes with applications to Cox processes. — J. Math. Sci., 1996, v. 81, № 5, p. 2951–2956.
7. Королёв В. Ю. О кратных суперпозициях случайных процессов. — В сб.: Третья Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам. Туапсе, 17–24 сентября 1996 г. Тезисы докладов, ТВП, Москва, с. 89–90.

Булинская Е. В. (Москва, Россия) Оптимальный контроль и устойчивость некоторых систем.

Основным объектом исследования является предельное поведение (при $n \rightarrow \infty$) нормированного момента остановки $\tau_{x,n} = \eta_{x,n} (E\eta_{x,n})^{-1}$ неоднородных целочисленных случайных блужданий в полосе $(0, n)$. Пусть $S_i = x + \sum_{j=1}^i X_j$, $i \geq 1$, где x — начальное состояние, а X_j , $j \geq 1$, — скачки случайного блуждания с двумя поглощающими границами, тогда $\eta_{x,n} = \min\{i > 0, S_i = 0 \text{ или } S_i = n\}$.

Цель работы изучить влияние управления на асимптотическое поведение и устойчивость стохастических моделей, возникающих в теории запасов, страхования, теории массового обслуживания и других приложениях. Продолжая исследования [1] и [2], мы обобщаем их в двух направлениях: рассматривается более широкий класс управлений и решаются задачи оптимизации.

Предположим далее, что $P\{X_{i+1} = 1 | S_i = y\} = p(y)$, $P\{X_{i+1} = -1 | S_i = y\} = q(y)$, $P\{X_{i+1} = 0 | S_i = y\} = r(y)$ независимо от момента и способа достижения состояния y процессом S_i , $i \geq 1$, при этом $p(y) > 0$, $q(y) > 0$, $r(y) \geq 0$, $p(y) + q(y) + r(y) = 1$ для $y \in (0, n)$ и $p(y) = q(y) = 0$, $r(y) = 1$ для $y = 0, n$.

Наличие многоуровневого управления с l переключающими уровнями n_i , $i = 1, \dots, l$, $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_l < n_{l+1} = n$ означает, что $p(y) = p_t$, $q(y) = q_t$, $r(y) = r_t$ для $y \in [n_t, n_{t+1})$, $t = 0, \dots, l$ (при $t = 0$ состояние $y = 0$ исключается).

В приложениях желательно не допустить остановки как можно дольше, поэтому рассматриваются управления, создающие защитные зоны вдоль границ, т.е. выбираются числа k и m такие, что $1 \leq k \leq m \leq l$ и $p_t > q_t$, $t = 0, \dots, k-1$, $p_t = q_t$, $t = k, \dots, m-1$, $p_t < q_t$, $t = m, \dots, l$.

Все результаты получены в предположении $(n_{i+1} - n_i) n^{-1} \rightarrow a_i$, где a_i , $i = 0, \dots, l$, — положительные постоянные и $\sum_{i=0}^l a_i = 1$.

Как показывает сравнение приведенных ниже теорем с результатами [2] для неуправляемых процессов, введение указанных управлений стабилизирует систему, радикально изменяя ее асимптотическое поведение.

Теорема 1. Пусть $x \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ так, что $n - x \rightarrow \infty$, тогда $\tau_{x,n} \xrightarrow{d} \tau$. Случайная величина τ имеет показательное распределение с параметром 1.

Теорема 2. Пусть целое число s фиксировано, тогда $\tau_{s,n} \xrightarrow{d} \xi_s$, $\tau_{n-s,n} \xrightarrow{d} \zeta_s$ при $n \rightarrow \infty$. Распределение ξ_s (соотв. ζ_s) является смесью, с весами $1 - \alpha_0^s$ и α_0^s (соотв. $1 - \alpha_l^{-s}$ и α_l^{-s}) показательного распределения с параметром $1 - \alpha_0^{-s}$ (соотв. $1 - \alpha_l^{-s}$) и вырожденного, сосредоточенного в нуле, а $\alpha_t = q_t p_t^{-1}$, $t = 0, l$.

Выбирая в качестве целевой функции скорость роста $E\eta_{x,n}$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. максимизируя $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln E\eta_{x,n}$, получим следующие результаты.

Теорема 3. Оптимальное поведение — иметь не более трех переключающих уровней, какова бы ни была сумма s , выделенная на осуществление контроля.

Теорема 4. Оптимальное управление имеет один переключающий уровень, если оно осуществляется бесплатно (или $s = \infty$). То же самое справедливо в случае $s < \infty$, если функции издержек — выпуклые возрастающие.

Получен явный вид параметров оптимального управления.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ, грант 96-01-01092.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булинская Е. В. О пересечении высокого уровня некоторым классом случайных процессов с дискретным временем. — *Фундаментальная и прикладная математика*, 1996, т. 1, № 1, с. 81–107.
2. Булинская Е. В. Пределные теоремы для моментов остановки случайных блужданий в полосе. — *Фундаментальная и прикладная математика*, 1995, т. 2, № 4, с. 977–997.

Vil'chevskiy N. O., Shevlyakov G. L. (Санкт-Петербург, Россия) On Rao–Cramer inequality, Fisher information and lattice least favourable distributions.

One of the basic approaches to the synthesis of robust estimation procedures is the minimax principle. In this case, under a given class of distributions, the least favourable distribution (which minimizes the Fisher information) is determined. The unknown parameters of a distribution model are estimated by means of the maximum likelihood method for this distribution [1].

The form of the solution obtained by the minimax approach essentially depends upon the characteristics of a distribution class. As a rule, the classes of continuous and symmetric distributions are considered [1]. In many real-life problems of data processing, the results of measurements include groups of equal values. Furthermore, the results of measurements usually come rounded off in accordance with the scale of a measuring device playing a role of a discretizator. Thus, in this case, the use of continuous distribution models seems not adequate to the original problem of data processing, and it is rather important for applications to design robust methods for discrete distribution models that correspond to the real nature of data.

Here, we obtain the discrete analogue of the Rao–Cramer inequality in the problem of estimation of a lattice location parameter and the corresponding analogue of the Fisher information for a lattice distribution class. The least favourable lattice distributions minimizing the Fisher information preserve the structure of their prototypes in the continuous case and manifest a remarkable stability to the departures from the assumptions of regularity of distribution classes.

Consider the class of lattice distributions:

$$f_i(x) = \sum_i p_i \delta(x - i\Delta), \quad \sum_i p_i = 1, \quad (1)$$

where $\delta(\cdot)$ is the delta-function of Dirac, Δ is a step of discretization.

We consider the problem of estimation of a lattice location parameter with $\theta \in \mathbb{Z}$, and, in this case, the following analogue of the Rao–Cramer inequality is valid.

Theorem 1. Let $x_1, \dots, x_n$ be a sample of independent and identically distributed random observations with the distribution density $f_i(x - \theta)$ of the form (1), $p_i > 0$ and $\Delta = 1$, $i \in \mathbb{Z}$; $x_1, \dots, x_n$, $\theta \in \mathbb{Z}$.

Let $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x_1, \dots, x_n)$ be a lattice unbiased estimate of a lattice location parameter $\theta_n \in \mathbb{Z}$, $E\hat{\theta}_n = \theta$. Then the following inequality holds for the variance of this estimate:

$$D\hat{\theta}_n \geq \left(\left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{(p_{i-1} - p_i)^2}{p_i} + 1 \right)^n - 1 \right)^{-1}.$$

The essential feature of the obtained result (the Chapman–Robbins type inequality [2]) is that, in the discrete case, the lower bound of the estimate's variance decreases

exponentially with $n \rightarrow \infty$ providing the corresponding efficiency of estimation much greater than in the continuous case.

Corollary. *Within the class of lattice distributions (1) with a lattice location parameter θ , the analogue of the Fisher information is of the χ^2 -metric form*

$$I(f_i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{(p_{i-1} - p_i)^2}{p_i}. \quad (2)$$

Furthermore, we consider the discrete analogue of the least favourable distribution for the class of continuous symmetric nondegenerate distributions

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ f: f(0) \geq \frac{1}{2a} > 0, f(x) \geq 0, f(-x) = f(x), \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \right\}$$

with the Laplace least favourable density

$$f_1^*(x) = \frac{1}{2a} e^{-|x|/a}. \quad (3)$$

Let $\mathcal{P}_1$ be the class of lattice nondegenerate distributions (the lattice analogue of the class $\mathcal{F}_1$)

$$\mathcal{P}_1 = \left\{ p_i, i \in \mathbb{Z}: p_i > 0, p_0 \geq \gamma_0 > 0, p_{-i} = p_i, \sum p_i = 1 \right\}.$$

Theorem 2. *Within the class of lattice distributions $\mathcal{P}_1$, the solution of the variational problem of minimization of Fisher information (2) has the form*

$$p_{-i}^* = p_i^* = \alpha^i \gamma_0, \quad \alpha = \frac{1 - \gamma_0}{1 + \gamma_0}, \quad i = 0, 1, \dots$$

The least favourable lattice distribution f_{11}^* (1) with the geometric progression of p_i^* is the discrete analogue of the least favourable Laplace density f_1^* (3) for the continuous distribution class $\mathcal{F}_1$.

Similar results are also valid for the classes of ε -contaminated finite distributions and their lattice analogues.

REFERENCES

1. Хьюбер П. Робастность в статистике. М.: Мир, 1984.
2. Chapman D. G., Robbins H. E. Minimum variance estimation without regularity assumptions. — Ann. Math. Statist., 1951, v. 22, p. 581–586.

Виноградов О. П. (Москва, Россия) Условие Крамера является необходимым и достаточным для экспоненциального убывания вероятности разорения.

Если выполнено условие Крамера, то классической теоремой теории риска (теорема Крамера–Лундберга) является теорема об экспоненциальном убывании вероятности разорения при неограниченном возрастании начального капитала (см., например, [1]).

Нашим основным результатом является обратная теорема.

Теорема. Если при неограниченном увеличении начального капитала, вероятность разорения экспоненциально убывает, то справедливо условие Крамера.

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из результата автора (см. [2, теорема 2]) и основано на простой связи между вероятностью разорения и математическим ожиданием числа частиц в одном ветвящемся процессе.

Рассмотрим ветвящийся процесс с превращениями, зависящими от возраста, у которого $g(x)$ — плотность распределения продолжительности жизни произвольной частицы, $\alpha < 1$ — математическое ожидание числа частиц, порожденной одной частицей при ее смерти, $Z(x)$ — число частиц в момент x , $A(x) = EZ(x)$.

Пусть размеры выплат страховой компании образуют последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$ и математическим ожиданием μ . Моменты страховых выплат образуют однородный пуассоновский процесс с параметром λ , и пусть интенсивность поступления страховых взносов равна c ($\lambda\mu/c < 1$). Допустим, что начальный капитал страховой компании равен x и $\psi(x)$ — ее вероятность разорения.

Рассмотрим ветвящийся процесс с превращениями, зависящими от возраста, у которого

$$g(x) = \frac{1 - F(x)}{\mu}, \quad \alpha = \frac{\lambda\mu}{c}.$$

Тогда из интегральных уравнений, которым удовлетворяют функции $A(x)$ и $\psi(x)$ следует, что справедливо равенство

$$\psi(x) = \alpha A(x). \quad (1)$$

В [2] эта теорема была доказана для функции $A(x)$. Из (1) следует, что она справедлива и для $\psi(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эмбреттс П., Клюппельберг К. Некоторые аспекты страховой математики. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 2, с. 374–416.
2. Виноградов О. П. Ветвящийся процесс с превращениями, зависящими от возраста. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. IX, в. 1, с. 146–152.

Гётце Ф. (Билефельд, ФРГ), Прохоров Ю. В., Ульянов В. В. (Москва, Россия) О характеристических функциях многочленов от случайных величин.

Пусть X — случайный элемент со значениями в банаховом пространстве B . Рассмотрим последовательность $X_1, X_2, \dots$ независимых копий X . Положим $S_n = n^{-1/2}(X_1 + \dots + X_n)$ и $g_n(t) = E \exp\{itf(S_n)\}$, где f — измеримое отображение B в действительную прямую R .

Для нахождения оценок скорости сходимости в функциональных предельных теоремах и построения асимптотических разложений применяются неравенства для $|g_n(t)|$ типа

$$|g_n(t)| \leq c(n^{-A} + |t|^{-D}), \quad (1)$$

где c, A и D — некоторые постоянные. Оценки (1) можно вывести, используя так называемое неравенство симметризации (см. [1] и [2], в частности, следствие 3.26 и замечание после него в [2], относящееся к работе Вейля [3]; см. также [4]). Например, в случае $B = R$ такой подход приведет к следующему неравенству (ср. [5, леммы 3.1, 4.1, 4.2]). Положим

$$f(x) = x^m + \alpha_{m-1}x^{m-1} + \dots + \alpha_0, \quad m \geq 2. \quad (2)$$

Тогда (1) справедливо с $D = (m \cdot 2^m)^{-1}$ и произвольным $A > 0$ для t , удовлетворяющих условию $|t| \leq c_1 n^{(m-1)/2-\epsilon}$, где $\epsilon > 0$.

В [6] показано, что этот результат можно улучшить так, что $\min(A, D)$ увеличится. Улучшение получено в двух случаях:

а) распределение X имеет невырожденную дискретную компоненту (см. [6, теоремы 1 и 2]),

б) при некотором n_0 распределение суммы S_{n_0} имеет абсолютно непрерывную компоненту (см. [6, теоремы 3 и 4]).

В [6] рассмотрен также многомерный случай, в частности получены оценки для $(E \exp\{itf(Y+a)\})$, где Y имеет гауссовское распределение в R (см. [6, теоремы 5, 6 и 7]).

Наши доказательства опираются на неравенства для тригонометрических сумм и интегралов. В случае а) мы используем оценки типа Виноградова для тригонометрических сумм (см. [7] и [6, лемма 6]). В случае б) применяется неравенство Виноградова для тригонометрических интегралов (см. [8, гл. 2, лемму 4]) и его обобщения на многомерный случай (см. [9]). Наши уточнения оценки (1) аналогичны по форме тем улучшениям, к которым приводил метод Виноградова для тригонометрических сумм по сравнению с результатами Вейля (см. введение в [8]).

Желание снять дополнительные условия на тип распределения X приводит к необходимости стохастического обобщения знаменитой теоремы Виноградова о среднем (см. [8]). Такой стохастический аналог был получен в [10], при этом в частном случае, когда X принимает целочисленные значения $1, 2, \dots, P$ с равными вероятностями, наша оценка дает тот же порядок по P , что и оригинальный результат И. М. Виноградова (см. [10, теорема 1]).

Наконец, в [11] был рассмотрен пример X с сингулярным распределением таким, что любая его конечная свертка также сингулярна, а характеристическая функция случайной величины $f(X)$, где $f(x)$ определяется (2), ведет себя аналогично случаю, когда X абсолютно непрерывна (см. [11, теорема 4.1]).

Работы [6], [10], [11] выполнены при финансовой поддержке РФФИ, проекты 93-011-1446 и 96-01-01919, а также Центра совместных исследований 343 в Университете Билефельда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Götze F. Asymptotic expansions for bivariate von Mises functionals. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1979, B. 50, S. 333–355.
2. Götze F. Edgeworth expansions in functional limit theorems. — Ann. Prob., 1989, v. 17, p. 1602–1634.
3. Weyl H. Ueber die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins. — Math. Ann., 1916, B. 77, S. 313–352. (Перепечатано в Weyl H., Gesammelte Abhandlungen, Berlin: Springer, 1968, B. 1, S. 563–599).
4. Юринский В. В. Оценка погрешности нормального приближения вероятности попадания в шар. — Докл. АН СССР, 1981, т. 258, с. 557–558.
5. Юринский В. В. О погрешности нормального приближения. — Сиб. мат. ж., 1983, т. 24, с. 188–199.
6. Гётце Ф., Прохоров Ю. В., Ульянов В. В. Оценки для характеристических функций многочленов от асимптотически нормальных величин. — Успехи матем. наук, 1996, т. 51, № 2 (308), с. 3–26.
7. Prachar K. Primzahlverteilung. Berlin: Springer, 1978.
8. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1980.

9. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1987.
10. Götze F., Prokhorov Yu. V., Ulyanov V. V. A stochastic analogue of the Vinogradov mean value theorem. — Probab. Theory Mathem. Stat. (Tokyo, 1995), World Scientific, London–Singapore, 1996, p. 62–82.
11. Гётце Ф., Прохоров Ю. В., Ульянов В. В. О гладком поведении вероятностных распределений при полиномиальных отображениях. — Теория вероятн. и ее применен., 1997, т. 42, № 1.

Gorbunov A. V., Us G. F. (Киев, Украина) Dual Appell systems and Kondratiev spaces in the analysis of a gamma-process.

We study the Gamma noise measure μ on Borel sets of the Schwartz space $S'(\mathbf{R})$, which turns out to be an interesting example of the compound Poisson measure. The orthogonal analysis with respect to μ relates to biorthogonal one analogously to the case of the Poisson measure. This fact enables to solve stochastic Wick–Skorokhod equations involving the Gamma noise.

1. Let $N' \supset \mathcal{H} \supset N$ be a nuclear rigging of the real Hilbert space $\mathcal{H} = L_{2, Re}(\mathbf{R})$ by the real Schwartz space $N := S(\mathbf{R}) = \text{prlim}_{p \in \mathbf{N}} \mathcal{H}_p$ and $N' := S'(\mathbf{R}) = \text{indlim}_{p \in \mathbf{N}} \mathcal{H}_{-p}$. Here the family $\{\mathcal{H}_p, p \in \mathbf{N}\}$ of the Hilbert spaces satisfies the condition: $\forall p \in \mathbf{N} \exists p' \in \mathbf{N}: \mathcal{H}_{p'} \hookrightarrow \mathcal{H}_p$ and the embedding belongs to the Hilbert–Schmidt class; $\mathcal{H}_{-p}$ is the negative space of the chain $\mathcal{H}_{-p} \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_p$ (see, e.g., [1]). We denote by $|\cdot|$ and $|\cdot|_p$ the norms in $\mathcal{H}$ and $\mathcal{H}_p, p \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ respectively and by $\langle \cdot, \cdot \rangle$ the dual pairings between $\mathcal{H}_p$ and $\mathcal{H}_{-p}$ and between N and N' given by the extension of the inner product in $\mathcal{H}$ and preserve these notations for complexifications and tensor powers of the spaces mentioned above.

We define the Gamma noise measure μ on $(N', \mathcal{B}(N'))$ by its characteristic functional

$$C_\mu(\theta) = \int_{N'} \exp\{i\langle x, \theta \rangle\} \mu(dx) = \exp\{-\langle 1, \log(1 - i\theta) \rangle\}, \quad \theta \in N, \quad (1)$$

via the Bochner–Minlos theorem. This name is natural for μ , because C_μ coincides with the characteristic functional of the Gamma noise, i.e., the generalized stochastic process with independent values $\xi' = \{\xi'_t, t \in \mathbf{R}\}$ being the distributional derivative of the Gamma process ξ .

In what follows we denote by $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ the collection of all the locally countable sets $\mathfrak{d} \subset \mathbf{R}$.

Theorem 1. 1) *There exists some $p \in \mathbf{R}$ such that $\mu(\mathcal{H}_{-p}) = 1$.*

2) *The set*

$$M := \left\{ \sum_{i_k \in \mathfrak{d}} h_k \delta_{i_k} : h_k > 0, \mathfrak{d} \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) \right\} \cap C_0(\mathbf{R})' \subset N'$$

has the full μ -measure.

3) *For $y \in M$ denote $y(\tau) = \langle y, \chi_{[0 \wedge \tau, 0 \vee \tau]} \rangle$. Then*

(i) $\forall \sigma > 0 \mu\left(\{y \in M : |y(\tau) - \tau| \geq \sigma\}\right) \rightarrow 0, \tau \rightarrow \pm\infty;$

(ii) $\mu(\{y \in M : y(\tau) - \tau, \tau - y(\tau) \text{ are bounded on } \mathbf{R}\}) = 0.$

R e m a r k. The Gamma noise measure is an example of the generalized white noise measure.

2. It follows from (1) that the Gamma noise measure μ is analytic on $(N', \mathcal{B}(N'))$. Then the function

$$e_\mu(x; \theta) = \exp\{\langle x, \theta \rangle + \langle 1, \log(1 - \theta) \rangle\}, \quad x \in N', \quad \theta \in N,$$

generates the system $\mathbf{P}^\mu$ of Appell polynomials corresponding to μ , i.e.,

$$e_\mu(x; \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle P_n^\mu(x), \theta^{\otimes n} \rangle}{n!}$$

(see [6]). Let a vector-function $N_{\mathbf{C}} \ni \theta \mapsto \alpha(\theta) \in N_{\mathbf{C}}$ be holomorphic at zero. Then

$$e_\mu^\alpha(x; \theta) := e_\mu(x; \alpha(\theta)), \quad x \in N', \quad \theta \in N,$$

is the generating function of the system $\mathbf{P}^{\mu, \alpha}$ of generalized Appell polynomials, corresponding to the measure μ and the function α (for more details see [5], in one-dimensional case $N' = \mathcal{H} = N = \mathbf{R}$ see [2]).

Theorem 2. Let $\alpha_\mu(\theta) = \theta/(\theta - 1)$, $\theta \in N$. The generalized Appell polynomials $\mathbf{P}^{\mu, \alpha_\mu}$ are orthogonal with respect to Gamma noise measure μ .

In the one-dimensional case $\mathbf{P}^{\mu, \alpha_\mu}$ coincides with the system of Laguerre polynomials (see, e.g., [3]). So we can call the polynomials of the system $\mathbf{J}^\mu := \mathbf{P}^{\mu, \alpha_\mu}$ of infinite-dimensional Laguerre polynomials. As in Gaussian and Poissonian analysis one can construct the rigging $(N)_{\mathbf{J}^\mu}^{-1} \supseteq L_2(N', \mu) \supseteq (N)_{\mathbf{J}^\mu}^1$, using the system

$$\mathbf{J}^\mu = \left\{ \langle J_n^\mu(\cdot), \varphi^{(n)} \rangle, \varphi^{(n)} \in N_{\mathbf{C}}^{\otimes n}, n \in \mathbf{Z}_+ \right\}$$

($\otimes$ denotes symmetric tensor product) of the Laguerre polynomials. Namely,

$$(N)_{\mathbf{J}^\mu}^1 = \text{pr} \lim_{p, q \in \mathbf{N}} (\mathcal{H}_p)_q^1, \quad (N)_{\mathbf{J}^\mu}^{-1} = \text{ind} \lim_{p, q \in \mathbf{N}} (\mathcal{H}_{-p})_{-q}^{-1},$$

where $(\mathcal{H}_p)_q^1$ is a completion of the space of continuous polynomials on N' $\mathcal{P}(N') = \{\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \langle J_k^\mu(x), \varphi^{(k)} \rangle, \varphi^{(k)} \in N_{\mathbf{C}}^{\otimes k}, k = 0, \dots, n, n \in \mathbf{Z}_+\}$ with respect to the Hilbert norm

$$\|\varphi\|_{p, q, 1}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^2 2^{qn} |\varphi^{(n)}|_p^2, \quad \varphi \in \mathcal{P}(N'),$$

$(\mathcal{H}_{-p})_{-q}^{-1}$ is dual of $(\mathcal{H}_p)_q^1$ with respect to $L_2(N', \mu)$.

On the other hand, using $\mathbf{J}^\mu$ one can prove the nondegeneracy of the Gamma noise measure μ and construct the dual Appell system $\mathbf{Q}^\mu$ of distributions on N' and the rigging $(N)_\mu^{-1} \supset L_2(N', \mu) \supset (N)_\mu^1$ of $L_2(N', \mu)$ by the Kondratiev spaces of distributions and test functions respectively (see [6]). As in the case of the Poisson measure π the equalities $(N)_\mu^{-1} = (N)_{\mathbf{J}^\mu}^{-1}$, $(N)_\mu^1 = (N)_{\mathbf{J}^\mu}^1$ are valid, so we have a description of $(N)_{\mathbf{J}^\mu}^{-1}$ and $(N)_{\mathbf{J}^\mu}^1$ via the characterization theorems of [6].

We apply this result for solving the Gamma counterpart of the Verhulst type equation

$$Y_t = Y_0 + r \int_0^t Y_s \diamond (1 - Y_s) ds + a \int_0^t Y_s \diamond (1 - Y_s) \diamond \xi'_s ds, \quad (3)$$

modelling the population growth in a crowded stochastic environment. Here $\{Y_t, t \in \mathbf{R}_+\} \subset (N)_\mu^{-1}$ is unknown generalized stochastic process, $r \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $\diamond$ means Wick product (for more details on this and more general Wick-Skorokhod equations see [4]).

Theorem 3. Let $Y_0 \in (N)_\mu^{-1}$ be such that $\langle Y_0, 1 \rangle \neq 0$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the dual pairing between $(N)_\mu^{-1}$ and $(N)_\mu^1$, given by the inner product in $L_2(N', \mu)$). Then

$$Y_t(x) = \left[1 + \left(Y_0^{\otimes(-1)} - 1 \right) \diamond e_\mu^{\alpha_\mu}(-r - ax; \chi_{[0, t]}) \right]^{\otimes(-1)}, \quad x \in N'$$

is a unique $(N)_\mu^{-1}$ -solution of (3).

REFERENCES

1. *Berezansky Yu. M., Kondratiev Yu. G.* Spectral methods in infinite dimensional analysis. Kiev: Naukova Dumka, 1988.
2. *Boas R. P., Buck R. C.* Polynomial expansions of analytic functions. Berlin: Springer, 1964.
3. *Gorbunov A. V.* Dual Appell system corresponding to Gamma noise. — In: Proceedings of Ukrainian Conference of Young Scientists (Mathematics), Kiev University, 1994, p. 87–97.
4. *Holden H., Oksendal B., Ubøe J., Zhang T. S.* Stochastic partial differential equations. Oslo, 1996.
5. *Kondratiev Yu. G., Luis da Silva J., Streit L.* Generalized Appell systems. BiBoS preprint 729/5/96, 1996.
6. *Kondratiev Yu. G., Streit L., Westerkamp W., Yan J.* Generalized functions in infinite dimensional analysis. Kyoto, IIAS Reports № 1995-002, 1995.

Davydov Yu. (France) Convex rearrangements of stable processes.

The asymptotic behavior of convex rearrangements for smooth approximations of random processes is considered. In order to formulate the basic problem we need the two following definitions.

Definition 1. Let f be a measurable real function on $[0, 1]$. A function Tf is said to be the monotone rearrangement of f if it is non-decreasing right-continuous and has the same distribution as f that is $\lambda f^{-1} = \lambda(Tf)^{-1}$, where λ is the Lebesgue measure.

It is clear that such a function exists and, moreover, is unique.

Definition 2. The operator V defined on the set of absolutely continuous on $[0, 1]$ as

$$Vf(t) = f(0) + \int_0^t T(f')(s)ds$$

is said to be the operator of convex rearrangement.

It is evident that Vf is convex and takes the same values as f at the endpoints of $[0, 1]$.

Some properties of the operators T and V can be found in [4]. For probabilistic applications of V see [2].

Now let $\xi = \{\xi(t), t \in [0, 1]\}$ be a random process and $\xi_n = \{\xi_n(t), t \in [0, 1]\}$ be the sequence of its polygonal approximations determined by the uniform partitions $\{k/n, k = 1, \dots, n\}$ of the interval $[0, 1]$ as

$$\xi_n(t) = \xi\left(\frac{k}{n}\right) + (tn - k) \left(\xi\left(\frac{k+1}{n}\right) - \xi\left(\frac{k}{n}\right) \right), \quad t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right].$$

Our aim is to investigate the asymptotic behavior, as $n \rightarrow \infty$, of the processes $V\xi_n$ in the case when $\xi = w^{(\alpha)}, w^{(\alpha)}$ being a strictly stable random process $w^{(\alpha)} = \{w^{(\alpha)}(t), t \in [0, 1]\}$ with exponent $\alpha \in (1, 2]$, that is, a process with independent and homogeneous increments and such that for all $t_1, t_2, 0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$,

$$w^{(\alpha)}(t_2) - w^{(\alpha)}(t_1) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (t_2 - t_1)^{1/\alpha} w^{(\alpha)}(1).$$

Our main result is the following statement.

Theorem 1. Let $\{\xi_n\}$ be the sequence of the polynomial approximations corresponding to $\xi = w^{(\alpha)}$. Then with probability 1, for any $t \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{n^{1-1/\alpha}} V\xi_n(t) \longrightarrow \int_0^t F_\alpha^{-1}(s) ds, \quad (1)$$

where F_α is the distribution function of $\xi(1)$.

The proof is based on some variants of SLLN for the triangular array $\{h(\xi_{nk}), k = 0, \dots, n-1; n = 1, 2, \dots\}$, where $\xi_{nk} = n^{1/\alpha}(\xi((k+1)/n) - \xi(k/n))$ and h is such that $|h(x)| \leq C_1|x| + C_2$.

In conclusion the relations with the results of [3] on oscillations of the Wiener process and with the results of [1] on convex rearrangements of random walks are discussed.

REFERENCES

1. Davydov Yu., Vershik A. M. Réarrangement convexes des marches aléatoires. Preprint, Pub. IRMA, Lille 1996, v. 39, N° V.
2. Егоров В. А. Функциональный закон повторного логарифма для упорядоченных сумм. — Теория вероятн. и ее примен., 1990, т. 35, в. 2, с. 343–349.
3. Wshchor M. Sur les accroissements du processus de Wiener. C. R. Acad. Sci., Paris, T. 315, série 1, 1992, p. 1293–1296.
4. Zhukova E. E. Monotone and convex rearrangements of functions and stochastic processes. PHD, S.-Petersburg University, Russia, 1995.

Еникеева Ф., Калашников В. (Москва, Россия) Модель риска с инфляцией.

В работе рассматривается модель риска с инфляцией, предложенная в [1]. Доказывается, что вероятность разорения для этой модели равна 1. Этот результат доказан при помощи метода пробных функций, что позволяет отказаться от условий существования математического ожидания прироста капитала и постоянства коэффициента инфляции.

Рассмотрим следующую модель риска с дискретным временем, описывающую изменения резервов страховой компании. Пусть процесс риска описывается следующими рекуррентными уравнениями $Z_n = Z_{n-1} + \lambda_1 \cdots \lambda_n Y_n$, $n \geq 1$, где Z_n — резервы в момент времени n , $Z_0 = u$, $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ и $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ — независимые последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, представляющих собой, соответственно, прирост капитала (премии минус выплаты) и коэффициент инфляции в n -й период.

Мы докажем, что вероятность разорения $\Psi(u) = P\{\inf Z_n < 0 \mid Z_0 = u\}$ тождественно равна 1 при следующих предположениях:

$$P\{Y_n < 0\} > 0, \quad (1)$$

$$E \ln(1 + (Y_n)_+) < \infty, \quad (2)$$

$$E\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) = \frac{1}{\lambda} < 1. \quad (3)$$

Пусть

$$W_0 = u, \quad W_n = \frac{Z_n}{\lambda_1 \cdots \lambda_n}, \quad n \geq 1.$$

Очевидно, что $\{W_n\}$ — цепь Маркова с пространством состояний R_1 . Пусть $\tau_k = \min\{n: n > 0, W_n < k\}$ — момент остановки для этой цепи (где k — константа) и P_u — условное распределение при условии, что $W_0 = u$.

В терминах процесса $\{W_n\}$ вероятность разорения может быть записана в следующей форме:

$$\Psi(u) = P\left\{\inf_n W_n < 0 \mid W_0 = u\right\} = P_u\{\tau_0 < \infty\}.$$

Пусть $R > 0$ — фиксированное действительное число, $N > 0$ — целое и

$$\theta_0(R) = \min\{n: W_n < R\}, \quad (4)$$

$$\theta_{k+1}(R) = \min\{n: W_n < R, n > \theta_k(R) + N\}, \quad k \geq 0, \quad (5)$$

последовательные времена достижения процессом $\{W_n\}$ множества $(-\infty, R)$, расстояния между которыми не меньше N .

Наше доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма 1. *Предположим для некоторых $R > 0$ и $N > 0$*

$$\inf_u P_u\{\theta_k(R) < \infty\} = 1 \quad \text{для любого } k \geq 1, \quad (6)$$

$$\inf_{u < R} P_u\{\tau_0 \leq N\} > 0. \quad (7)$$

Тогда $\Psi(u) \equiv 1$ для любого $u \geq 0$.

Покажем, что выполняются условия (6) и (7). Для этого нам понадобится критерий достижимости для цепи Маркова.

Пусть $\mathcal{X}$ — пространство состояний цепи Маркова W_n , A — производящий оператор цепи Маркова, D_A — область его определения и $\tau_Q = \min\{n: W_n \in Q\}$, где Q — борелевское подмножество $\mathcal{X}$.

Теорема 1 (см. [2, с. 122–123]). Пусть $V \in D_A$ — неотрицательная пробная функция. Пусть $\Gamma_m = \{x: V(x) \leq m\}$, $m \geq 0$. Если

- 1) $\bigcup \Gamma_m = \mathcal{X}$,
- 2) $\Gamma_{m_0} \supset Q$ для некоторого $m_0 \geq 0$,
- 3) $\sup_{\Gamma_m \setminus Q} AV(x) \leq -\Delta_m < 0$ для любых $m \geq 0$,

тогда множество $Q \in \mathcal{B}$ достижимо, так что $P_x\{\tau_Q < \infty\} = 1$ для любых $x \in \mathcal{X}$.

Используя этот критерий, в лемме 2 мы доказываем, что условие (6) выполняется.

Лемма 2. *Существует $R > 0$ такое, что $\inf_u P_u\{\theta_k(R) < \infty\} = 1$ для любых k .*

Используя предположения (1) и (3), можно доказать, что выполнено (7).

Лемма 3. *Пусть R — положительное действительное число и выполнены условия (1) и (3). Тогда существует $N > 0$ такое, что $\inf_{u < R} P_u\{\tau_0 < N\} > 0$.*

Теперь мы можем сформулировать основной результат, который немедленно следует из лемм 1, 2 и 3.

Теорема 2. *Для любого $u \geq 0$*

$$\Psi(u) = P\left\{\inf_n Z_n < 0 \mid Z_0 = u\right\} \equiv 1.$$

Заметим, что метод пробных функций дает нам возможность оценить вероятность разорения на конечном промежутке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Waters H. R. Probability of ruin for a risk process with claims cost inflation. — Scand. Actuarial J., 1983, p. 148–164.
2. Kalashnikov V. V. Mathematical methods in queueing theory. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994.

Зейфман А. (Вологда, Россия) О слабой эргодичности конечных марковских цепей с непрерывным временем.

Эргодические свойства неоднородных марковских цепей исследовались во многих работах. Одной из основных задач в этом направлении является следующая: какие свойства матрицы интенсивностей гарантируют слабую эргодичность цепи? Некоторые достаточные условия получены в работах [1], [2]. Более точные условия сформулированы далее.

Пусть $X(t)$ — неоднородная марковская цепь с пространством состояний $S = \{0, \dots, N\}$, интенсивностями $a_{ij}(t)$ и переходной матрицей $P(s, t)$;

$$p_i(t) = P\{X(t) = i\}; \quad p_{ij}(s, t) = P\left\{X(t) = \frac{j}{X(s)} = i\right\}; \quad p(t) = (p_i(t)).$$

Интенсивности предполагаются локально интегрируемыми на $[0, \infty)$. Обозначим через Ω множество стохастических векторов.

О п р е д е л е н и е 1. Марковская цепь $X(t)$ называется *слабо эргодичной*, если $P(s, t)(p^* - p^{**}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любых $s \geq 0$ и $p^*, p^{**} \in \Omega$.

Для однородной цепи понятия слабой и обычной эргодичности совпадают. В случае счетного пространства состояний слабая эргодичность обычно рассматривается в равномерной операторной топологии (см., например, [3]).

О п р е д е л е н и е 2. i -е состояние марковской цепи называется *нормально достижимым*, если для любого $j \neq i$ найдется цепочка $i_0 = j, i_1, \dots, i_k, i_{k+1} = i$ такая, что $\int_0^\infty a_{i_m, i_{m+1}}(u) du = \infty$ при любом $m = 0, \dots, k$.

Можно проверить, что если i -е состояние марковской цепи нормально достижимо, то найдется последовательность $s_0, s_1, \dots$ такая, что $s_{n+1} > s_n$ при любом n и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{s_n}^{s_{n+1}} a_{i_k, i}(u) \cdots \int_{s_n}^u a_{j, i_1}(\tau) d\tau \cdots du = \infty. \quad (1)$$

Положим $M(t) = \max_i |a_{ii}(t)|$.

О п р е д е л е н и е 3. Нормально достижимое состояние i марковской цепи $X(t)$ называется *вполне достижимым*, если найдется последовательность $\{s_i\}$, удовлетворяющая условию (1) и такая, что

$$\int_{s_n}^{s_{n+1}} M(u) du \leq a < \infty.$$

Теорема 1. Пусть $X(t)$ — конечная марковская цепь с непрерывным временем. Тогда: 1) из слабой эргодичности цепи следует существование нормально достижимого состояния; 2) из существования вполне достижимого состояния следует слабая эргодичность цепи.

Пусть $Y(t)$ — процесс рождения и гибели (ПРГ) с интенсивностями рождения $\lambda_i(t) = a_i \lambda(t)$, гибели $\mu_i(t) = b_i \mu(t)$, где $i = 0, \dots, N$, $b_0 = a_N = 0$.

Например, если $Y(t)$ — число требований в системе обслуживания $M(t)/M(t)/N/r$, то $\lambda_i(t) = \lambda(t)$; $\mu_i(t) = \min(i, N) \mu(t)$, $0 \leq i \leq N + r$.

Рассмотрим случай, когда нулевое состояние достижимо.

Теорема 2. Пусть все b_i , $1 \leq i \leq N$, положительны. Тогда

1) из слабой эргодичности ПРГ вытекает, что

$$\int_0^\infty (\lambda(t) + \mu(t)) dt = \infty, \quad (2)$$

2) если условие (2) выполнено, и кроме того, существует L такое, что $\lambda(t) \leq L\mu(t)$ при достаточно больших t , то ПРГ $Y(t)$ слабо эргодичен.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 96-01-01369.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Griffeath D. Uniform coupling of nonhomogeneous Markov chains. — J. Appl. Probab., 1975, v. 12, p. 753–763.
2. Zeifman A. I. Quasi-ergodicity for non-homogeneous continuous-time Markov chains. — J. Appl. Probab. 1989, v. 26, p. 643–648.
3. Zeifman A. I., Isaacson D. L. On strong ergodicity for nonhomogeneous continuous-time Markov chains. — Stoch. Proc. Appl., 1994, v. 50, p. 263–273.

Золотарев В. М. (Москва, Россия) **Естественные оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме.**

Рассмотрим схему суммирования случайных величин со значениями из $\mathbf{R}^1$:

$$S_n = X_{n1} + \dots + X_{nn} - A_n$$

и связанную с ней модель Бавли–Хинчина (которую иногда называют моделью Линдеберга–Феллера), являющуюся частным случаем модели Колмогорова. Модель Бавли–Хинчина характеризуется условиями:

- 1) слагаемые в суммах S_n взаимно независимы;
- 2) слагаемые X_{nj} имеют конечные моменты первого и второго порядков, причем $EX_{nj} = 0$, $j \geq 1$, $\sigma_{nj}^2 = EX_{nj}^2 < \infty$, $\sigma_{n1}^2 + \dots + \sigma_{nn}^2 = 1$, $n \geq 1$;
- 3) слагаемые X_{nj} равномерно предельно малы в том смысле, что $\sup_j \sigma_{nj}^2 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Обозначим F_n и f_n соответственно функцию распределения (ф.р.) и характеристическую функцию (х.ф.), отвечающие сумме S_n . Пусть Φ — ф.р. стандартного нормального закона с х.ф. $g(t) = \exp\{-t^2/2\}$.

Центральной предельной теоремой принято называть предельное соотношение $F_n(x) \rightarrow \Phi(x)$, $n \rightarrow \infty$, $x \in \mathbf{R}^1$, критерием которого, очевидно, является условие $f_n(t) \rightarrow g(t)$, $n \rightarrow \infty$, $t \in \mathbf{R}^1$.

Если рассматривать метрики $\rho(F_n, \Phi) = \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)|$ (равномерная метрика),

$$\lambda(F_n, \Phi) = \min_{T>0} \max \left\{ \max_{|t| \leq T} |f_n(t) - g(t)|, T^{-1} \right\},$$

эквивалентную метрике Леви $L(F_n, \Phi)$, и

$$\mu(F_n, \Phi) = \min_{\epsilon>0} \left\{ \epsilon^2, 2 \sum_j \int_{|x| \geq \epsilon} |x| |F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)| dx \right\},$$

где F_{nj} — ф.р. случайной величины X_{nj} , $\Phi_{nj}(x) = \Phi(x/\sigma_{nj})$ и $\varepsilon > 0$, то центральная предельная теорема, т.е. соотношение $\rho(F_n, \Phi) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, будет выполняться тогда и только тогда, когда $\lambda(F_n, \Phi) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, или же (см. [1]) $\mu(F_n, \Phi) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, каждый из функционалов λ и μ несет в себе весь объем информации о необходимых и достаточных условиях ρ -сходимости F_n к Φ .

В такой ситуации естественно хотелось бы привлечь эту информацию для построения оценки скорости сходимости $\rho(F_n, \Phi)$ к нулю, т.е. построить оценки вида $\psi_1(\lambda) \leq \rho(F_n, \Phi) \leq \psi_2(\lambda)$ или же $\psi_1^*(\mu) \leq \rho(F_n, \Phi) \leq \psi_2^*(\mu)$. Вообще говоря, функционал, связанный с критерием центральной предельной теоремы (т.е. λ или μ), трудно использовать одновременно при построении и верхней, и нижней оценки. Однако каждую из верхней или нижней оценок можно связать со своим функционалом и получить двойное неравенство, например, вида

$$\tilde{\psi}_1(\lambda) \leq \rho(F_n, \Phi) \leq \tilde{\psi}_2(\mu).$$

Именно такие оценки и обсуждаются в докладе.

Теорема. *Имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} \rho(F_n, \Phi) &\leq 1.97\mu^{1/4}, \\ \rho(F_n, \Phi) &\geq 12^{-5/2}\lambda^{5/2} > 0.00678\lambda^{5/2}, \end{aligned}$$

Впервые оценки такого типа, т.е. оценки, связанные с критерием сходимости, были получены Л. В. Осиповым [2] в схеме $X_{nj} = X_j/\sqrt{n}$ при дополнительных предположениях о совпадении распределений, бесконечности третьего абсолютного момента слагаемых и справедливости условия (C) Крамера.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 96-01-01920.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотарев В. М. Предельные теоремы как теоремы устойчивости. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. 34, № 1, с. 178–189.
2. Осипов Л. В. О точности приближения распределения суммы независимых случайных величин к нормальному распределению. — Докл. АН СССР, 1968, т. 178, № 5, с. 1013–1016.

Iglói E., Terdik Gy. (Debrecen, Hungary) **Bilinear Modelling of Chandler Wobble.**

The problem of the estimation of the parameters of the Chandler wobble, i.e., the rotation of the Earth's axis with respect to its mean geographic pole is considered in the famous paper [1] of Arató, Kolmogorov, and Sinai. A first order autoregressive process with complex value in continuous time was fitted to the data. In their paper the variance of the noise process is estimated with probability 1, the estimator for the period is proved to be exact Gaussian and the amplitude is estimated by the maximum likelihood method. The period of the motion has been found to be 435 days. The theoretical period based on Euler's equation for the rotation of a rigid body is about 305 days and it is still an open question to understand the reason of the difference of these periods. There is another problem concerning to the observation namely the estimated bispectrum is not only nonzero but it has some large peak near to zero as well. In this paper we propose a model which is able to solve the problems mentioned. The point is to consider an autoregressive process with complex value with long range input and the parameter excited randomly by the frequency.

Application of long range dependent model has proved to be successful in several fields of science especially in geophysics. The basic stochastic process of this kind is the fractional Brownian motion defined in [2],

$$w_t^{(h)} = \frac{1}{\Gamma(1+h)} \left\{ \int \int_{-\infty}^0 [(t-s)^h - (-s)^h] dw_s + \int_0^t (t-s)^h dw_s \right\}, \quad t \in \mathbf{R},$$

where w_t is a real valued Brownian motion and $0 \leq h < \frac{1}{2}$ is the so-called long range or long memory parameter. Instead of fitting the Ornstein-Uhlenbeck process to the data we have found more appropriate the following stationary process

$$x_t = \mu \int_{-\infty}^t e^{\alpha(t-s) + i\gamma(w_t^{(h)} - w_s^{(h)})} ds,$$

where $\mu \in \mathbf{C}$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i$, $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 \in \mathbf{R}$, $\gamma \in \mathbf{R}$. That process fulfills the bilinear stochastic differential equation

$$dx_t = (\alpha x_t + \mu) dt + i\gamma x_t dw_t^{(h)}. \quad (1)$$

It is seen from (1) that the coefficient of the process x_t is randomized by the fractional noise according to the imaginary part of the coefficient, i.e., to the frequency. The process x_t is studied by the methods given in [3], [4], [5], and [6]. The frequency domain chaotic representation of x_t is

$$x_t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^k} e^{it\Sigma\omega_{(k)}} \mu \frac{(i\gamma)^k}{k!} \int_0^{\infty} e^{\alpha u - \gamma^2 u^{2h+1}/2} \prod_{j=1}^k \frac{1 - e^{-iu\omega_j}}{i\omega_j} du \\ \times \prod_{j=1}^k (i\omega_j)^{-h} W(d\omega_{(k)}),$$

where $\omega_{(k)} \doteq (\omega_1, \dots, \omega_k)$, $\Sigma\omega_{(k)}$ is the sum of its components, $W(\omega)$ is the Fourier-Stieltjes transform of w_t . Using this the spectral density $s(\omega)$ of x_t can be calculated:

$$s(\omega) = |\mu|^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(u_1) \overline{K(u_2)} \left[\exp^*(\gamma^2 A^{(u_1, u_2)})(\omega) - 1 \right] du_1 du_2,$$

where

$$K(u) = e^{\alpha u - \frac{\gamma^2}{2} u^{2h+1}}, \quad A^{(u_1, u_2)}(\omega) = \frac{1 - e^{-iu_1\omega}}{i\omega} \overline{\left(\frac{1 - e^{-iu_2\omega}}{i\omega} \right)} |\omega|^{-2h},$$

and $\exp^*$ is the convolution exponential function.

In computer experiments we have corresponded the value of α_2 , i.e., the frequency component of α to the one year period. With suitably chosen values for the rest of the parameters both the empirical spectra estimated from the real and imaginary parts of the simulated process x_t and the corresponding theoretical spectra showed very similar features. One of those is the peak at zero which is typical for long range dependent stationary processes and the other one is the peak at the frequency corresponding to the period about 435 days.

REFERENCES

1. Arató M., Kolmogorov A. N., Sinai Ya. G. Estimation of the parameters of a complex stationary Gaussian Markov process. — Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1962, v. 146.
2. Mandelbrot B. B., van Ness J. W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. — SIAM Rev., 1968, v. 10.
3. Dobrushin R. L. Gaussian and their subordinated generalized fields. — Ann. Probab., 1979, v. 7.
4. Major P. Multiple Wiener-Itô integrals. — Lecture Notes Math., v. 849, Berlin: Springer-Verlag, 1981.
5. Subba Rao T. On the theory of bilinear time series models. — J. of Royl. Statist. Soc., Ser. B, v. 43, p. 244-255.
6. Terdik G. Stationary solutions for bilinear systems with constant coefficients. — In: Seminar on Stochastic processes, 1989. Progress in Probability, Eds. E. Cinlar, K. L. Chung, R. K. Gettoor. Boston: Birkhauser, 1990, p. 196-206.

Inoue T. (Matsuyama, Japan) Sojourn times in laminar states of deterministic dynamical systems with intermittency.

We are going to consider a kind of chaotic deterministic dynamical systems, which are interesting from a stochastic point of view. In the trajectories of the dynamical systems we are going to consider, both burst parts and laminar parts are irregularly found. This kind of dynamics is called an intermittent chaos.

We consider the iterates of the following mapping $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Let $0 < c < 1$ and assume that T satisfies the conditions (i)-(v):

- (i) the restrictions of T to the intervals $(0, c)$ and $(c, 1)$ are C^2 functions;
- (ii) $T(0) = 0$ and $T(1) = 1$;
- (iii) $T(0, c) = (0, 1)$ and $T(c, 1) = (0, 1)$;
- (iv) $|T''(x)|/(T'(x))^2 < L < \infty$ for $x \neq 0, c, 1$;
- (v) $T'(x) > 1$ for $x \neq 0, c, 1$.

For this mapping let A be a small neighborhood of 0 and let B be a small neighborhood of 1. We assume

$$T(x) - x = \theta_0 x^{d_0} + o(x^{d_0}) \quad \text{in } A \quad (1)$$

and

$$x - T(x) = \theta_1 (1 - x)^{d_1} + o((1 - x)^{d_1}) \quad \text{in } B, \quad (2)$$

where $\theta_0 > 0$, $\theta_1 > 0$, $d_0 \geq 1$ and $d_1 \geq 1$ are constants.

If $d_0 > 1$ or $d_1 > 1$, a kind of intermittency with laminar state A or B is appeared in the trajectory $\{T^k(x)\}_{k=0}^n$. We study the limit of the ratio of the sojourn time of the trajectory $\{T^k(x)\}_{k=0}^n$ in a laminar state A to that in the other laminar state B , that is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k \leq n; T^k(x) \in A\}}{\#\{k \leq n; T^k(x) \in B\}}. \quad (3)$$

R e m a r k. T has a Lebesgue equivalent ergodic σ -finite invariant measure μ . And, $\mu(A) = \infty$ if and only if $d_0 \geq 2$, and $\mu(B) = \infty$ if and only if $d_1 \geq 2$.

In the following two cases, since both $\mu(A)$ and $\mu(B)$ are not ∞ , the limit (3) is easily obtained.

Case $d_0, d_1 < 2$. T has a Lebesgue equivalent ergodic invariant probability measure μ , and hence it follows from the Hopf ratio ergodic theorem that the limit (3) is $\mu(A)/\mu(B)$ for Lebesgue almost every x .

Case $d_0 \geq 2, d_1 < 2$ (or $d_1 \geq 2, d_0 < 2$). In this case T has a Lebesgue equivalent ergodic σ -finite invariant measure μ with $\mu(A) = \infty, \mu([0, 1] \setminus A) < \infty$ (or $\mu([0, 1] \setminus B) < \infty, \mu(B) = \infty$). By an easy application of the Hopf ratio ergodic theorem we have obtained the limit (3) is ∞ (or 0) for Lebesgue almost every x .

In the case $d_0, d_1 \geq 2$, the limit (3) cannot be easily obtained from the Hopf ratio ergodic theorem. In this case the following theorems are recently obtained.

Theorem 1. If $2 \leq d_0 < d_1$ (or $2 \leq d_1 < d_0$), the limit (3) is 0 (or ∞) for Lebesgue almost every x .

Theorem 2. If $d_0 = d_1 = 2$, the limit (3) is a constant ρ for Lebesgue almost every x , in fact $\rho = \theta_1 M_1 / (\theta_0 M_2)$, where θ_0 and θ_1 are given in (1) and (2), and $M_1 = \lim_{x \uparrow c} T'(x)$ and $M_2 = \lim_{x \downarrow c} T'(x)$.

Theorem 3. If $d_0 = d_1 > 2$, the limit (3) does not exist.

There must be a lot of stochastic models related to our deterministic models.

Клесов О. И. (Киев, Украина), **Фазекаш И.** (Дебрецен, Венгрия) **Оценки для моментов взвешенных сумм случайных величин.**

Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ обозначает последовательность случайных величин, относительно которых мы не делаем никаких предположений о характере зависимости. Мы изучаем оценки типа Гаека-Реньи для моментов взвешенных сумм $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Пусть $p > 0$ и $E|X_n|^p < \infty, n \geq 1$. Последовательность неотрицательных чисел $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ называется мажорантой для последовательности $\{X_n\}$, если

$$E \left[\max_{k \leq n} |S_k| \right]^p \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k \quad (1)$$

для всех $n \geq 1$. Иногда удобно определять мажоранту как последовательность, удовлетворяющую (1) в некотором интервале изменения n . Заметим, что мажоранты существуют для любой последовательности $\{X_n\}$, имеющей конечные моменты порядка p . Действительно, условие (1) выполнено для последовательности

$$\lambda_1 = E|X_1|^p, \quad \lambda_k = E \left[\max_{i \leq k} |S_i| \right]^p - E \left[\max_{i \leq k-1} |S_i| \right]^p, \quad k > 1. \quad (2)$$

Во многих конкретных случаях мажоранты хорошо известны и не столь тривиальны. Пусть, например, $p = 2$. Если $\{X_n\}$ представляет собой последовательность независимых в совокупности случайных величин с $EX_n = 0, n \geq 1$, то можно положить $\lambda_k = EX_k^2, k \geq 1$, (это вытекает из неравенства Дуба). Если же $\{X_n\}$ это последовательность ортогональных случайных величин, то, как следует из неравенства Меньшова-Радемахера, можно выбрать следующую мажоранту $\lambda_k = \log^2(2n)EX_k^2, k \leq n$.

Теорема 1. Пусть $p > 0$ и $E|X_n|^p < \infty, n \geq 1$. Предположим, что $\{\lambda_n\}$ — мажоранта для последовательности $\{X_n\}$. Если последовательность положительных чисел $\{b_n\}$ не убывает, то

$$E \left[\max_{k \leq n} \left| \frac{S_k}{b_k} \right| \right]^p \leq 4 \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{b_k^p}. \quad (3)$$

Вопрос об оптимальности константы в правой части (3) остается открытым, однако в некоторых случаях ее можно уменьшить.

Следствие 1. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда для любого $x > 0$

$$P\left\{\max_{k \leq n} \left| \frac{S_k}{b_k} \right| \geq x\right\} \leq \frac{4}{x^p} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{b_k^p}. \quad (4)$$

Заметим, что (4) можно доказать и при менее ограничительных условиях.

Теорема 2. Предположим, что для некоторой последовательности случайных величин $\{X_n\}$ и для некоторого $p > 0$ найдется последовательность неотрицательных чисел $\{\lambda_n\}$, такая, что

$$P\left\{\max_{k \leq n} |S_k| \geq x\right\} \leq \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{x^p}.$$

Тогда выполнено неравенство (4).

Известны некоторые частные случаи неравенства (4). Например, для независимых $\{X_n\}$ оно доказано Гаеком и Реньи, а для ортогональных — Реньи и Зергеньи. Заметим, что в случае ортогональных величин Реньи и Зергеньи наложили несколько ограничительных условий на последовательность $\{b_n\}$. Как следует из теоремы 2, неравенство

$$E\left[\max_{k \leq n} \left| \frac{S_k}{b_k} \right|\right]^2 \leq 4 \log^2(2n) \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k^2}{b_k^2}$$

справедливо для ортогональных величин $\{X_n\}$ без каких-либо ограничений на последовательность $\{b_n\}$.

Отметим еще два следствия теоремы 1 для независимых величин.

Следствие 2. Пусть для последовательности независимых случайных величин $\{X_n\}$ и $p \geq 2$ выполнено $EX_n = 0$ и $E|X_n|^p < \infty$, $n \geq 1$. Тогда для любой последовательности положительных неубывающих чисел $\{b_n\}$

$$E\left[\max_{k \leq n} \left| \frac{S_k}{b_k} \right|\right]^p \leq C_p n^{p/2-1} \sum_{k=1}^n \frac{E|X_k|^p}{b_k^p}.$$

Здесь C_p некоторая универсальная константа, зависящая только от p .

Следствие 3. Пусть для последовательности независимых случайных величин $\{X_n\}$ и $p \geq 1$ выполнено $EX_n = 0$ и $E|X_n|^p < \infty$, $n \geq 1$. Тогда для любой последовательности положительных неубывающих чисел $\{b_n\}$

$$E\left[\max_{k \leq n} \left| \frac{S_k}{b_k} \right|\right]^p \leq_p \sum_{k=1}^n \frac{\Lambda_k - \Lambda_{k-1}}{b_k^p},$$

где $\Lambda_0 = 0$, $\Lambda_k = E\left(\sum_{i=1}^k X_i^2\right)^{p/2}$. Здесь B_p — некоторая универсальная константа, зависящая только от p .

Королев В. Ю., Круглов В. М. (Москва, Россия) **Критерий сходимости неслучайно центрированных случайных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.**

В сообщении приводятся необходимые и достаточные условия слабой сходимости неслучайно центрированных случайных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин в схеме серий в предположении независимости индексов и слагаемых.

Пусть $\{X_{n,j}\}_{j \geq 1}$, $n = 1, 2, \dots$, — семейство последовательностей одинаково распределенных в каждой последовательности (при каждом фиксированном n) случайных величин (с.в.). Пусть $\{N_n\}_{n \geq 1}$ — последовательность целочисленных положительных с.в. таких, что при каждом $n \geq 1$ с.в. $N_n, X_{n,1}, X_{n,2}, \dots$ независимы. Положим $S_{n,k} = X_{n,1} + \dots + X_{n,k}$. Символы $\Rightarrow$ и $\xrightarrow{P}$ обозначают соответственно слабую сходимость и сходимость по вероятности. Под функцией распределения (ф.р.) $F(x)$ с.в. X мы подразумеваем $P\{X \leq x\}$. Расстояние Леви, которое, как известно, метризует слабую сходимость в пространстве ф.р., мы будем обозначать $L(\cdot, \cdot)$. Под слабой сходимостью последовательности с.в. мы подразумеваем слабую сходимость их ф.р. Аналогично, под расстоянием Леви между с.в. мы подразумеваем расстояние Леви между их ф.р. Везде далее сходимость будет подразумеваться при $n \rightarrow \infty$. Точную нижнюю грань q -квантилей с.в. N_n обозначим $l_n(q)$. Медиану с.в. $X_{n,1}$ обозначим μ_n . Пусть v — произвольное положительное число. Индикатор множества A будем обозначать $1(A)$. Обозначим

$$\begin{aligned}\beta_n &= E(X_{n,1} - \mu_n) 1(|X_{n,1} - \mu_n| < v), \\ \gamma_n &= E(X_{n,1} - \mu_n - \beta_n) 1(|X_{n,1} - \mu_n - \beta_n| < v), \\ \Delta_n &= E\left(\frac{(X_{n,1} - \mu_n - \beta_n - \gamma_n)^2}{1 + (X_{n,1} - \mu_n - \beta_n - \gamma_n)^2}\right).\end{aligned}$$

Пусть ε_n — расстояние Леви между $N_n(\Delta + |\gamma_n|)$ и с.в., тождественно равной нулю. Целую часть числа произвольного числа a будем обозначать $[a]$. Положим

$$k_n = \begin{cases} l_n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right), & \text{если } \Delta_n + |\gamma_n| = 0, \\ [|\gamma_n|^{-1}], & \text{если } \Delta_n = 0, \quad |\gamma_n| > 0, \\ \left[\frac{2\varepsilon_n}{\Delta_n + |\gamma_n|}\right] + 1, & \text{если } \Delta_n > 0, \end{cases}$$

$$a_n = k_n(\mu_n + \beta_n).$$

Каждой с.в. Z мы поставим в соответствие множество $\mathcal{M}(Z)$, содержащее все тройки с.в. (Y, U, V) , с помощью которых характеристическая функция (х.ф.) $f(t)$ с.в. Z может быть представлена в виде $f(t) = E\{h^U(t) e^{itV}\}$, где $h(t)$ — х.ф. с.в. Y . Для любой с.в. Z множество $\mathcal{M}(Z)$ содержит по крайней мере две тройки $(1, 0, Z)$ и $(Z, 1, 0)$.

Будем говорить, что последовательность троек $\{(Y_n, U_n, V_n)\}_{n \geq 1}$ из $\mathcal{M}(Z)$ слабо компактна, если из произвольной последовательности натуральных чисел $\mathcal{N}$ можно выделить подпоследовательность $\mathcal{N}_1$ такую, что последовательности с.в. $\{Y_n\}_{n \in \mathcal{N}_1}$, $\{U_n\}_{n \in \mathcal{N}_1}$ и $\{V_n\}_{n \in \mathcal{N}_1}$ слабо сходятся (каждая к своему пределу).

Теорема 1. *Предположим, что $N_n \xrightarrow{P} \infty$. Для того чтобы при некоторых вещественных числах c_n имела место сходимость центрированных случайных сумм $S_{n,N_n} - c_n \Rightarrow Z$ к некоторой случайной величине Z , необходимо и достаточно, чтобы существовала слабо компактная последовательность троек $\{(Y_n, U_n, V_n)\}_{n \geq 1}$ такая, что выполняются условия*

$$\begin{aligned}(Y_n, U_n, V_n) &\in \mathcal{M}(Z), \quad n = 1, 2, \dots, \\ L(S_{n,k_n} - a_n, Y_n) &\rightarrow 0, \quad L\left(\frac{N_n}{k_n}, U_n\right) \rightarrow 0, \quad L\left(\frac{a_n N_n}{k_n} - c_n, V_n\right) \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Пусть Φ — стандартная нормальная ф.р.

Теорема 2. Предположим, что $N_n \xrightarrow{P} \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Для того чтобы при некоторых вещественных c_n, α и $\sigma > 0$ имела место сходимость

$$P\{S_{n,N_n} - c_n \leq x\} \Rightarrow \Phi\left(\frac{x - \alpha}{\sigma}\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали последовательности вещественных чисел $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ и положительных чисел $\{b_n\}_{n \geq 1}$ и $\{\sigma_n\}_{n \geq 1}$ такие, что

$$2.1) \quad b_n \sigma_n^2 \leq \sigma^2, \sup_n |\alpha_n| < \infty, \sup_n b_n < \infty, \sup_n \sigma_n < \infty;$$

$$2.2) \quad L(P\{S_{n,k_n} - a_n \leq x\}, \Phi((x - \alpha_n)/\sigma_n)) \rightarrow 0;$$

$$2.3) \quad L(N_n/k_n, b_n) \rightarrow 0;$$

$$2.4) \quad L(P\{a_n N_n/k_n - c_n \leq x\}, \Phi(x - \alpha + \alpha_n b_n / \sqrt{\sigma^2 - \sigma_n^2 b_n})) \rightarrow 0.$$

Используя теорему 2, можно доказать еще один весьма неожиданный критерий асимптотической нормальности центрированных случайных сумм, в котором вспомогательные константы выписываются в явном виде.

Обозначим $\tau_n = \inf_{b>0} L(N_n/(k_n b), 1)$. Для каждого $n = 1, 2, \dots$ выберем $b_n > 0$, удовлетворяющее условию $L(N_n/(k_n b_n), 1) < \tau_n + 1/n$. Теперь положим

$$m_n = \begin{cases} k_n, & \text{если } L\left(\frac{N_n}{k_n}, 0\right) \leq L\left(\frac{N_n}{k_n b_n}, 1\right), \\ [k_n b_n], & \text{если } L\left(\frac{N_n}{k_n}, 0\right) > L\left(\frac{N_n}{k_n b_n}, 1\right). \end{cases}$$

Теорема 3. Пусть $N_n \xrightarrow{P} \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Для того чтобы при некоторых вещественных c_n, α и $\sigma > 0$ имела место сходимость

$$P\{S_{n,N_n} - c_n \leq x\} \Rightarrow \Phi\left(\frac{x - \alpha}{\sigma}\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

3.1) последовательность $\{N_n/m_n\}_{n \geq 1}$ слабо компактна, причем каждая ее слабо сходящаяся подпоследовательность имеет своим пределом 0 или 1;

$$3.2) \quad \sup_n m_n E((X_{n,1} - \mu_n - \beta_n)^2 / (1 + (X_{n,1} - \mu_n - \beta_n)^2)) = M < \infty;$$

$$3.3) \quad P((N_n/m_n) S_{n,m_n} - c_n \leq x) \Rightarrow \Phi((x - \alpha)/\sigma).$$

Условие 3.2) можно заменить условием

$$3.2') \quad \text{последовательность } \{S_{n,m_n} - m_n(\mu_n + \beta_n)\}_{n \geq 1} \text{ слабо компактна.}$$

Условие 3.2) является следствием условия 3.2'). Поэтому замена условия 3.2) условием 3.2') несколько ухудшает условия теоремы 3 в части достаточности, но уточняет их в части необходимости.

Доказательства теорем основаны на теореме переноса для неслучайно центрированных случайных сумм [1] и критерии сдвиг-компактности случайных сумм [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 96-01-01919.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gnedenko B. V., Korolev V. Yu. Random summation: limit theorems and applications. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1996.
2. Круглов В. М. Слабая компактность случайных сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен. (В печати.)

Lakatos L. (Budapest, Hungary) **On a discrete cyclic-waiting queueing problem.**

In [1] we have considered a continuous cyclic-waiting system functioning in the following way: if the entering entity cannot be serviced upon arrival, it joins the queue in which it is cycling with a fixed cycle time, its further requests for service may be put only at the multiples of cycle time. In this situation the services of consecutive requests do not follow immediately each other, there are also intervals necessary to reach the starting positions for service. There we determined the ergodic distribution for such systems in case of Poisson arrivals and exponentially distributed service time, here we intend to do the same if both the interarrival and service times are geometrically distributed. We formulate the results of paper in the following

Theorem. *Let us consider a discrete queueing system in which both interarrival and service time distributions are geometrical with parameters r and q respectively, and the service of a request may be started upon arrival or (in case of busy server, a queue or noncorresponding position of the request) at moments differing from it by the multiples of cycle time T equal to n time units. Let us define an embedded Markov chain whose states correspond to the number of requests in the system at moments $t_k = 0$, where t_k is the moment of beginning of service of the k th one. The matrix of transition probabilities for this chain has the form*

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (1)$$

whose elements are determined by the generating functions

$$A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = \frac{(1-r)(1-q)}{1-q(1-r)} + z \frac{r(1-q)}{1-q(1-r)} + z \frac{rq(1-q^n)(1-r+rz)^n}{[1-q(1-r)][1-q^n(1-r+rz)^n]}, \quad (2)$$

$$B(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i = \frac{1-(1-r)^n(1-r+rz)^n}{1-(1-r)(1-r+rz)} \frac{r(1-r+rz)}{1-(1-r)^n} + \frac{1-q^n(1-r)^n(1-r)^n(1-r+rz)^n}{1-q(1-r)(1-r+rz)} \times \frac{rq(1-r+rz)[(1-r+rz)^n-1]}{[1-(1-r)^n][1-q^n(1-r+rz)^n]}. \quad (3)$$

The generating function of ergodic distribution $P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i$ for this chain has the form

$$P(z) = p_0 \frac{zA(z) - B(z) + rz[(1-r)(1-q)]^{-1} [A(z) - B(z)]}{z - B(z)}, \quad (4)$$

where

$$p_0 = \frac{(1-r)(1-q)}{1-q(1-r)} - \frac{rq[1-(1-r)^n]}{(1-r)^{n-1}(1-q^n)[1-q(1-r)]}. \quad (5)$$

The condition of existence of ergodic distribution is the fulfilment of inequality

$$\frac{rq}{1-q^n} \frac{1-q^n(1-r)^n}{1-q(1-r)} < (1-r)^n. \quad (6)$$

The research was supported by the Hungarian National Foundation for Scientific Research under grant OTKA 14794/95.

REFERENCES

1. Lakatos L. On a simple continuous cyclic-waiting problem. — Annales Univ. Sci. Bud. Sect. Comp., 1994, v. 14, p. 105–113.

Линьков Ю. Н. (Донецк, Украина) **Теоремы о больших отклонениях.**

Пусть Y_t , $t \in \mathbf{R}_+$ — расширенные случайные величины, которые могут принимать бесконечные значения лишь одного знака, и $m_t(\varepsilon) = E \exp(\varepsilon Y_t)$, $\varepsilon \in \mathbf{R}^1$, — производящая функция моментов случайной величины Y_t . Если $P\{Y_t = -\infty\} > 0$, то $m_t(\varepsilon) = \infty$ при $\varepsilon < 0$, а при $\varepsilon = 0$ полагаем $m_t(\varepsilon) = P\{Y_t > -\infty\}$. Если же $P\{Y_t = \infty\} > 0$, то $m_t(\varepsilon) = \infty$ при $\varepsilon > 0$, а при $\varepsilon = 0$ полагаем $m_t(\varepsilon) = P\{Y_t < \infty\}$. Введем условие:

(м) для всех $\varepsilon \in \mathbf{R}^1$ существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t^{-1} \ln m_t(\varepsilon) = \kappa(\varepsilon)$, где $\varphi_t \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, $\kappa(\varepsilon)$ — собственная выпуклая функция с $\varepsilon_- = \inf\{\varepsilon: \kappa(\varepsilon) < \infty\} < \varepsilon_+ = \sup\{\varepsilon: \kappa(\varepsilon) < \infty\}$, дифференцируемая на $(\varepsilon_-, \varepsilon_+)$, и $\gamma_- = \lim_{\varepsilon \downarrow \varepsilon_-} \kappa'(\varepsilon) < \gamma_+ = \lim_{\varepsilon \uparrow \varepsilon_+} \kappa'(\varepsilon)$.

Обозначим $\gamma_0 = \kappa'(0)$ в случае $\varepsilon_- < 0 < \varepsilon_+$ и введем преобразование Лежандра-Фенхеля функции $\kappa(\varepsilon)$ с помощью формулы $I(\gamma) = \sup_{\varepsilon} (\varepsilon \gamma - \kappa(\varepsilon))$.

Теорема 1. Если выполняется условие (м) с $\varepsilon_- < 0 < \varepsilon_+$, то

(а) если $\gamma_0 < \gamma_+$, то для всех $\gamma \in (\gamma_0, \gamma_+)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t^{-1} \ln P(\varphi_t^{-1} Y_t > \gamma) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t^{-1} \ln P(\varphi_t^{-1} Y_t \geq \gamma) = -I(\gamma); \quad (1)$$

(б) если $\gamma_- < \gamma_0$, то для всех $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_0)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t^{-1} \ln P(\varphi_t^{-1} Y_t < \gamma) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t^{-1} \ln P(\varphi_t^{-1} Y_t \leq \gamma) = -I(\gamma). \quad (2)$$

Теорема 2. (а) Если выполняется условие (м) с $\varepsilon_- = 0$, то для любого $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$ имеет место соотношение (1).

(в) Если выполняется условие (м) с $\varepsilon_+ = 0$, то для любого $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$ имеет место соотношение (2).

Теоремы 1 и 2 представляют собой теоремы типа Чернова [1], [2] для вероятностей $P\{\varphi_t^{-1} Y_t > \gamma\}$ и $P\{\varphi_t^{-1} Y_t < \gamma\}$ в случае регулярных точек γ [3]. Условие (м) дает, по-видимому, минимальные ограничения для справедливости таких теорем [4], [5]. Так как случайные величины Y_t являются, вообще говоря, расширенными, то теоремы 1 и 2 можно применить к логарифму отношения правдоподобия в задаче различения гипотез и, следуя [6], [7], получить теоремы о больших отклонениях как при нулевой гипотезе, так и при альтернативе.

Если Y_t есть логарифм отношения правдоподобия и $m_t(\varepsilon)$ есть производящая функция моментов относительно нулевой гипотезы, то в условии (м) имеем $\varepsilon_- \leq 0$ и $\varepsilon_+ \geq 1$. Доказаны теоремы о больших отклонениях типа (1) и (2) при нулевой гипотезе и при альтернативе для всех возможных значений ε_- и ε_+ : а) $\varepsilon_- < 0$, $\varepsilon_+ > 1$; б) $\varepsilon_- < 0$, $\varepsilon_+ = 1$; в) $\varepsilon_- = 0$, $\varepsilon_+ > 1$; г) $\varepsilon_- = 0$, $\varepsilon_+ = 1$. На основании этих теорем исследованы скорости стремления к нулю вероятностей ошибок критериев Неймана-Пирсона, байесовских и минимаксных, следуя [6], [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bahadur R. R.* Some limit theorems in statistics. Philadelphia: SIAM, 1971, 42 p.
2. *Chernoff H.* A measure of asymptotic efficiency for tests of hypothesis based on the sum of observations. — *Ann. Math. Statist.*, 1952, v. 23, № 4, p. 493–507.
3. *Могильский А. А.* Вероятностное неравенство для получения оценок снизу в принципе больших уклонений. — *Сиб. мат. журн.*, 1996, т. 37, № 4, с. 889–904.
4. *Ellis R. S.* Entropy, large deviations and statistical mechanics. — Berlin: Springer-Verlag, 1985, 364 p.
5. *Deuschel J. D., Stroock D. W.* Large deviations. Boston: Academic Press, 1989, 307 p.
6. *Lin'kov Yu. N.* Limit theorems for the likelihood ratio in the hypotheses testing problems. — *Random Operators and Stoch. Equations*, 1995, v. 3, № 1, p. 23–40.
7. *Lin'kov Yu. N.* Large deviation theorems in the hypotheses testing problems. — In: *Exploring Stochastic Laws/ Ed. by A. V. Skorokhod and Yu. V. Borovskikh*, Utrecht: VSP, 1995, p. 263–273.

Márkus L. (Budapest, Hungary) On a stability problem of the forecast of Lévy's Brownian motion.

The usual approaches of forecast problems commonly take it for granted that the observation domain is something known, fixed, immovable and unchangeable. However, in real life it can easily happen, that the supposed observation domain undergoes a deformation under the influence of heat, pressure, etc., even before the actual observation takes place. From this point of view it is meaningful to investigate the stability of the forecast in the dependence on the observation domain.

Suppose we are given a random field $X(t)$, that means a multivariate random function over the d -dimensional Euclidean space $\mathbf{R}^d$. We observe the field X in a domain D , and, based on this observation, we consider its forecast at a distant point t . We prefer to write t in its spherical coordinates as $t = (T, \Theta)$, where T is the distance of t from the origin, and Θ is the vector of angles. The best forecast, $Y(t)$, that is the conditional expectation of $X(t)$ given X in D , depend obviously on the domain D , besides the point t . Since we are interested in the dependence on D we consider Y at a fixed point t as random function of domains. Let us further have a set of transformations, which we prefer to call deformations, parametrised «meaningfully» by real numbers, so that small deformations correspond to small indices. We aim to describe — if only in the simplest case — the variation of the forecast as D changes infinitesimally along deformations.

The forecast problem was studied in this spirit for Lévy's Brownian motion (LBM), when observation took place on a closed *plane* curve. Using white noise analysis, Si Si obtained a white noise integral representation for the variation [5].

We consider here the 3-dimensional parameter case, when, like in all odd dimensions, the germ Markov property of LBM holds true [2]. Thus — unlike in Si Si's case — the observation on the whole domain can be reduced to an observation in the infinitesimal environment of the boundary, meaning the germ field, furthermore we can take advantage of partial differential equation description of the forecast. Restricting the considerations to domains of $\mathbf{R}^3$ with connected smooth boundaries, the germ of it has long been known to be generated by the actual values of the field, and its generalised normal derivatives [2], [3].

We take dilations as deformations, and in order to avoid here detailed technicalities we restrict our considerations to the case of the ball $\mathbf{B}_R$ of radius R with its boundary, the sphere $\mathbf{S}_R$, though most of what follows can be transmitted to more general domains. As we know [1], [4] LBM satisfies in 3-dimensional case the partial differential equation $\Delta X = W_\sigma$ with the Laplacian Δ , the (nonstandard) Gaussian white noise W_σ and the

initial condition $X(0) = 0$. Accordingly [2] and [4] its best forecast Y satisfies the following Lauricella type problem, the study of which dates back to the beginning of the century. $\Delta^2 Y = 0$ in $\mathbf{B}_R$, $Y = X$, and $\partial Y / \partial n = \partial X / \partial n$ in $\mathbf{S}_R$.

The solution can be given by means of the biharmonic Green's function $G(t, s)$ in the form

$$\int_{\mathbf{S}_R} \Delta G(t, s) \frac{\partial}{\partial n} X(s) - X(s) \frac{\partial}{\partial n} \Delta G(t, s) d\sigma(s)$$

substituting here the actual value of Green's function for the ball $\mathbf{B}_R$ we have the forecast as in [2]. Introducing spherical harmonics, the series expansion of LBM by them takes effect. As is known [2] the coefficient motions have a canonical representation by the canonical white noise processes. These latter add up to a white noise W over the whole $\mathbf{R}^3$ by spherical harmonics series expansion. The variation along dilations of the ball $\mathbf{B}_R$ just turns out to be the derivative in $\mathbf{R}$. Nevertheless some cautiousness is needed since these derivatives must be taken in the generalised sense. Thus we get the spherical harmonics series expansion for the variation. Estimation shows that the sum is convergent, and the convergence is uniform in Θ . Adding up the sum we arrive at the following conclusion.

Proposition. *The variation δY of the forecast of LBM exists as a generalised process over the open interval $(0, T)$ and it has the white noise integral representation:*

$$\int_0^T \varphi(R) \delta Y(R, T, \Theta) dR = \frac{1}{2} \int_0^T \varphi(R) \int_{\mathbf{S}_R} \frac{(T-R)^2}{RT} - \frac{(T^2 - R^2)^2}{R\rho^3} W(dR, d\Phi)$$

for every $\varphi(R) \in C_0^\infty(0, T)$, where (R, Φ) denotes a point of the sphere and ρ its distance from t .

Focusing our attention to the PDE description, the method we used inspires us to establish the following variational formula:

$$\begin{aligned} \delta Y(R, T, \Theta) = & \frac{2}{R} \int_{\mathbf{S}_R} \Delta G(t, s) \frac{\partial}{\partial n} X(s) - X(s) \frac{\partial}{\partial n} \Delta G(t, s) d\sigma(s) \\ & + \int_{\mathbf{S}_R} \delta \Delta G(t, s) \frac{\partial}{\partial n} X(s) - X(s) \delta \frac{\partial}{\partial n} \Delta G(t, s) d\sigma(s) \\ & + \int_{\mathbf{S}_R} \Delta G(t, s) \frac{\partial^2}{(\partial n)^2} X(s) - \frac{\partial}{\partial n} X(s) \frac{\partial}{\partial n} \Delta G(t, s) d\sigma(s). \end{aligned}$$

However, the proper understanding of this formula requires further explanations, especially the term $\partial^2 X(s) / (\partial n)^2$, which is neither an ordinary nor a generalised field over the sphere [3], nevertheless it is a well defined generalised field over $\mathbf{R}^3$.

Acknowledgement. I wish to thank three excellent scholars M. Arató, Yu. A. Rozanov, and T. Hida, who I regard as my teachers in the field of stochastic processes and fields. T. Hida also inspired this research and paid attention to my work, for which I am especially grateful to him.

Research supported by the Nat. Sci. Research Fund OTKA, grants T014116, T166665.

REFERENCES

1. Ciesielski Z. Stochastic equation for realization of the Lévy-Brownian motion with a several dimensional time. — Bull. Acad. Polonaise, 1975, № 11.
2. McKean H. P. Brownian motion with a several — dimensional time. — Теория вероятн. и ее примен., 1963, т. VIII, № 4, с. 357–378.
3. Путербарг Л. И. О прогнозе одного класса случайных полей. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. XXVIII, № 1, с. 175–182.

4. Розанов Ю. А. Марковские случайные поля и граничные задачи для стохастических уравнений в частных производных. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. XXXII, № 1, с. 3–34.
5. Si Si. A note on Lévy's Brownian motion. — Nagoya Math. J., 1989, v. 114, pp. 165–172.

Mijnheer J. (Leiden, Netherlands) **Asymptotic inference for AR(1) processes with (non-normal) stable errors. IV. A note on the case of a negative unit root.**

We consider the following model

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= 0 \quad \text{a.s.} \\ X_k &= \gamma X_{k-1} + \varepsilon_k \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

We assume that the errors ε_k , $k = 1, 2, \dots$, are i.i.d. with the stable distribution function $F(\cdot; \alpha, \beta)$, i.e., its characteristic function is given by

$$\log f(t) = \begin{cases} -|t|^\alpha \left\{ 1 - i\beta \operatorname{sgn}(t) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right\} & \text{if } \alpha \neq 1 \\ -|t| - i\beta \left(\frac{2}{\pi} \right) t \log |t| & \text{if } \alpha = 1. \end{cases}$$

We restrict ourselves to the cases $\alpha \neq 1$ and $|\beta| \leq 1$ and $(\alpha, \beta) = (1, 0)$.

Thus (α, β) satisfies condition (*) of [6]. Then the innovations satisfy the stability property

$$\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} \varepsilon_1 \quad (2)$$

for all n . It is easy to extend the results to random variables in the domain of attraction of stable laws. The least squares estimator for γ is given by

$$\hat{\gamma}_n = \left(\sum_{k=1}^n X_{k-1} X_k \right) \left(\sum_{k=1}^n X_{k-1}^2 \right)^{-1}$$

and we have

$$(\hat{\gamma}_n - \gamma) = \left(\sum_{k=1}^n X_{k-1} \varepsilon_k \right) \left(\sum_{k=1}^n X_{k-1}^2 \right)^{-1}.$$

In [4] it is erroneously stated that the case $|\gamma| = 1$ is solved in [2]. Only the case $\gamma = 1$ is solved in that paper. In this note we consider the case $\gamma = -1$.

In [2] it is proved that in the case $\gamma = 1$

$$n(\hat{\gamma}_n - 1) \Rightarrow \left(\int_0^1 S^2(t) dt \right)^{-1} \int_0^1 S(t-) dS(t). \quad (3)$$

« $\Rightarrow$ » means converges in distribution, $\{S(t): 0 \leq t \leq 1\}$ is a stable process as considered in [3] such that $S(1)$ has distribution function $F(\cdot; \alpha, \beta)$ (the same as ε_1) and $S(t-)$ is the left-hand limit of S in t . In the terminology of [7] $\{S(t): 0 \leq t \leq 1\}$ is a stable motion with sample paths in $D[0, 1]$.

In this note we prove the following theorem.

Theorem. In the first order AR(1) model (1) with i.i.d. stable errors satisfying stability property (2) and $\gamma = -1$ we have

$$n(\tilde{\gamma}_n + 1) \Rightarrow \left(\int_0^1 S^2(t) dt \right)^{-1} \int_0^1 S(t-) dS(t), \quad (4)$$

where $\{S(t): 0 \leq t \leq 1\}$ is a stable process in the sense of [3]. If ϵ_1 has distribution function $F(\cdot; \alpha, \beta)$, then $S(1)$ has the distribution function $F(\cdot; \alpha, 0)$.

Thus the difference between the cases $\gamma = 1$ and $\gamma = -1$ is that on the right-hand side of (3) $S(1)$ has the distribution function $F(\cdot; \alpha, \beta)$ and in (4) $F(\cdot; \alpha, 0)$.

REFERENCES

1. Freiman L. Probability. Reading (Mass.): Addison-Wesley, 1968.
2. Chan N. H., Tran L. T. On the first-order autoregressive process with infinite variance. — Econ. Th., 1989, v. 5, p. 354–362.
3. Mijneer J. L. Sample path properties of stable processes. — Mathematical Centre Tract 59. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1975.
4. Mijneer J. L. Asymptotic inference for AR(1) processes with (non-normal) stable errors I. — J. Math. Sciences, 1997, v. 83.
5. Mijneer J. L. Asymptotic inference for AR(1) processes with (non-normal) stable errors — II. Properties of some stochastic integrals. To appear.
6. Mijneer J. L. Asymptotic inference for AR(1) processes with (non-normal) stable errors III. — Stable Ornstein-Uhlenbeck processes and integrals of stable O-U processes. To appear.
7. Samorodnitsky G., Taqqu M. S. Stable non-Gaussian random processes. New York: Chapman & Hall, 1994.

Móri T. F. (Budapest, Hungary) On the distance of discrete probability distributions.

1. Introduction. The following problem looks like a classical exercise from the famous problem book by Pólya and Szegő [1] (but it is not there).

Problem. Let $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ be a power series defined over the real interval $[0; 1]$ with real coefficients a_n such that

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq 2.$$

Estimate the coefficients in terms of $\Delta = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$.

This problem itself belongs to the field of real analysis, but the motivation is probabilistic. Sometimes, when working with nonnegative integer valued probability distributions, one can easily estimate the difference between generating functions over the real interval $[0, 1]$, but not for imaginary arguments. This is often the case in Poisson approximation when generalized Bonferroni-type inequalities are used to estimate the number of occurring ones out of a couple of dependent events. Then it would be desirable to derive estimations for the deviation of distributions based on the maximum distance of the corresponding generating functions, but the most common technique of characteristic functions does not apply.

Let A_i , $i \in H$, be a finite family of arbitrary events in an arbitrary probability space. Let N denote the (random) number of occurring events. *Generalized Bonferroni type inequalities* are inequalities of the form

$$P(N = k) \leq (\geq) \sum_{M \subset H} c(M) P\left(\bigcap_{i \in M} A_i\right),$$

where $c(M)$, $M \in H$, are real constants. Usually $c(M)$ only depends on the cardinality of M (see [2] for more information), but certain kinds of sieve methods, such as *the graph-sieve of Rényi*, can be formulated only in the generalized model. In [3] Rényi's method is applied in a situation where the popular Chen-Stein method of Poisson approximation does not seem to help.

The following lemma first appeared in [4]. It shows how to convert a generalized Bonferroni bound for the probability $P(N = 0)$ into an estimation for the generating function $g_N(t) = E(t^N)$.

Lemma. *Suppose the inequality*

$$P(N = 0) \leq (\geq) \sum_{M \subset H} c(M) P\left(\bigcap_{i \in M} A_i\right)$$

holds for every finite collection of events. Then

$$g_N(t) \leq (\geq) \sum_{M \subset H} c(M) P\left(\bigcap_{i \in M} A_i\right) (1-t)^{|M|}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Using this lemma one can easily estimate

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |g_N(t) - \exp(-\lambda(1-t))|,$$

where $\lambda = \sum_{i \in H} P(A_i) = E(N)$. Thus, $a_k = P(N = k) - \lambda^k \exp(-\lambda)/k!$ in our starting problem.

2. Positive and negative results. It is not so hard to find counterexamples showing that neither the ℓ_1 -norm $\sum |a_n|$, nor the ℓ_∞ -norm $\max |a_n|$ can be estimated in terms of Δ . More precisely, there is no increasing function $\varphi: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) < 1$ and $\max_{n \geq 0} |a_n| \leq \varphi(\Delta)$.

Since the sequence of coefficients a_n , $n \geq 0$, is the difference of two discrete probability distributions, we could use other types of probability metrics as well, but here we are interested just in the differences themselves. The best result I can prove at the moment is the following.

Theorem [5]. *For every ε , $0 < \varepsilon < 1$ and $n = 0, 1, \dots$ there exists a positive constant $\kappa(n, \varepsilon)$ such that $|a_n| \leq \kappa(n, \varepsilon) \Delta^{1-\varepsilon}$.*

In the proof these constants are calculated explicitly, but they are too big for practical purposes: $\kappa(n, \varepsilon) = \exp\{O(n^4 \varepsilon^{-4})\}$. Are there finite constants $c(n)$, $n \geq 0$, such that $|a_n| \leq c(n) \Delta$ for every $n \geq 0$? So far I do not know the answer.

Research supported by the Hungarian National Foundation for Scientific Research, grants T-16237, T-16384.

REFERENCES

1. Pólya T., Szegő G. Problems and theorems in analysis I-II. Berlin: Springer, 1972, 1976.
2. Galambos J., Simonelli I. Bonferroni inequalities with applications. New York: Springer, 1996.
3. Móri T. F. On the waiting time till each of some given patterns appears as a run. — Probab. Theory Rel. Fields, 1991, v. 87, p. 313–323.
4. Móri T. F. Asymptotic joint distribution of cover times. — In: Runs and Patterns in Probability. Dordrecht: Kluwer, 1994, p. 307–327.
5. Móri T. F. Bonferroni inequalities and deviations of discrete distributions. — J. Appl. Prob., 1996, v. 33, p. 115–121.

Найденова А. В. (Киев, Украина) Устойчивость стохастических рекуррентных алгоритмов со случайным временем реакции.

Широкие классы стохастических моделей, связанные с анализом стохастических процедур оптимизации, вычислительными алгоритмами со случайными погрешностями измерений и т.п. приводят к необходимости исследования рекуррентных стохастических алгоритмов со случайным временем вычислений. Такой класс моделей может быть описан в терминах рекуррентных процессов полумарковского типа (РППМ), введенных В. В. Анисимовым в [1].

Мы рассматриваем в данной работе теоремы типа принципа усреднения и диффузионной аппроксимации для РППМ в случае дополнительной зависимости от текущего времени.

Пусть заданы независимые семейства случайных векторов $\{(\xi_k(s, t), \tau_k(s, t)), s \in \mathbb{R}^m, t \geq 0\}$, $k \geq 0$ со значениями в $\mathbb{R}^m \times [0, \infty)$ такие, что их распределения не зависят от индекса k , и пусть s_0 — начальное значение. Введем рекуррентные последовательности

$$t_0 = 0, \quad S_{k+1,h} = S_{k,h} + h\xi_k(S_{k,h}, t_{k,h}), \\ t_{k+1,h} = t_{k,h} + h\tau_k(S_{k,h}, t_{k,h}), \quad k \geq 0.$$

Положим $S_h(0) = s_0$, $S_h(t) = S_{k,h}$ при $t_{k,h} \leq t < t_{k+1,h}$, $t \geq 0$.

Предполагая существование моментов первого и второго порядков введенных величин и некоторые условия регулярности доказано, что последовательность $S_h(t)$ равномерно сходится по вероятности к решению $S(t)$ дифференциального уравнения, а процесс $\zeta_h(t) = h^{-1/2}(S_h(t) - s(t))$, $t \geq 0$ слабо сходится в пространстве D_T к некоторому диффузионному процессу.

Далее применим эти результаты к анализу скорости сходимости вычислительных алгоритмов нахождения решения дифференциального уравнения в форме $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ для случая, когда функция $f(t, y)$ вычисляется со случайными погрешностями $\varepsilon(t, y)$ такими, что $E\varepsilon(t, y) = 0$, $D\varepsilon(t, y) = \tilde{\sigma}^2(t, y)$, причем на вычисление каждой последующей итерации затрачивается случайное время $h\tau_k(t, y)$, $t \geq 0$, $y \in \mathbb{R}^m$, $k \geq 0$, где $E\tau_k(t, y) = m(t, y)$, $D\tau_k(t, y) = \sigma^2(t, y)$.

Для решения этой задачи вводится рекуррентная процедура вида

$$\hat{y}_{k+1,h} = \hat{y}_{k,h} + h \left(\tilde{f}(t_{k,h}, \hat{y}_{k,h}) + \varepsilon(t_{k,h}, \hat{y}_{k,h}) \right), \quad \hat{y}_{0,h} = y_0, \\ t_{k+1,h} = t_{k,h} + h\tau_k(t_{k,h}, \hat{y}_{k,h}), \quad t_{0,h} = 0,$$

где $\tilde{f}(t, y) = f(t, y) m(t, y)$.

Введем также процесс $\hat{y}_h(t) = \hat{y}_{k,h}$ при $t \in [t_{k,h}, t_{k+1,h})$.

Доказано, что при некоторых условиях регулярности для функций $m(t, y)$, $f(t, y)$, существовании и ограниченности моментов первого и второго порядков величин $\tau_k(\cdot)$, $\varepsilon_k(\cdot)$ для некоторого $T > 0 \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\hat{y}_h(t) - y(t)| \xrightarrow{P} 0$, где $y(t)$ — точное решение задачи Коши.

Рассмотрим теперь поведение центрированного процесса $\zeta_h(t) = h^{-1/2}(\hat{y}_{k,h} - y(t))$. Обозначив $D(t, y)^2 = E(\varepsilon_k(t, y) - f(t, y)(\tau_k(t, y) - m(t, y)))^2$ и накладывая дополнительно условие существования непрерывной частной производной $f'_y(t, y)$, некоторые условия регулярности на функцию $D(t, y)$ и условия равномерной интегрируемости величин $|\varepsilon_1(t, y)|^2$ и $\tau_1(t, y)^2$, мы получаем, что последовательность мер, порожденных последовательностью процессов $\zeta_h(t)$ слабо сходится в пространстве D_T к мере, порожденной процессом $\zeta(t)$, где

$$d\zeta(t) = f'_y(t, y(t)) \cdot \zeta(t) dt + D(t, y(t)) m(t, y(t))^{-1/2} dw(t), \quad \zeta(0) = 0,$$

а $w(t)$ — стандартный винеровский процесс.

В случае, когда $E\varepsilon(t, y) = O(h^a)$, $D\varepsilon(t, y) = O(h^b)$, последовательность мер, порожденных $\tilde{\eta}_h(t) = h^{-\gamma}(\hat{y}_h(t) - y(t))$, где $\gamma = \min\{\frac{1}{2}, a, (b+1)/2\}$, слабо сходится к мере, порожденной процессом $\tilde{\eta}(t)$, удовлетворяющим следующему СДУ:

$$d\tilde{\eta}(t) = f'_y(t, y(t)) \tilde{\eta}(t) dt + \delta_1 a(t, y(t)) m(t, y(t))^{-1} dt + [\delta_2 b^2(t, y(t)) + \delta_3 \sigma^2(t, y(t)) f^2(t, y(t))]^{1/2} m(t, y(t))^{-1/2} dw(t), \quad \tilde{\eta}(0) = 0,$$

где $\delta_1 = \lim_{h \rightarrow 0} h^{a-\gamma}$, $\delta_2 = \lim_{h \rightarrow 0} h^{b+1/2-\gamma}$, $\delta_3 = \lim_{h \rightarrow 0} h^{1/2-\gamma}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анисимов В. В., Алиев А. О. Предельные теоремы для рекуррентных процессов полумарковского типа. — ТВ и МС., т. 31, 1990, с. 9–15.
2. Анисимов В. В., Анисимова З. П. Сходимость рекуррентных процедур со случайным временем реакции. — Кибернетика, т. 1, 1985, с. 82–84.
3. Анисимов В. В., Лебедев Е. А. Стохастические сети обслуживания. Марковские модели. — К.: Лыбидь, 1992, 208 с.
4. Анисимов В. В., Анисимова З. П., Найденова А. В. Сходимость стохастических рекуррентных алгоритмов с учетом времени вычислений. — Докл. АН Украины, 1996, т. 12.

Nakamura M. (Higashi-Hiroshima, Japan) On dimensions and measures of statistically constructed Cantor sets.

1. Introduction. Equilibrium states and pressure which appear in the so-called thermodynamic formalism can be applied to characterize the dimension of the certain fractal sets related to dynamical systems (see, for example, [2]). In this paper we consider random sets of Cantor type which have certain statistically invariant structures.

Suppose that $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 2$, and set $S = \{1, 2, \dots, n_0\}$. Suppose also that $\{\bar{\varphi}(\omega)\}_n$ is a stationary sequence of $(C^1(I, I))^{n_0}$ -valued random variables on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Here $I = [0, 1]$ and $C^1(I, I) = \{f: f \text{ is continuously differentiable on } I, f(I) \subset I\}$ and the usual C^1 -topology is considered. We assume that $\bar{\varphi}(\omega)$ is realized as $\bar{\varphi}_n = \bar{\varphi} \circ \theta^{n-1}$, $\bar{\varphi}(\omega) = \bar{\varphi}_1(\omega) = (\varphi_1(\omega), \dots, \varphi_{n_0}(\omega))$ by a P -preserving transformation θ

on the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. In order to avoid complexities, we assume here that θ is ergodic. In [3] we studied the random set

$$K_\infty(\omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i_1 i_2 \dots i_n \in S^n} (\omega)(I),$$

$$\varphi_{i_1 i_2 \dots i_n}(\omega) = \varphi_{i_1}(\omega) \circ \varphi_{i_2}(\theta\omega) \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(\theta^{n-1}\omega).$$

In this paper, generalizing the above construction, we consider the random set with the Markov structure defined by $n_0 \tilde{S} n_0$ random 0-1 matrices $\{A(\theta^{n-1}\omega)\}$ according to the formula

$$K(\omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i_1 i_2 \dots i_n \in S^n(\omega)} (\omega)(I),$$

$$S_n(\omega) = \{i_1 i_2 \dots i_n \in S^n: A(\theta^{k-1}\omega)(i_k, i_{k+1}) = 1, 1 \leq k \leq n-1\}.$$

In what follows, the following conditions are assumed for $\bar{\varphi}$ and A :

$$(1.1) \text{ essinf}(\inf_{k, l \in S, k \neq l} \text{dist}(\varphi_k(\omega)(I), \varphi_l(\omega)(I))) > 0,$$

$$(1.2) \quad 0 < \text{essinf} \left(\min_{k \in S} \min_{x \in I} |\varphi_k(\omega)'(x)| \right), \quad \mathbb{E} \left\{ \log(\max_{k \in S} \max_{x \in I} |\varphi_k(\omega)'(x)|) \right\} < 0;$$

(1.3) if we put

$$\phi_n(\omega) = \max_{i_1 \dots i_n \in S_n(\omega)} \sum_{k=1}^n D\{-\log |\varphi_{i_k}(\theta^{k-1}\omega)'|, \varphi_{i_{k+1} \dots i_n}(\theta^k\omega)(I)\},$$

$$D\{f, B\} = \sup \{|f(x) - f(y)|: x, y \in B\},$$

then $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \phi_n(\omega) = 0$ a.s.;

(1.4) there exists $q \in \mathbb{N}$ such that $A^q(\omega) = A(\theta^{q-1}\omega) \dots A(\theta\omega) A(\omega) > 0$.

The condition (1.3) is satisfied if, for example, $P \circ \bar{\varphi}^{-1}$ is supported on a compact set in $(C^1(I, J))^{\mathbb{N}_0}$. The set $K(\omega)$ is naturally related to the space $\Sigma(\omega) = \{\underline{x} = (x_n) \in S^\infty: A(\theta^{n-1}\omega)(x_n, x_{n+1}) = 1, n \in \mathbb{N}\}$ by the map $\xi(\omega): \Sigma(\omega) \rightarrow K(\omega)$, $\xi(\omega)(\underline{x}) = \xi(\omega, \underline{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{x_1, \dots, x_n}(\omega)(0)$. The function $\psi_0: \Omega S S^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ is defined by $\psi_0(\omega, \underline{x}) = -\log |\varphi_{x_1}(\xi(\theta\omega, \sigma \underline{x}))|$ and the pressure $\pi(\omega, -\beta\psi_0)$, $\beta \geq 0$, is defined by

$$\pi(\omega, -\beta\psi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log \left(\sum_{i_1 \dots i_n \in S_n(\omega)} \max_{\underline{x} \in [i_1 \dots i_n]_\omega} \exp \left(-\beta \sum_{k=0}^{n-1} \psi_0(\xi(\theta^k\omega, \sigma^k \underline{x})) \right) \right),$$

where $[i_1 \dots i_n]_\omega = \{\underline{x} \in \Sigma(\omega): x_1 = i_1, \dots, x_n = i_n\}$ and σ is the left shift on S^∞ . Another expression for $\pi(\omega, -\beta\psi_0)$ is

$$\pi(\omega, -\beta\psi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \log \left(\sum_{i_1 \dots i_n \in S_n(\omega)} \max_{\underline{x} \in [i_1 \dots i_n]_\omega} |\varphi_{i_1 \dots i_n}(\omega)'(\xi(\theta^n\omega, \sigma^n \underline{x}))|^\beta \right).$$

2. Geometrical characteristics of $K(\omega)$. Hausdorff dimension and packing dimension are denoted by $\dim(\cdot)$ and $\text{Dim}(\cdot)$ respectively. See [5] for details. In [3] we characterized $\dim(K_\infty(\omega))$ and $\text{Dim}(K_\infty(\omega))$ by the pressure functional. Similarly we have the following theorem.

Theorem 2.1. *There exists a unique positive deterministic number α such that $\pi(\omega, -\alpha\psi_0) = 0$ and $\dim(K_\infty(\omega)) = \text{Dim}(K_\infty(\omega)) = \alpha$ a.s.*

A key step in the proof is to construct a random probability measure $\nu(\omega)$ supported on $\Sigma(\omega)$ a.s. and positive random variable λ for $\beta \geq 0$ which satisfy, for a.s. ω , $\underline{x} \in \Sigma(\omega)$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\exp(-2\beta\phi_n(\omega)) \leq \frac{\nu(\omega, [x_1 x_2 \dots x_n])}{(\prod_{k=0}^{n-1} \lambda(\theta^k \omega))^{-1} |\varphi_{x_1 \dots x_n}(\omega)(I)|^\beta} \leq \exp(2\beta\phi_n(\omega)), \quad (2.1)$$

$$\mathbb{E}\{\log \lambda\} = \pi(\omega, -\beta\psi_0). \quad (2.2)$$

We call these measure quasi-Gibbs and they are obtained through the analysis of the random transfer operators defined by the function $-\beta\psi_0$. See also [1] where elaborate discussions are given for the operators given by Hölder functions.

If we assume a stronger condition instead of (1.3), using (2.1) and (2.2), we obtain the following result for the α -dimensional Hausdorff measure $\mathcal{H}^\alpha(K(\omega))$. See [4] for a similar argument.

Theorem 2.2. *Suppose that $\sup_n \phi_n(\omega) < \infty$ a.s. and λ is arbitrary one in (2.1) and (2.2) for $\beta = \alpha$. Then the only one of the following*

(1) $\mathcal{H}^\alpha(K(\omega)) = 0$ a.s., (2) $\mathcal{H}^\alpha(K(\omega)) = \infty$ a.s., (3) $0 < \mathcal{H}^\alpha(K(\omega)) < \infty$ a.s. occurs.

Moreover (1) occurs if

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \log \lambda(\theta^k \omega) = -\infty \quad \text{a.s.},$$

while (2) occurs if $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \log \lambda(\theta^k \omega) = \infty$ a.s. Similarly (3) occurs if

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \log \lambda(\theta^k \omega) < \infty \quad \text{a.s.}$$

and this is equivalent to the existence of an a.s. finite random variable g such that $\log \lambda = g - g \circ \theta$, $\text{esssup}(g) < \infty$.

A quite symmetric result holds for the α -dimensional packing measure $\mathcal{P}^\alpha(K(\omega))$ (see [4]). Note that the statements in (1), (2) and (3) of the theorem are independent of the choice of the random variable λ . It should be also remarked that the dichotomy $0 < \mathcal{H}^\alpha(K(\omega))$, $\mathcal{P}^\alpha(K(\omega)) < \infty$ a.s. or $\mathcal{H}^\alpha(K(\omega)) = 0$, $\mathcal{P}^\alpha(K(\omega)) = \infty$ a.s. when the maps $\varphi_k(\omega)$, $k \in S$ are linear a.s. with $\{\bar{\varphi} \circ \theta^{n-1}\}_n$ i.i.d. and all the entries of the matrix A are 1 for a.s. ω [3] is induced from these results.

REFERENCES

1. Bogenschütz T., Gundlach V. M. Ruelle's transfer operator for random subshifts of finite type. — Ergod. Th. & Dynam. Sys., 1995, v. 15, p. 413–447.
2. Bowen R. Hausdorff dimension of quasi-circles. Publications Mathématiques 50, Paris: I.H.E.S. 1979.
3. Nakamura M. Quasi-Gibbs measures and dimensions of statistical self-similar sets. Preprint.
4. Nakamura M. Measures of statistical self-similar sets. Preprint.
5. Taylor S. J., Tricot C. Packing measure and its evaluation for a Brownian path. — Trans. Amer. Math. Soc., 1985, v. 288, p. 679–699.

Neuenschwander D. (Lausanne, Switzerland) **The Prokhorov-Loève law of large numbers on countable subgroups of simply connected step 2-nilpotent Lie groups.**

The Prokhorov-Loève strong law of large numbers says the following (cf. [1]):

Theorem 1 (Prokhorov-Loève strong law of large numbers). *Let $\{X_n\}_{n \geq 1}$ be a sequence of independent symmetric $\mathbf{R}^d$ -valued random variables and $\{A_n\}_{n \geq 1}$ a sequence of linear endomorphisms of $\mathbf{R}^d$. In order that*

$$A_n \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

it is necessary and sufficient that both of the two following conditions:

$$A_n X_k \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad k \geq 1 \quad (2)$$

and

$$A_{n_{j+1}} \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} X_k \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad j \rightarrow \infty, \quad (3)$$

hold for any nondecreasing unbounded sequence $\{n_j\}_{j \geq 1}$ of natural numbers.

It is well-known that on countable probability spaces, a.s. convergence is equivalent to convergence in probability (cf. [2, p. 43]).

The aim of this note is to carry over the Prokhorov-Loève law of large numbers to countable subgroups of simply connected step 2-nilpotent Lie groups (Theorem 2).

Simply connected step 2-nilpotent Lie groups are groups which arise as follows: Let $[\cdot, \cdot]: \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ ($d \geq 0$) be a skew-symmetric bilinear map such that $[[\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d], \mathbf{R}^d] = \{0\}$. Then $G = \mathbf{R}^d$, equipped with the multiplication $x \cdot y = x + y + \frac{1}{2}[x, y]$, is a group of the above-mentioned type. Clearly, $e = 0$ and $x^{-1} = -x$. The best-known (noncommutative) examples are the *Heisenberg groups* H^d given by $H^d = \mathbf{R}^{2d+1} = \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ and

$$\begin{aligned} [x, y] &= (0, 0, \langle x^{(1)}, y^{(2)} \rangle - \langle x^{(2)}, y^{(1)} \rangle) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R} = H^d \\ (x &= (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}), y = (y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R} = H^d) \end{aligned}$$

with their countable subgroups supported by $\mathbf{Q}^d \times \mathbf{Q}^d \times \mathbf{Q}$. All groups of type H (cf. [3]) are simply connected step 2-nilpotent.

A random variable X on a locally compact group is called symmetric if both X and X^{-1} have the same distribution.

Theorem 2. *Let G be a countable subgroup of a d -dimensional simply connected step 2-nilpotent Lie group. Assume $\{X_n\}_{n \geq 1}$ is a sequence of independent symmetric G -valued random variables. Let furthermore $\{A_n\}_{n \geq 1}$ be a sequence of endomorphisms of G . In order that*

$$A_n \prod_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

it is necessary and sufficient that both of the two following conditions hold:

$$A_n X_k \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad k \geq 1, \quad (5)$$

and

$$A_{n_{j+1}} \prod_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} X_k \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad j \rightarrow \infty, \quad (6)$$

for any nondecreasing unbounded sequence $\{n_j\}_{j \geq 1}$ of natural numbers.

The main ingredient of the proof is the following lemma.

Lemma 1. Let $\{X_{n,k}\}_{n \geq 1, 1 \leq k \leq k(n)}$ be a triangular system of symmetric random variables on G . Then $\prod_{k=1}^{k(n)} X_{n,k} \xrightarrow{P} 0$, $n \rightarrow \infty$, if and only if $\sum_{k=1}^{k(n)} X_{n,k} \xrightarrow{P} 0$, $n \rightarrow \infty$.

For the proof of the «only if»-direction of the Lemma, we apply the fact that on simply connected step 2-nilpotent Lie groups we have the relation

$$\prod_{i=1}^n x_i + \prod_{i=1}^n x_{n+1-i} = \sum_{i=1}^n x_i,$$

a trick which has been invoked several times (cf. [5]). For the «if»-direction we make use of the theory of convolution hemigroups (cf. [8]).

Now Theorem 2 follows immediately from (the classical) Theorem 1, where the passage from (1) and (3) to (4) and (6) and vice versa are possible by the lemma and the fact that by the countability $\xrightarrow{a.s.}$ and $\xrightarrow{P}$ are equivalent.

REFERENCES

1. Будыгин В. В., Солнцев С. А. УЗБЧ для сумм независимых случайных векторов с операторными нормировками и сходимости к нулю гауссовских последовательностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 2, с. 266–281.
2. Chow Y. S., Teicher H. Probability Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1978.
3. Kaplan A. Fundamental solutions for a class of hypoelliptic PDE generated by composition of quadratic forms. — Trans. Amer. Math. Soc., 1980, v. 258, № 1, p. 147–153.
4. Neuenschwander D. Laws of large numbers on simply connected step 2-nilpotent Lie groups to appear in: Prob. Math. Stat., 1996a.
5. Neuenschwander D. Probabilities on the Heisenberg group: Limit theorems and Brownian motion. Lecture Notes Math., v. 1630, Berlin: Springer-Verlag, 1996.
6. Nobel S. Limit theorems for probability measures on simply connected nilpotent Lie groups. — J. Theoret. Probab., 1991, v. 4, № 2, p. 261–284.
7. Rvačeva E. L. On domains of attraction of multi-dimensional distributions. — Sel. Transl. Math. Stat. Prob., 1962, v. 2, p. 183–205.
8. Siebert E. Continuous hemigroups of probability measures on a Lie group. — In Probability measures on groups. Lecture Notes in Mathematics, 928. 1982, p. 362–402.

Omey E. (Brussels, Belgium) A coin tossing problem and the number of maxima in a sample.

Let $X, X(1), X(2), \dots$ denote i.i.d. random variables with values in $\{1, 2, 3, \dots\}$ and with distribution function (d.f.) $F(x)$ such that $F(x) < 1$ for all x . For each $n \geq 1$, define $p(n) = P\{X = n\}$, $M(n) = \text{Max}\{X(1), X(2), \dots, X(n)\}$ and $Y(n)$ is the number of maximum in $\{X(1), X(2), \dots, X(n)\}$. It is easy to see that $P\{M(n) \leq x\} = F^n(x)$ and that

$$P\{Y(n) = k\} = \sum_{m=1}^{\infty} \binom{n}{k} p^k(m) F^{n-k}(m-1). \quad (1)$$

In this note we are interested in the asymptotic behavior of $E(Y(n))$ and $P\{Y(n) = 1\}$ as $n \rightarrow \infty$.

As an example, consider the following coin tossing game. At step 1 of the game we toss n coins. If all coins show «head» the game ends. Otherwise, at step 2 we toss

the coins showing «tail». At step 3 we toss the remaining coins showing «tail» and we continue until all coins show «head». In this example $M(n)$ denotes the number of tosses till the end the game and $Y(n)$ denotes the number of coins at the last step of the game. From (1) it easily follows that

$$\mathbf{E}\{Y(n)\} = n \sum_{m=1}^{\infty} p(m) F^{n-1}(m) = n\mathbf{E}(1 - F(M(n))) \quad (2)$$

From (1) and (2) it also follows that

$$\mathbf{P}\{Y(n) = 1\} = n\mathbf{E}(1 - F(M(n-1))) \quad (1)$$

It is clear from (2) and (3) that the tail behavior of $F(x)$ will play an important role. We will consider the following classes of functions.

Definition. Let $G(x)$ denote a d.f. on $\mathbf{R}^+$.

- (a) $G(x) \in L$ if and only if $(1 - G(x+y))/(1 - G(x)) \rightarrow 1$ for all y .
- (b) $G(x) \in RV(-)$ if and only if $(1 - G(xy))/(1 - G(x)) \rightarrow y^{-\beta}$ for all $y > 0$.
- (c) $G(x) \in T(g)$ if and only if $(1 - G(x+yg(x)))/(1 - G(x)) \rightarrow e^{-y}$ for all y .

It is well-known that L is a subclass of $RV(-\beta)$ and that each of the limit statements holds locally uniformly (l.u.) in y . Our first result is connected with the classes L and $RV(-\beta)$.

Lemma 1.

- (a) If $F(x) \in L$, then $n\mathbf{E}(1 - F(M(n))) \rightarrow 1$.
- (b) If $F(x) \in L$, then $n\mathbf{E}(1 - F(M(n) + a)) \rightarrow 1$, l.u. in a .
- (c) If $F(x) \in RV(-\beta)$, then $n\mathbf{E}(1 - F(M(n)x)) \rightarrow x^{-\beta}$, $\forall x > 0$.

Proof. (a) From (2) and (3) it follows that

$$0 \leq \mathbf{E}(Y(n+1)) - \mathbf{P}\{Y(n+1) = 1\} = (n+1)\mathbf{E}(p(M(n))).$$

Since $F \in L$, it follows that $p(n)/(1 - F(n)) \rightarrow 0$. Now choose $n^0 > 0$ and $\varepsilon > 0$ so that $p(n)/(1 - F(n)) \leq \varepsilon$ for $n > n^0$. We obtain

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(p(M(n))) &= \mathbf{E}(p(M(n)) I\{M(n) > n^0\}) + \mathbf{E}(p(M(n)) I\{M(n) \leq n^0\}) \\ &\leq \varepsilon \mathbf{E}(1 - F(M(n))) + \mathbf{P}\{M(n) \leq n^0\} \leq \frac{\varepsilon \mathbf{P}\{Y(n+1) = 1\}}{n+1} + F^n(n^0). \end{aligned}$$

Hence $0 \leq \limsup \mathbf{E}(Y(n+1)) - \mathbf{P}\{Y(n+1) = 1\} \leq \varepsilon$. Now let $\varepsilon \rightarrow 0$ to obtain $\lim \mathbf{E}(Y(n+1)) - \mathbf{P}\{Y(n+1) = 1\} = 0$. It follows that $\lim \mathbf{P}\{Y(n+1) = 1\} = \lim \mathbf{E}(Y(n+1)) = 1$ and hence (a) holds.

(b) Choose $\varepsilon > 0$ and n^0 so that for $M(n) > n^0$,

$$1 - \varepsilon \leq \frac{1 - F(M(n) + a)}{1 - F(M(n))} \leq 1 + \varepsilon.$$

Since $F^n(n^0) \rightarrow 0$ exponentially fast, (b) follows from (a).

(c) Now choose $\varepsilon > 0$ and n^0 so that for $M(n) > n^0$,

$$(1 - \varepsilon)x^{-\beta} \leq \frac{1 - F(M(n)x)}{1 - F(M(n))} \leq (1 + \varepsilon)x^{-\beta}.$$

In the coin tossing game described before, the random variable X is geometrically distributed, a case not covered by Lemma 1. To treat this case also, we assume that

$F(x) = G([x])$, where $G(x)$ is in the class $T(g)$. For d.f. in the class $T(g)$ it is possible to choose normalizing sequences $u(n)$ and $v(n) = g(u(n))$ so that $n(1 - G(u(n))) \rightarrow 1$ and

$$\lim P \left\{ \frac{M^*(n) - u(n)}{v(n)} \leq x \right\} = H(x) := \exp\{-\exp(-x)\},$$

where $\{M^*(n)\}$ denotes the sequence of partial maxima related to $G(x)$. In the case where $g(x) \rightarrow \infty$, it follows that $(1 - F(x)) \sim (1 - G(x))$ and hence that the sequences $M(n)$ and $M^*(n)$ have a completely similar asymptotic behavior. In the case where $g(x) \rightarrow c$, with $0 < c < \infty$, we can not conclude that $1 - F(x) \sim 1 - G(x)$. For real numbers y we have

$$1 - F(m + y) = 1 - G\left(\frac{m + g(m)[y]}{g(m)}\right).$$

Now suppose we can find a subsequence $n = n(m)$ of the integers such that $n(1 - G(m)) \rightarrow K$ ($0 < K < \infty$). Then we have

$$n(1 - F(m + y)) \sim n(1 - G(m)) \exp\left(-\frac{[y]}{c}\right) \rightarrow K \exp\left(-\frac{[y]}{c}\right),$$

and it follows that

$$P\{M(n) - m \leq y\} \rightarrow P\{Z \leq y\}$$

where $\log(P\{Z \leq y\}) = K \log(H([y]/c))$.

From this it can be proved that $E(M(n)) - m \rightarrow E(Z)$ and that $nE(1 - F(M(n) + a)) \rightarrow KE(\exp(-[Z + a]))$. Summarizing, we have

Lemma 2. Suppose $F(x) = G([x])$, where $G(x) \in T(g)$.

(a) If $g(x) \rightarrow \infty$, then $nE(1 - F(M(n) + a)) \rightarrow 1$.

(b) Suppose $g(x) \rightarrow c$ ($0 < c < \infty$) and $n = n(m)$ is such that $n(1 - G(m)) \rightarrow K$ ($0 < K < \infty$). Then $nE(1 - F(M(n) + a)) \rightarrow KE(\exp(-[Z + a]))$ where Z is a r.v. with $P\{Z \leq y\} = \exp\{-K \exp(-[y]/c)\}$.

In the coin tossing example above we have $F(x) = G([x])$ where $G(x) = 1 - \exp\{x \log(q)\}$ and where p denotes the probability of tossing «head». According to lemma 2(b) we can consider subsequences $n(m)$ for which $n \exp(m \log(q)) \rightarrow K$.

REFERENCES

1. Eisenberg B., Stengle G., Strang G. The asymptotic probability of a tie for the first place. — Ann. Appl. Probab., 1993, v. 3, № 3, p. 731–745.
2. Woodcock C. F. The asymptotic behavior of a function arising from tossing coins. — Bull. Lond. Math. Soc., 1996, v. 28, p. 19–23.
3. Qi Y., Wilms R. J. G. The limit behavior of maxima modulo one and the number of maxima. Report 9519/A, Erasmus University Rotterdam-Econometric Institute, 1995.

Пагурова В. И. (Москва, Россия) О слабой сходимости считающих процессов.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ независимы и одинаково распределены с общей функцией распределения (ф.р.) $F((x - \theta_1)/\theta_2)$, зависящей от неизвестных параметров сдвига θ_1 и масштаба θ_2 , $|\theta_1| < \infty$, $|\theta_2| > 0$, θ_1 и θ_2 — $\sqrt{n}$ -состоятельные оценки θ_1 и θ_2 соответственно. Обозначим $Z_i = (X_i - \hat{\theta}_1)/\hat{\theta}_2$, $i = 1, \dots, n$, $X_{(m)}$, $Z_{(m)}$ — соответствующие порядковые статистики.

Для каждого $t > 0$ обозначим $y = y_n(t)$ решение уравнения

$$F(y) = 1 - \frac{t}{n}, \quad (1)$$

введем считающий процесс $N_n(t) = \sum_{i=1}^n I\{Z_i \geq y\}$ и пуассоновский процесс $L(t)$ с единичной интенсивностью. Найдем величины p_{kj} из рекуррентного соотношения

$$p_{kj} = e^{-t} \sum_{i=0}^j \frac{p_{k-1,i} t^{j-i}}{(j-i)!}, \quad j = 0, 1, \dots, k-1,$$

$$p_{ki} = 0, i \geq 1, p_{10} = e^{-t}.$$

Теорема. Если y определяется уравнением (1) и условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[1 - F\left(y \pm \frac{y}{x\sqrt{n}}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[1 - F\left(y \pm \frac{1}{x\sqrt{n}}\right) \right] = t$$

выполняется для каждого $t > 0$ и $x > 0$, тогда

1) считающий процесс $N_n(t)$ сходится по распределению к $L(t)$ при $n \rightarrow \infty$,

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{Z_{(n)} < y_n(t), Z_{(n-1)} < y_n(2t), \dots, Z_{(n-k+1)} < y_n(kt)\} = \sum_{j=0}^{k-1} p_{kj}$.

Для однопараметрического семейства распределения, зависящего от параметра сдвига, исследуется скорость сходимости процесса $N_n(t)$ к $L(t)$. При этом рассматривается класс (А) распределений, для которого $1 - F(x) \sim ax^\alpha \exp(-bx^\beta)$ при $x \rightarrow \infty$, $|\alpha| < \infty$, $a, b, \beta > 0$ и класс (В) распределений, для которого $1 - F(x) \sim ax^{-\gamma}$ при $x \rightarrow \infty$, $a, \gamma > 0$, а также различные оценки неизвестного параметра сдвига.

Статистические приложения. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые наблюдения, X_i имеет функцию распределения $F((x - \theta_1)/\theta_2)$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим задачу проверки гипотезы $H_0: \theta_{1i} = \theta_1, i = 1, \dots, n$, против H_1 : существуют наблюдения, для которых $\theta_{1i} > \theta_1$, остальные наблюдения имеют $\theta_{1i} = \theta_1$; число наблюдений с $\theta_{1i} > \theta_1$ не превосходит k .

Параметры $(\theta_{11}, \dots, \theta_{1n}, \theta_1, \theta_2)$ неизвестны, число $k \geq 1$ задано. Пусть α означает номинальный уровень значимости критерия. Найдем t из уравнения $\sum_{j=0}^{k-1} p_{kj} = 1 - \alpha$ и рассмотрим вектор $(Z_{(n)}, Z_{(n-1)}, \dots, Z_{(n-k+1)})$. Если событие $\{Z_{(n-i+1)} \geq y_n(it)\}$ произошло хотя бы для одного $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, тогда гипотеза H_0 отвергается в пользу H_1 и соответствующие значения $X_{(n-i+1)}$ объявляются выбросами. В условиях теоремы истинный уровень значимости критерия сходится к α при $n \rightarrow \infty$. Исследуется асимптотическая мощность критерия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barnett V., Lewis T. Outliers in Statistical Data. New York: John Wiley, 1984.
2. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984.
3. Пагурова В. И., Нестерова С. А. О слабой сходимости считающих процессов в присутствии мешающих параметров. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 1, с. 176–183.
4. Пагурова В. И., Чижикова И. Л. Критерии обнаружения выбросов, использующие робастные оценки мешающих параметров. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 2, с. 445–452.
5. Пагурова В. И. Об асимптотической мощности критерия обнаружения выбросов (в печати).

Pancheva E. (Sofia, Bulgaria) Self-similar extremal processes with homogeneous max-id increments.

An *extremal process* $Y: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)^d$ is a stochastic process with the following two properties:

1) the sample paths are right-continuous increasing functions from the time space $[0, \infty)$ to the state space $[0, \infty)^d$;

2) for any finite sequence of time points $0 = t_0 < \dots < t_m$ there exist independent r.v.'s $U_0, \dots, U_m$ in $[0, \infty)^d$ such that $(Y(t_0), \dots, Y(t_m)) \stackrel{d}{=} (U_0, U_0 \vee U_1, \dots, U_0 \vee \dots \vee U_m)$.

The probability distribution of an extremal process with independent max-increments U is completely determined by its *distribution function* (d.f.) $f(t, x) = P\{Y(t) < x\}$. It is decreasing and right-continuous in t and increasing and left-continuous in x , so lower semicontinuous.

We say, the sequence Y_n of extremal process is convergent *weakly in law* to an extremal process Y with d.f. f , if the sequence of r.v.'s $Y_n(t)$ converges in law to the r.v. $Y(t)$ for all t continuity point of f .

With an extremal process Y we associate a *lower curve* $C_Y: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)^d$, increasing and right-continuous, below which the sample functions of Y cannot pass. It is defined coordinatewise: $C^{(i)}(t)$ is the lower endpoint of the $F_1^{(i)}$ of the i th coordinate of the r.v. $Y(t)$, $i = 1 \dots d$.

Let Y be an extremal process with lower curve C . If the underlying probability space is sufficiently rich, there exists a consistent family of independent *max-increments* $U(s, t)$, $0 \leq s < t$, such that a.s. $U(s, t) \geq C(t)$ and $Y(t) = Y(s) \vee U(s, t)$.

Every extremal process Y has the form: $Y(t) = C(t) \vee \sup\{X_k: T_k \leq t\}$, $t > 0$, where $N = \{(T_k, X_k)\}$ is a point process on $[0, \infty)^{d+1}$ with the properties: the time points T_k are distinct, the r.v.'s X_k in $[0, \infty)^d$ are independent, $N([0, t] \times \bar{S}[0, x)^c) < \infty$ a.s., $\forall x > C(t)$.

In our max-model the most natural norming mappings are the max-automorphisms of $[0, \infty)^{d+1}$. Recall, max-automorphisms $\zeta = (r, L_1, \dots, L_d)$ are continuous and strictly increasing in each component. Since r is interpreted as time change and $L = (L_1, \dots, L_d)$ as space change, we usually call ζ *time-space change*.

Let ζ_n be a sequence of time-space changes. It is called *regular* on the open set A above the lower curve if for each $\alpha \in (0, \infty)$ there exists a subsequence $m_n \rightarrow \infty$ and a time-space change η_α such that

$$\zeta_{m_n}^{-1} \circ \zeta_n(t, x) \rightarrow \eta_\alpha(t, x), \quad (t, x) \in A,$$

and the correspondence $\alpha \longleftrightarrow \eta_\alpha$ is one-to-one.

We consider the following problem: given a *homogeneous* extremal process X (i.e. $U_x(s, t) \stackrel{d}{=} U_x(0, t-s)$) with d.f. f , $f(\infty, x) = 0$ and $f(t, \infty) = 1$, and generating point process $N = \{(t_k, X_k)\}$, t_k nonrandom, we assume that there exists a regular sequence of time-space changes $\zeta_n(t, x) = (r_n(t), L_n(x))$, $\zeta_n(t, x) \rightarrow \underline{\infty}$, such that the sequence of extremal processes

$$Y_n(t) = L_n^{-1} \circ X \circ r_n(t) = C_n(t) \vee \sup\{L_n^{-1} \circ X_k: r_n^{-1}(t_k) \leq t\}$$

is convergent weakly in law to a nondegenerate extremal process Y with d.f. g . We denote the class of the limit processes by *SH*. It is characterized by the following properties:

P₁) $Y \in SH$ is *self-similar* in the sense that for all $t > 0$ there exists a space change L_t such that $Y(t) \stackrel{d}{=} L_t \circ Y(1)$.

P₂) $Y \in SH$ has homogeneous max-id increments, namely $U_Y(s, t) \stackrel{d}{=} C(t) \vee Y(t-s)$. This implies $g(t, x) = G^t(x)$, where $G(x) = P(Y(1) < x)$ is max-id.

P₃) The f.d.d. of Y are of the form

$$P(Y(t_1) < x_1, \dots, Y(t_k) < x_k) = G^{t_1}(x_1) G^{t_2-t_1}(x_2) \dots G^{t_k-t_{k-1}}(x_k)$$

for $t_1 < \dots < t_k$ and $x_1 < \dots < x_k$. Such processes are considered by Resnick and Rubinovich [3] and we denote their class by $\mathfrak{R}$.

P₄) All univariate marginals of Y are *max-stable* with respect to the group of space changes $\{L_t: t > 0\}$, i.e., $G^t(x) = G(L_t x)$, $(t, x) \in A$.

P₅) The lower curve of Y is constant, namely $C_y(t) \equiv C_y(1) = \inf\{G > 0\}$.

In general, the type of the univariate marginals does not determine the type of the increments and so the type of the process. However in our case:

P₆) The limit process Y is max-stable (MS).

Moreover:

P₇) $SH = \mathfrak{R} \cap MS$.

REFERENCES

1. Balkema A. A., Pancheva E. Decomposition for multivariate extremal processes. Commun. Statist. — Theory Meth., 1996, 25 (4), p. 737–758.
2. O'Brien G. L., Torfs P. J. J. F., Vervaat W. Stationary self-similar extremal processes. — Prob. Th. Rel. Fields, 1990, v. 87, p. 97–119.
3. Resnick S., Rubinovich M. The structure of extremal processes. — Adv. Appl. Prob., 1973, v. 5, p. 287–307.

Пергаменцев С. Ю., Чистяков Г. П. (Харьков, Украина) **О независимых линейных статистиках со случайными коэффициентами.**

Явление независимости статистик наиболее изучено для линейных статистик. Рассмотрим независимые случайные величины (сл.в.) $X_1, \dots, X_n$ и две линейные статистики $L_1 = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$, $L_2 = b_1 X_1 + \dots + b_n X_n$, где $a_j, b_j \in \mathbf{R}^1$ — постоянные коэффициенты.

Теорема А (Дармуа–Скитович [1], [2]). Если линейные статистики L_1 и L_2 независимы, то сл.в. X_j , для которых $a_j b_j \neq 0$, нормальны.

Эта теорема была обобщена А. А. Зингером и Ю. В. Линником на линейные формы со случайными коэффициентами. Пусть дана пара линейных форм $M_1 = U_1 X_1 + \dots + U_n X_n$, $M_2 = U_{n+1} X_1 + \dots + U_{2n} X_n$, где вектор коэффициентов $U^{(2n)} = (U_1, \dots, U_n, U_{n+1}, \dots, U_{2n})$ является случайным вектором в $\mathbf{R}^{2n}$, независимым от случайного вектора $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$. Допустим, что случайный вектор $U^{(2n)}$ обладает следующими свойствами:

- (1) его распределение имеет ограниченный носитель в $\mathbf{R}^{2n}$;
- (2) существует $\varepsilon > 0$ такое, что $P(|U_j| > \varepsilon) > 0$, $j = 1, \dots, n$;
- (3) $U_{n+j} = 1$, $j = 1, \dots, n$;
- (4) для каждого мультииндекса $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbf{Z}_+^n$ такого, что $\sum_{j=1}^n m_j \neq 0$, выполняется $Q_{m_1, \dots, m_n}(t) \neq \text{const}$, где $Q_{m_1, \dots, m_n}(t) = E((1+U_1 t)^{m_1} \dots (1+U_n t)^{m_n})$, $t \in \mathbf{R}^1$.

Теорема Б (Зингер–Линник [3]). Пусть выполнены условия (1)–(4). Тогда, если M_1 и M_2 независимы, то случайный вектор $X^{(n)}$ — нормальный.

Эта теорема является обобщением теоремы А для общего случая ненулевых коэффициентов обеих форм L_1 и L_2 . В монографии [4, с. 637] была поставлена задача продолжить исследование независимости линейных форм со случайными коэффициентами. В теореме Б форма M_2 имеет неслучайные коэффициенты. Мы ставим

перед собой задачу наложить такие условия на векторы $U^{(2n)}$, $X^{(n)}$, чтобы теорема Б сохраняла силу, когда обе формы M_1 и M_2 имеют случайные коэффициенты.

Всюду ниже мы предполагаем, что сл.в. $X_1, \dots, X_n, U_1, \dots, U_{2n}$ независимы в совокупности. Рассмотрим следующие условия на сл.в. $U_j, j = 1, \dots, 2n$:

(i) распределения вероятностей сл.в. $U_j, j = 1, \dots, 2n$, имеют ограниченные носители;

(ii) $U_j U_{n+j} \neq 0$ почти наверное (п.н.) для $j = 1, \dots, n$;

(iii) существует постоянная $b \geq 1$ и сл.в. $U \geq 0$ такие, что $b^{-1} E U^k \leq E |U_j|^k \leq b E U^k, k = 1, 2, \dots, j = n+1, \dots, 2n$.

При выполнении условия (i), характеристическая функция $\varphi_{U_j}(t)$ сл.в. U_j является целой функцией экспоненциального типа для каждого $j = 1, \dots, 2n$. Обозначим через $\{a_{kj}\}$ множество нулей функции $\varphi_{U_j}(z), z \in \mathbb{C}$.

Введем следующее условие на сл.в. X_j :

(iv) медиана сл.в. X_j равна нулю, а носитель ее распределения вероятностей не содержится ни в одном из множеств $\{za_{kj}\} \cap \mathbb{R}^1, \{za_{k,n+j}\} \cap \mathbb{R}^1$ для любого комплексного $z \neq 0$.

Сформулируем наш основной результат.

Теорема. Пусть сл.в. $U_j, j = 1, \dots, 2n$, удовлетворяют условиям (i)–(iii). Тогда, если формы M_1 и M_2 независимы, то для тех j , для которых сл.в. X_j удовлетворяют условию (iv), сл.в. X_j — нормальные, а сл.в. U_j, U_{n+j} п.н. постоянные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Darrois G. Analyse générale des liaisons stochastiques. — Rev. Inst. Intern. Statist., 1953, v. 21, p. 2–8.
2. Скитович В. П. Линейные формы от независимых случайных величин и нормальный закон распределения. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, т. 18, № 2, с. 185–200.
3. Зингер А. А., Линник Ю. В. Нелинейные статистики и случайные линейные формы. — Труды Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, III, 1970.
4. Каган А. М., Линник К. В., Рао С. Р. Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972, 656 с.

Plucińska A., Pluciński E. (Warsaw, Poland) Some distributions associated with Hermite polynomials. Let Y_0 be a Gaussian random variable (r.v.) $N(0, 1)$. Let H_n be an Hermite polynomial defined by

$$H_n(x) = e^{-x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}.$$

It is well known that for every natural n the mean value $E(H_n(Y_0)) = 0$ and $f_0(y) = (1/\sqrt{2\pi}) e^{-y^2/2}$ is the normalized weight function for Hermite OPS (orthogonal polynomial set).

We put the following questions: 1°) whether the condition

$$EH_n(Y) = 0, \quad n \geq n_0 > 2,$$

implies that Y has a Gaussian distribution, i.e., characterizes a Gaussian distribution; 2°) whether there exist various weight functions for some subsets of Hermite OPS (whether the measure of orthogonality is not unique for some subsets of OPS).

The properties of Hermite polynomials in random variables or in stochastic processes are subjects of many papers, for example, they are given in [2], [3]. In particular, Hermite polynomials in a Wiener process are called Wiener polynomial chaos.

The weight function (the density function) considered in the present paper is a special case of polynomial normal densities given for example in [1].

We define polynomials $\hat{H}_l$ in the following way:

$$\hat{H}_l(x) = e^{-x^2/2} \frac{d^l}{dx^l} e^{-x^2/2}.$$

It is evident that

$$\hat{H}_{2l}(ix) = i^{2l} H_{2l}(ix), \quad i^2 = -1.$$

Let X_l be a r.v. with a density

$$f_l(x) = \frac{(l)!}{(2l)! \sqrt{2\pi}} \hat{H}_{2l}(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = c_l \hat{H}_{2l}(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Proposition 1. The r.v. X_l has the following properties for $M = 1, 2, \dots$:

$$\mathbf{E}H_m(X_l) = \begin{cases} 0 & \text{for } m = 2M - 1, \\ 0 & \text{for } m > 2l, \\ \frac{l!}{(l-M)!} & \text{for } m = 2M, l \geq M, \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{E}H_m^2(X_l) = \begin{cases} m! \binom{l+m}{m} & \text{for } m < l, \\ m! \binom{m+l}{l} & \text{for } m \geq l, \end{cases} \quad (2)$$

$$\mathbf{E}\{H_n(X_l) H_m(X_l)\} = 0 \quad \text{for } m - n > 2l. \quad (3)$$

Proposition 2. Let Y_l be a r.v. such that $\mathbf{E}H_m(Y_l) = \mathbf{E}H_m(X_l)$, $m \geq 1$, then $Y_l \sim X_l$ (are identically distributed). In other words, condition (1) characterizes the distribution f_l .

Proposition 3. Let n_1, n_2 ($n_2 \geq 1$) be fixed natural numbers. The sequence $(H_{n_1+(2l+n_2)n})_{n \in \mathbf{N}}$ is an orthogonal polynomial set with the weight function f_v for every $v \leq l$.

If we put $h_n = H_{n_1+(2l+n_2)n}$, then $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ is an OPS and the degree of h_n is $n_1 + (2l + n_2)n$. The sequences $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ are subsequences of $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Proposition 4. The characteristic function φ_l of the r.v. X_l is given by the formula $\varphi_l(\xi) = (-2)^l \sqrt{2\pi} c_l H_{2l}(\xi/\sqrt{2}) e^{-\xi^2/2}$.

REFERENCES

1. Evans M., Swartz T. Distribution theory and inference for polynomial-normal densities. — Commun. in Statistics Theory and Methods, 1994, v. 23 (4), p. 1123–1148.
2. Kallianpur G. Stochastic Filtering Theory. New York: Springer-Verlag, 1980.
3. Revuz D., Yor M. Continuous martingales and Brownian motion. New York: Springer-Verlag, 1994.

Сапожников П. Н. (Пермь, Россия) Характеризация совокупностей распределением некоторых инвариантов.

В работе рассмотрена задача о возможности характеристики распределения исходной совокупности свойством независимости некоторого инварианта и эквивариантной аддитивной статистики.

Пусть X — однородное пространство связной группы Ли G , удовлетворяющей второй аксиоме счетности и действующей посредством левых сдвигов на X . Рассмотрим такое семейство распределений на измеримом пространстве $(X, \mathcal{B}_X)$, где $\mathcal{B}_X$ — σ -алгебра борелевских подмножеств, что каждая вероятностная мера семейства порождена сдвигом одной и той же меры. Если порождающее распределение абсолютно непрерывно относительно квазиинвариантной меры μ с модулярной функцией $\Delta(g)$ и ее функция плотности есть $f(x)$, то $\mathcal{F} = \{f(x|g) = f(g^{-1}x) \cdot \Delta(g), g \in G\}$ — соответствующее семейство плотностей. Предположим, что

- (1) существует невырожденное конечномерное представление группы G ;
- (2) матрица представления в некотором базисе $(1, \varphi^T(x), \ln h(x))$, $h(x) > 0$, имеет вид

$$V(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0^T & 0 \\ V_0(g) & V_1(g) & 0 \\ a_0(g) - \ln \Delta(g) & a_1(g) & 1 \end{bmatrix};$$

- (3) вектор функция $c(g)$ определяется уравнением $c^T(g) = a^T(g) + c^T V(g)$, где $V(g)$ — это матрица $V(g)$ без последнего столбца и последней строки и $c^T = (c_0, c_1^T)$ — вектор, удовлетворяющий условию:

$$\int_X \exp \{c_0 + c_1^T \varphi(x)\} h(x) d\mu(x) = 1.$$

Хорошо известно, что если $\varphi(x)$ — функция с m -компонентами класса $C^{(1)}(X)$, то при $n > m$ область значений τ_n функции $T_n(X_n) = \sum_{j=1}^n \varphi(x_j)$ имеет внутренние точки в $\mathbb{R}^m$.

- (4) Если G_0 — стационарная подгруппа плотности $f(x)$, то для любого t и фиксированного t_0 в $\text{Int}(\tau_n)$ уравнение $nV_0(g) + V_1(g)t = t_0$ имеет решение $\sigma_n(t)$, постоянное на левых смежных классах подгруппы G_0 и единственное с точностью до умножения на элементы подгруппы G_0 .

Теорема. Пусть X_n — выборка n независимых наблюдений из совокупности сдвигов $\xi = g\xi_0$ и выполнены следующие условия: 1) распределение ξ_0 является абсолютно непрерывным относительно меры μ с постоянным носителем X , 2) порождающая плотность $f(x)$ является функцией класса $C^{(1)}(X)$, 3) некоторые функции $\varphi(x)$ и $\ln h(x)$ совместно с тождественной константой образуют базис инвариантного пространства регулярного представления группы G и удовлетворяют предположениям (2)–(4). Тогда для некоторого фиксированного $k > m$, $n > m + k$, статистики $U_{k,n} = \sigma_n^{-1}(T_n(X_n))X_k$ и $T_n(X_n)$ независимы тогда и только тогда, когда ξ — экспонентная совокупность со структурными элементами $(c^T(g), \varphi(x), h(x))$.

Следствие. Если в условиях теоремы известна плотность распределения инварианта $U_{k,n}$ относительно произведения мер μ на произведении измеримых пространств $(X, \mathcal{B}_X)$, то $h(x)$ и c_1 определяются единственным образом.

Это следует из того, что плотность распределения инварианта $U_{k,n}$ может быть

$$H_{k,n}(u_k) \propto \begin{cases} \exp \left\{ -c^T \left(\sigma_{n-k} \left(t_0 - T_k(u_k) \right) \right) \begin{pmatrix} n-k \\ t_0 - T_k(u_k) \end{pmatrix} \right\} \times \\ \left| V \left(\sigma_{n-k} \left(t_0 - T_k(u_k) \right) \right) \right| \cdot \prod_{j=1}^k h(u_j), \quad t_0 - T_k(u_k) \in \tau_{n-k} \\ 0, \quad \text{в других случаях,} \end{cases}$$

если $f(x | g) = \exp\{c_0(g) + c_1^T(g) \varphi(x)\} h(x)$.

Первая часть теоремы, независимость указанных статистик и вид плотности распределения инварианта U_k можно найти в статье [1]. Обратное утверждение основано на следующем результате: пусть $\mathcal{F}$ — регулярное семейство сдвигов и условная плотность $p_{k,n}(X_k | t, g)$ статистики X_k при данном $T_n(X_n) = t$ не зависит от g , тогда эта условная плотность имеет вид $H_{k,n}(\sigma_n^{-1}(t) X_k) \Delta^k(\sigma_n(t))$, где $H_{k,n}(u_k)$ — плотность распределения инварианта $U_{k,n} = \sigma_n^{-1}(T_n(X_n)) X_k$. Из независимости, указанной в теореме, следует, что $f_k(X_k | g) p_{n-k}(t - T_k(X_k) | g) / p_n(t | g)$ — условная плотность статистики X_k при данном $T_n(X_n) = t$ не зависит от g . Следовательно она является несмещенной оценкой плотности $f_k(X_k | g)$. Поэтому эта плотность равна

$$\int_{\tau_n} \frac{f_k(X_k | e) p_{k,n}(t - T_k(X_k) | e)}{p_n(t | e)} p_n(t | g) dt,$$

и может быть представлена в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от аргумента X_k , а другая является функцией аргументов $T_k(X_k)$ и g .

Следовательно, $T_k(X_k)$ достаточна на основе выборки объема k . Отсюда следует, что исходное семейство является экспоненциальным ввиду предположения о его регулярности.

П р и м е р. Пусть $GL(p)$ группа $p \times p$ матриц с положительным определителем, G — группа преобразований, действующая в $\mathbf{R}^p$ по формуле $gx = \alpha + \beta x$, где $\alpha \in \mathbf{R}^p$ и $\beta \in GL(p)$. Пусть $\bar{X}_n$ и S_n^2 — выборочное среднее и выборочная ковариационная матрица на основе n независимых наблюдений. Если инвариант $U_{k,n} = (nS^2)^{-1/2}(X_k - \bar{X}_n)$ и статистика $T_n(X_n)$ независимы, то исходная совокупность нормальна с неизвестным средним и неизвестной ковариационной матрицей. В этом случае плотность распределения U_k равна

$$\pi^{-kp/2} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{p/2} \prod_{j=1}^p \frac{\Gamma((n-p+j-1)/2)}{\Gamma((n-k-p+j-1)/2)} \\ \times \left| E - \sum_{j=1}^k u_j u_j^T - \frac{1}{n-k} \left(\sum_{j=1}^k u_j \right) \left(\sum_{j=1}^k u_j \right)^T \right|^{(n-k-p-2)/2},$$

если матрица под знаком определителя положительно определена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Казан А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р. Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972.
2. Янушкявичус Р. Устойчивость характеристики вероятностных распределений. — Вильнюс: Мокслас, 1991, 248 с.
3. Sapozhnikov P. N. Algebraic methods in multidimensional analysis. — Proceeding of XVth Conference on Multivariate Statistical Analysis. Lodz, 1996, p. 165–176.

Тараскин А. Ф. (Самара, Россия) **О некоторых статистических задачах для стохастических дифференциальных уравнений.**

Рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ)

$$dX_t = a(t, X_0^t; \theta) dt + b(t, X_0^t) dw_t + \int_{|x|>1} x \mu(dt, dx) + \int_{|x|\leq 1} x(\mu - \nu)(dt, dx), \quad (1)$$

в котором w — стандартный винеровский процесс, b — известная вещественная функция, a — известная только с точностью до входящего в нее неизвестного параметра $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$ функция, причем допустимые значения параметра принадлежат открытому множеству $\Theta \in \mathbf{R}^d$; μ — пуассоновская мера в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, не зависящая от w , а ν — ее компенсатор. Предполагая наблюдаемым «отрезок» $X_0^T = \{X_s, 0 \leq s \leq T\}$ процесса X , будем рассматривать статистические задачи оценки параметра θ и проверки гипотез в асимптотической (при $T \rightarrow \infty$) постановке. Решения основываются на методе максимального правдоподобия (м.п.) с использованием имеющегося в [1] «отношения правдоподобия» и результатов о предельных распределениях стохастических интегралов [2]. Некоторые результаты для процессов, являющихся решениями уравнения (1), сообщались в [3]. Особенность предлагаемых здесь результатов состоит в том, что они допускают, вообще говоря, негауссовские асимптотики. Мы приведем некоторые из полученных результатов.

При проверке гипотез методом м.п., как известно, необходимо знать распределение (или асимптотику распределения) отношения правдоподобия. В связи с этим необходимо ввести некоторые предположения и обозначения. Будем предполагать, что: 1) для всех $\theta \in \Theta$ начальное значение процесса X_0 имеет одно и то же распределение; 2) для любых двух $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ меры $\nu(\cdot, \cdot; \theta_i)$, $i = 1, 2$, взаимно абсолютно непрерывны, причем $\nu(dt, dy; \theta_2) = Y(t, y; \theta_2) \nu(dt, dy; \theta_1)$; 3) для любого $\theta \in \Theta$ функции a, b таковы, что существует и единственно решение уравнения (1) на любом промежутке $[0, t]$; 4) для любых двух $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ меры μ_{θ_i} , $i = 1, 2$, локально взаимно абсолютно непрерывны. Формулу для плотности $d\mu_{\theta_2}^t/d\mu_{\theta_1}^t$, рассматриваемой в качестве отношения правдоподобия, можно найти в [1]. Положим $\Lambda_t(\theta_2) = \ln(d\mu_{\theta_2}^t/d\mu_{\theta_1}^t)$; $c(s, x; \theta_2) ds = a(s, x; \theta_2) ds - a(s, x; \theta_1) ds - \int_{|y| \leq 1} y(Y(s, y; \theta_2) - 1) \nu(ds, dy; \theta_1)$. Через I_A будем обозначать индикатор множества A .

Теорема 1. Пусть существует неубывающая функция $a_t^2 \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ и функции ограниченной вариации $K_j(x)$, $j = 1, 2$, такие, что при $t \rightarrow \infty$ в точках непрерывности функции $K_j(x)$

$$I_{R_+}(x) a_t^2 \left(\int_0^t b^{-2}(s, X_s) c^2(s, X_s; \theta_2) ds + \int_0^t \int_R \left| \ln Y(s, y; \theta_2) \right|^2 I_{\{\ln Y(s, y; \theta_2) < (-1)^{j+1} x a_t\}} \nu(ds, dy; \theta_j) \right) \xrightarrow{P} K_j(x),$$

если верна гипотеза H_j : $\theta = \theta_j$. Тогда распределение величины $\Lambda_t(\theta_2)$ асимптотически безгранично делимо с характеристической функцией (х.ф.)

$$\varphi_j(\lambda; t) = \exp \left\{ (-1)^j \frac{i \lambda a_t^2}{2} \int (e^x - 1 - x) dK_j(x) + a_t^2 \int (e^{i \lambda x} - 1 - i \lambda x) x^{-2} dK_j(x) \right\}.$$

Пусть θ_0 — некоторое «опорное» значение параметра из $\Theta \subset \mathbf{R}$ и $\Lambda_t(\theta) = \ln(d\mu_{\theta}^t/d\mu_{\theta_0}^t)$. Предположим, что функции $a(s, x; \theta)$ и $Y(s, x; \theta)$ достаточно гладкие по θ . Тогда будет существовать производная $\partial \Lambda_t(\theta)/\partial \theta$, называемая информантом и играющая, как известно, важную роль в изучении свойств оценок м.п. В формулируемых ниже предложениях для краткости будут опускаться аргументы у некоторых функций.

Теорема 2. Пусть θ — истинное значение параметра и существует неубывающая функция $a_t^2 \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ и неубывающая функция ограниченной вариации $K(x; \theta)$ такие, что в каждой точке непрерывности функции $K(x; \theta)$

$$a_t^{-2} \left(\int_0^t \int_R \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln Y \right)^2 I_{\{\frac{\partial}{\partial \theta} \ln Y < x a_t\}} \nu(ds, dy; \theta) \right)$$

$$+ I_{R+}(x) \int_0^t \left(b \frac{\partial c}{\partial \theta} \right)^2 ds \xrightarrow{P} K(x; \theta).$$

Тогда распределение величины $a_t^{-1}(\partial \Lambda_t(\theta)/\partial \theta)$ при $t \rightarrow \infty$ слабо сходится к безгранично делимому закону с т.ф.

$$\varphi(\lambda) = \exp \left\{ \int \left(e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x \right) x^{-2} dK(x; \theta) \right\}. \quad (2)$$

Под оценкой м.п. понимается корень $\tilde{\theta}_t$ уравнения $\partial \Lambda_t(\theta)/\partial \theta = 0$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2 и величины

$$a_t^{-2} \int_0^t \int_R \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln Y \right)^3 \nu(ds, dy; \theta),$$

$$a_t^{-2} \int_0^t \int_R \left(\frac{\partial^r}{\partial \theta^r} \ln Y \right)^2 \nu(ds, dy; \theta), \quad r = 2, 3,$$

ограничены равномерно по $\theta \in \Theta$, а величины

$$a_t^{-2} \int_0^t \left(b \frac{\partial^r c}{\partial \theta^r} \right)^2 ds, \quad r = 2, 3,$$

стохастически ограничены равномерно по $\theta \in \Theta$. Тогда существует состоятельная оценка м.п. $\tilde{\theta}_t$ параметра θ ; величина $a_t \sigma^2(\theta)(\tilde{\theta}_t - \theta)$, где $\sigma^2(\theta) = K(+\infty, \theta)$, асимптотически безгранично делима с т.ф., задаваемой формулой (2).

В заключение отметим, что полученные здесь результаты для одномерного процесса обобщаются на случай векторных процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гизман И. И., Скороход А. В. О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах. — Успехи матем. наук, 1966, т. 21, в. 6 (132), с. 83–152.
2. Тараскин А. Ф. Центральная предельная теорема для стохастических интегралов. — Сб. Теория случайных процессов, Киев, 1984, в. 12, с. 149–163.
3. Тараскин А. Ф. Статистические выводы о сигналах в условиях марковских помех. — Третий Международный симпозиум по теории информации. Тезисы докл., ч. 1, М.–Таллин, 1973, с. 121–124.

Учайкин В. В., Коробко Д. А. (Ульяновск, Россия) О распределении глобальной массовой плотности фрактальной вселенной.

Показано, что для распределения точек с фрактальной размерностью D и случайными взаимно независимыми массами m_i с общей плотностью $p(m) \sim \alpha A m^{-\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$, глобальная массовая плотность имеет невырожденное предельное ($R \rightarrow \infty$) распределение только при условии $D = 3\alpha$. Это распределение выражается через односторонний устойчивый закон с характеристическим показателем α .

Гипотеза о фрактальной структуре вселенной [1] базируется на предположении, что наблюдаемая в доступной области зависимость

$$N(R) = CR^D, \quad D < 3, \quad (1)$$

описывающая число объектов (галактик) внутри сферы радиуса R с центром в любом из них, справедлива для всех R , начиная с некоторого значения R_0 . В [1] рассматривается детерминированная модель фрактала, но более естественной представляется стохастическая модель, одним из способов построения которой является алгоритм Б. Мандельброта, основанный на блужданиях Леви [2]. В этом подходе $N(R)$ есть случайная величина, а определяющее фрактал соотношение (1) принимает вид

$$\langle N(R) \rangle = CR^D. \quad (2)$$

Нами показано, что нормированная случайная переменная $\zeta = N(R)/\langle N(R) \rangle$ при $R \rightarrow \infty$ имеет предельное распределение с плотностью $p_\zeta(z) = Bz^{\lambda-1}e^{-\lambda z}$, где λ слабо зависящий от фрактальной размерности D параметр.

Важнейшей космологической характеристикой вселенной является глобальная плотность,

$$\langle \rho \rangle = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\langle M(R) \rangle}{V(R)},$$

где $M(R) = \sum_{i=1}^{N(R)} m_i$, — масса вещества в трехмерном шаре радиуса R , а $V(R)$ — объем шара. Полагая, что m_i — случайные независимые массы объектов с общей плотностью распределения $p(m)$, нетрудно видеть, что в моделях фрактального типа $\langle \rho \rangle = 0$, если, конечно, $\langle m \rangle < \infty$. Этот факт принято считать специфической особенностью фрактальной модели [3].

В настоящей работе показано, что в случае, когда $p(m) \sim \alpha A m^{-1-\alpha}$, $m \rightarrow \infty$, остается возможность сохранения положительной глобальной плотности, но уже как случайной величины с плотностью $p_\rho(x)$. Для этого необходимо выполнение соотношения

$$\alpha = \frac{D}{3}. \quad (3)$$

Результаты астрономических измерений размерности D по пространственным корреляциям и показателя α по распределению светимостей не исключают условия (3) с $\alpha \in (0, 1)$.

Предельное распределение $p_\rho(x)$ в случае детерминированного фрактала описывается односторонним устойчивым законом с показателем α

$$p_\rho(x) = \left(\frac{1}{x_0} \right) p^{(\alpha, 1)} \left(\frac{x}{x_0} \right),$$

а в случае стохастического фрактала Леви-Мандельброта выражается через него соотношением

$$p_\rho(x) = \left(\frac{1}{x_0} \right) \int_0^\infty z^{-1/\alpha} p^{(\alpha, 1)} \left(\frac{z^{-1/\alpha} x}{x_0} \right) p_\zeta(z) dz,$$

где $x_0 = 3[\text{ACT}(1 - \alpha) \cos(\alpha\pi/2)]^{1/\alpha}/(4\pi)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Coleman P. H., Pietronero L. The fractal structure of the Universe. — Phys. Rep., 1992, v. 213, № 6, p. 311–389.
2. Mandelbrot B. B. The fractal geometry of nature. New York: Freeman, 1983.
3. Ribeiro M. B. Relativistic fractal cosmologies. — Proceedings of the NATO advanced research workshop on deterministic chaos in general relativity. /Eds. D. W. Hobill et al., Canada, 1993.

Fazekas I. (Debrecen, Hungary), Kukush A. (Ukraine, Kiev) **Asymptotic properties of estimators in nonlinear functional errors-in-variables models with dependent error terms.**

Throughout the paper the following model will be considered

$$y_i = g(\xi_i, \beta_0) + \sigma \delta_i, \quad (1)$$

$$x_i = \xi_i + \sigma \varepsilon_i, \quad (2)$$

$i = 1, 2, \dots$, where design points $\xi_1, \xi_2, \dots$ are nonstochastic but not observed, y_i, x_i are observed, ε_i, δ_i are (nonobserved) random error terms, β_0 is the true value of the unknown parameter β to be estimated.

Suppose that the parameter set is p -dimensional: $\beta_0 \in \Theta \subset \mathbf{R}^p$, $x_i, \xi_i, \varepsilon_i$ are q -dimensional vectors, y_i, δ_i are scalars ($i = 1, 2, \dots$), $g: \mathbf{R}^q \tilde{S} \Theta \rightarrow \mathbf{R}$ is a known function, and $\sigma > 0$.

The least squares estimator of β minimizes the function

$$Q(\beta) = Q_n(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \min_{\xi \in \mathbf{R}^q} \left[(y_i - g(\xi, \beta))^2 + \|x_i - \xi\|^2 \right], \quad \beta \in \Theta. \quad (3)$$

Let $\hat{\beta} = \hat{\beta}_n$ be the minimum point of function $Q_n(\beta)$ in Θ .

Consider the following assumptions and notation:

$$(I\delta) \quad \mathbf{E} \delta_i = 0, \quad \mathbf{E} \delta_i^2 = \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$(I\varepsilon) \quad \mathbf{E} \varepsilon_i = 0, \quad \mathbf{E} \varepsilon_i \varepsilon_i^T = D_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$(I\varepsilon\delta) \quad \mathbf{E} \varepsilon_i \delta_i = s_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$(Iu) \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{i \geq 1} \mathbf{E}(\|\varepsilon_i\|^4 I\{\|\varepsilon_i\| \geq c\}) = 0 \text{ and } \lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{i \geq 1} \mathbf{E}(|\delta_i|^4 I\{|\delta_i| \geq c\}) = 0.$$

We shall use mixing condition for the dependence structure of the compound sequence $\{\varepsilon_i, \delta_i\}$. If $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are σ -algebras, then let

$$\varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} |\mathbf{P}(B | A) - \mathbf{P}(B)|.$$

Let $\mathcal{M}_k^l$ denote the σ -algebra generated by the random variables $\{(\varepsilon_i, \delta_i): k \leq i \leq l\}$.

Let $\varphi(n) = \sup_{1 \leq k < \infty} \varphi(\mathcal{M}_1^k, \mathcal{M}_{k+n}^\infty)$;

$$(I\varphi) \quad \sum_{k=1}^\infty \varphi^{1/2}(k) < \infty;$$

(I1) the parameter set Θ is compact and β_0 is in the interior of Θ ;

(I2) the set $\{\xi_i: i = 1, 2, \dots\}$ is bounded.

The function g is three times continuously differentiable:

(I3) $g \in C^3(\mathbf{R}^q \tilde{S} U)$ for some open set U with $U \supseteq \Theta$.

Now we shall consider derivatives of g at point (ξ_i, β_0) , but for the sake of brevity we omit arguments (e.g., g'_1 denotes the partial derivative of g according to the first variable at point (ξ_i, β_0)). Let $H_i = g_1'^T g_1' + I$,

$$H_{i*}^{-1} = (1 + \|g_1'\|^2)^{-1} = 1 - g_1' H_i^{-1} g_1'^T,$$

and

$$S_i = \sigma_i^2 g_1'^T g_1' + g_1'^T s_i^T + D_i + s_i g_1'.$$

Let

$$\tilde{k}_i = \text{trace}(H_i^{-1} S_i H_i^{-1} g_{11}'') H_{i*}^{-1} g_2' + 2[g_1' H_i^{-1} (D_i - \sigma_i^2 I + s_i g_1') - H_{i*}^{-1} s_i^T]$$

$$\tilde{S} H_i^{-1} (g_{21}'' - g_{11}' H_i^{-1} g_1'^T g_2').$$

We need assumptions on $K_n = \|\tilde{K}_n\|$, where $\tilde{K}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n \tilde{k}_i$.

Let (IK) $\liminf_{n \rightarrow \infty} K_n > 0$.

The following theorem includes inconsistency of the least squares estimator.

Theorem. Suppose that for the model (1)–(2) assumptions (I δ), (I ε), (I $\varepsilon\delta$), (I μ), (I φ), (I1), (I2), (I3), and (IK) are satisfied. Then for each $\varepsilon > 0$ there exist $\tau > 0$ and $\sigma_0 > 0$ such that for any $\sigma \in (0, \sigma_0]$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(\|\tilde{\beta}_n - \beta_0\| > \sigma^2 \tau) > 1 - \varepsilon.$$

Fazekas I. (Debrecen, Hungary), **Lauridsen J.** (Odense, Denmark). **On the Lagrange multiplier test for spatial correlation in econometric models.**

The Lagrange multiplier test for spatially correlated dependent variables is studied. It is shown that if some moments of the disturbance term mimic moments of the normal distribution, then the asymptotic $\chi^2(1)$ distribution remains valid.

Consider the following model

$$y = \varrho W y + X \beta + \varepsilon, \quad (1)$$

where y is the $n \times 1$ vector of dependent variables (i.e., the vector of observations), X is the $n \times s$ matrix of explanatory variables (known and nonrandom matrix), ε is the $n \times 1$ vector of disturbances (nonobservable), W is an $n \times n$ spatial weight matrix, ϱ is a scalar parameter, and β is an $s \times 1$ vector parameter. In our approach s is fixed and $n \rightarrow \infty$. The spatial weight matrix W is a known deterministic matrix having nonnegative elements, moreover zeros stand in its main diagonal. When constructing the test statistic we shall suppose that the coordinates of $\varepsilon^\top = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ are i.i.d. normal with $E\varepsilon_1 = 0$, $E\varepsilon_1^2 = \sigma^2$.

We are interested in testing hypotheses $H_0: \varrho = 0$, $H_1: \varrho \neq 0$. Under H_0 the maximum likelihood estimators are the following:

$$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top y, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{y^\top (I - C) y}{n}, \quad (2)$$

where $C = X(X^\top X)^{-1} X^\top$, and « $\top$ » denotes transpose. Let $\hat{F} = y^\top (I - C) W y$, $D = \beta^\top X^\top W^\top (I - C) W X \beta$, $\hat{D} = \hat{\beta}^\top X^\top W^\top (I - C) W X \hat{\beta}$, and $T_{11} = \text{trace}(W^\top W + W W)$.

Then the Lagrange multiplier test statistic (see [1]) is

$$L_n = \frac{(\hat{F})^2 / (\hat{\sigma}^2)^2}{\hat{D} / \hat{\sigma}^2 + T_{11}}.$$

Consider the following decomposition of the numerator of the test statistic

$$\hat{F} = \varepsilon^\top (I - C) W \varepsilon + \varepsilon^\top (I - C) W X \beta = S + L,$$

where $S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j$ is a quadratic form and $L = \sum_{i=1}^n b_i \varepsilon_i$ is a linear form of ε . Divide index set $\mathcal{G} = \{1, \dots, n\}$ into t pairwise disjoint subsets:

$$\mathcal{G} = \bigcup_{l=1}^t \mathcal{G}_l, \quad (3)$$

where $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_t$ vary with n . Let $S_l = \sum_{i,j \in \mathcal{G}_l} a_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j$, $L_l = \sum_{i \in \mathcal{G}_l} b_i \varepsilon_i$, $l = 1, \dots, t$. Consider

$$\begin{aligned} \|S\|^2 &= \sum_{i,j \in \mathcal{G}} \tilde{a}_{ij}^2 \sigma^4, \quad \|S_l\|^2 = \sum_{i,j \in \mathcal{G}_l} \tilde{a}_{ij}^2 \sigma^4, \\ \|L\|^2 &= \sum_{i \in \mathcal{G}} b_i^2 \sigma^2, \quad \|L_l\|^2 = \sum_{i \in \mathcal{G}_l} b_i^2 \sigma^2, \end{aligned} \quad (4)$$

for $l = 1, \dots, t$, where $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij} + a_{ji})/2$ are the elements of the symmetrized matrix.

Although when we apply the test we do not assume normality, the asymptotic distribution is χ^2 .

Theorem. Suppose that in the model (1) for $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^\top$ the following holds: $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ are i.i.d., $E\varepsilon_1 = 0$, $E\varepsilon_1^2 = \sigma^2$, $E\varepsilon_1^3 = 0$, $E\varepsilon_1^4 = 3\sigma^4$, and $E|\varepsilon_1|^{4+2\delta} < \infty$ for some $\delta > 0$. Assume that $(X^\top X)$ is invertible, $\lim_{n \rightarrow \infty} (X^\top X)^{-1} = 0$, and conditions

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\text{trace}(CW))^2}{D + \sigma^2 T_{11}} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D + \sigma^2 \text{trace}(W^\top (I - C)W + (I - C)W(I - C)W)}{D + \sigma^2 T_{11}} &= 1, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|X^\top W^\top (I - C)WX\|}{D + \sigma^2 T_{11}} &< \infty \end{aligned}$$

are satisfied. Assume that there exists a decomposition (3) such that for the quantities defined in (4) conditions

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S\|^2 - \sum_{l=1}^t \|S_l\|^2}{\sum_{l=1}^t (\|S_l\|^2 + \|L_l\|^2)} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{l=1}^t (\|S_l\|^{2+\delta} + \|L_l\|^{2+\delta})}{(\sum_{l=1}^t (\|S_l\|^2 + \|L_l\|^2))^{\frac{2+\delta}{2}}} &= 0. \end{aligned}$$

are satisfied. If in model (1) $\rho = 0$ and quantities (2) are used for estimation, then $L_n \Rightarrow \chi^2(1)$ in distribution as $n \rightarrow \infty$.

The proof is based on methods of [2]. Theoretical and simulation examples support the above result for regular regional patterns.

REFERENCES

1. Anselin L. Lagrange multiplier test diagnostics for spatial dependence and spatial heterogeneity. — *Geographical Anal.*, 1988, v. 20, p. 1–17.
2. Whittle P. On the convergence to normality of quadratic forms in independent variables. — *Theory Probab. Appl.*, 1964, v. 9, p. 103–108.

Fazekas I. (Debrecen, Hungary), **Chuprunov A.** (Kazan, Tatarstan, Russia)
Convergence of random step lines to weighted Wiener processes.

We deal with random step lines processes defined by sums of i.i.d. random variables multiplied by independent indicators. These processes describe some models in which random variables are replaced by another ones. We prove the convergence in distribution of such processes to the weighted Wiener process. In [2], another type of the method

of replacement is considered and a functional limit theorem with an Ornstein-Uhlenbeck limit process is proved. Our results are analogous to Rusakov's one.

We will denote by $\xrightarrow{d}$ the convergence in distribution and by $W(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, a Wiener process. Let I_A denote the indicator of an event A .

Throughout the paper $m \in \mathbb{N}$ is fixed, $k > m$, $A_{ij} = A_{ij}(k)$, $A'_{ij} = A'_{ij}(k)$, $i, j, k \in \mathbb{N}$, are events, and $I_{ij} = I_{ij}(k) = I_{A_{ij}(k)}$, $I'_{ij} = I'_{ij}(k) = I_{A'_{ij}(k)}$.

To define and study our processes we need the following conditions and notation:

(Y) Let Y, Y_i , $i \in \mathbb{N}$ and Y', Y'_i , $i \in \mathbb{N}$, be two sequences of i.i.d. random variables such that $EY' = EY = 0$, $EY^2 = \sigma^2 < \infty$, $EY'^2 = \sigma_1^2 < \infty$, and Y_i, Y'_i , $i \in \mathbb{N}$ are independent random variables.

(I) For any fixed $k \in \mathbb{N}$, let $\{Y'_i, Y_i, I_{ij}(k), I'_{ij}(k), i, j = 1, 2, \dots\}$ be independent random variables.

Now we introduce the random processes to be considered. We start with the k summands of Y_i and in each step we change m summands for new random variables Y'_i . More precisely, let

$$\begin{aligned} X_0^{(k)} &= k^{-1/2} \sum_{i=1}^k i^{-1} Y_i, \\ X_1^{(k)} &= k^{-1/2} \left\{ \sum_{i=1}^k I_{1i}(k) Y_i + \sum_{i=1}^m Y'_i \right\}, \\ X_2^{(k)} &= k^{-1/2} \left\{ \sum_{i=1}^k I_{2i}(k) I_{1i}(k) Y_i + \sum_{i=1}^m I'_{2i}(k) Y'_i + \sum_{i=m+1}^{2m} Y'_i \right\}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (X)$$

and

$$\begin{aligned} X_k^{(k)} &= k^{-1/2} \left\{ \sum_{i=1}^k I_{ki}(k) I_{(k-1)i}(k) \cdots I_{1i}(k) Y_i + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{k-1} \sum_{i=(n-1)m+1}^{nm} I'_{ki}(k) I'_{(k-1)i}(k) \cdots I'_{(n+1)i}(k) Y'_i + \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} Y'_i \right\}. \end{aligned}$$

We will consider the following random processes:

$$Z_k(x) = X_{[kx]}^{(k)}, \quad x \in [0, 1], \quad k \in \mathbb{N}. \quad (Z)$$

Theorem 1. Suppose that (Y) and (I) are satisfied.

(1) Let

$$P(A_{ij}(k)) = P(A'_{ij}(k)) = 1 - \frac{m}{k}, \quad i, j, k \in \mathbb{N}.$$

Then for the processes defined by (X) and (Z) we have

$$Z_k \xrightarrow{d} e^{-mx} W(\sigma^2 e^{mx} + \sigma_1^2 (e^{mx} - 1)), \quad k \rightarrow \infty,$$

in $D[0, 1]$.

(2) Let

$$P(A_{ij}(k)) = P(A'_{ij}(k)) = 1 - \frac{m}{k + (j-1)m}, \quad i, j, k \in \mathbb{N}.$$

Then for the process defined by (X) and (Z) we have

$$Z_k \xrightarrow{d} \frac{1}{1+xm} W(\sigma^2(1+xm) + \sigma_1^2(1+xm)\ln(1+xm)), \quad k \rightarrow \infty,$$

in $D[0, 1]$.

Observe that the random processes Z_k have the nature of AR-processes. (See, for example, [1] about AR-processes.) The sums in the definition of $X_1^{(k)}$ may be considered as a generalization of the sums with random index of summing. Thus, Theorem 1 may be viewed as a functional limit theorem for random step lines defined by special random sums. (See, for example, [3] about limit theorems for random sums.)

The processes Z_k describe some models in the theory of discrete probabilities.

REFERENCES

1. Arato M. Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. Statistical Approach. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
2. Rusakov O. V. A functional limit theorem for random variables with strong remaining dependence. — Theor. Probab. Appl., 1995, v. 40, p. 813–832 (in Russian).
3. Kruglov V. M., Korolev V. Yu. Limit Theorems for Random Sums. Moscow University Press, Moscow, 1990 (in Russian).

Hazod W. (Dortmund, Germany) Some new limit theorems for vector space and group-valued random variables.

The starting point of our considerations is the generalization of a theorem due to H. Cramér saying that random variables converging in distribution may be perturbed by sequences of random variables converging in probability to zero without changing the limit behaviour. This simple observation is used in the sequel to generalize some well-known limit theorems for $\mathbf{R}$ -valued random variables to limit laws for random variables taking values in a finite dimensional vector space $\mathbf{E}$ or in a (simply connected nilpotent Lie-) group $\mathbf{G}$.

First it is shown that weakly convergent sums (products) of normalized i.i.d. random variables are mixing in the sense of A. Rényi, whence — in analogy to the real line (cf., e.g., [3] — limit theorems for random sums (products) follow, without assuming the random times T_n to be independent from the space variables X_i . For these limit theorems we assume the random times to be multiples of a discrete random variable D .

We also obtain sharper results under restrictive assumptions on the normalizing operators: generalizing the random central limit theorem of A. Rényi [4] we prove random limit theorems for more general random times T_n — we assume $T_n/k(n) \Rightarrow D$ now, where « $\Rightarrow$ » means convergence in probability — for X_i in the domain of normal attraction of strictly operator (semi-) stable laws on vector spaces or on groups. The proof follows the ideas of [4] and relies on Cramér's theorem and on a Lévy- inequality for group-valued random variables. The main result, Theorem formulated below, seems to be new even for $\mathbf{R}$.

Let $t > 0$, $E \in \text{End}(\mathbf{E})$. Then $t^E := \exp(\log(t)E)$. Note that $t \mapsto t^E$ is continuous and $(ts)^E = t^E s^E$, $t, s > 0$. A continuous convolution semigroup $(\mu^t)_{t \geq 0}$ with $\mu^1 = \mu$ is called strictly stable if for some one-parameter group $(t^E)_{t > 0} \subseteq GL(\mathbf{E})$ we have the relation $t^E \mu^s = \mu^{ts}$, $s, t > 0$. (μ^t) is strictly semistable with respect to $(A, c) \in GL(\mathbf{E}) \times \mathbf{R}_+^\times$ if $A(\mu^t) = \mu^{ct}$ for $t \geq 0$. Strict (semi-) stability for probabilities on groups is defined analogously, replacing (t^E) by a one-parameter group $(\tau_t) \subseteq \text{Aut}(\mathbf{G})$. An observation of Chorny [2] allows to define «exponents» E also for operator semistable laws. Hence in the

domain of normal semistable attraction the normalizing operators A_n may be assumed to have the form $A_n = k(n)^{-E}$, where $k(n+1)/k(n) \rightarrow c \geq 1$.

Theorem. a) Let (X_n) be an i.i.d. sequence of E -valued random variables with distribution ν , let $a \in E$, let E be an «exponent». Consider the scheme $Z_n := n^{-E} \sum_{i=1}^n (X_i - a)$, $n \geq 1$, and assume for some subsequence $k(n) \uparrow \infty$ and $\lambda := \nu * \varepsilon_{-a}$ that $Z_{k(n)}(P) = k(n)^{-E} \lambda^{k(n)} \rightarrow \mu$ («deterministic limit»).

Let T_n be random times such that $T_n/k(n) \Rightarrow D$, a discrete strictly positive random variable.

Then the distributions $Z_{T_n}(P)$ converge weakly. And the limit λ is representable as $\lambda = \int_0^\infty t^{-E} \mu^t d\delta(t)$, where $\delta = D(P)$ is the distribution of D .

b) The assertion can be generalized straightforward to simply connected nilpotent Lie groups if we assume $k(n)^{-E} \lambda^{[k(n)t]} \rightarrow \mu^t$, $t \geq 0$.

c) **The semi-stable case.** If $k(n+1)/k(n) \rightarrow c > 1$ and $\mu \neq \varepsilon_0$ (resp. $\neq \varepsilon_e$), then (μ^t) is semi-stable, thus $c^{-E} \mu^t = \mu^{t/c}$ for $t > 0$. Hence the function $f: t \mapsto t^{-E} \mu^t$ fulfils $f(ct) = f(t)$. Therefore $\lambda = \int_0^\infty t^{-E} \mu^t d\delta(t) = \int_1^c t^{-E} \mu^t d\delta'(t)$, for $\delta' \in \mathcal{M}^1([1, c])$.

d) **The stable case.** If $k(n+1)/k(n) \rightarrow 1$ and $\mu \neq \varepsilon_0$ [resp. $\neq \varepsilon_e$], then (μ^t) is stable, thus $t^{-E} \mu^t = \mu^1 = \mu$ for all $t > 0$. Hence $\lambda = \mu$ in this case, i.e., the deterministic and the randomized limit coincide.

Hence the stable case is the natural generalization of the random CLT in [4]. Note that the limit there is Gaussian, hence stable.

Of course, there exist various generalizations and improved versions of the random limit theorems mentioned above for $\mathbf{R}$ -valued random variables. E.g. in [5] and [1] the random CLT of [4] is proved under the assumption $T_n/n \Rightarrow T$, where $T > 0$ need not to be discrete. But it seems not to be so easy to translate the proofs to vector spaces and to groups.

REFERENCES

1. Blum J. R., Hanson D. L., Rosenblatt J. I. On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables. — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1962, v. 1, p. 389–393.
2. Чорны В. Операторно полуустойчивые распределения на $\mathbf{R}^d$. — Теория вероятн. и ее применен., 1986, т. 31, в. 4, с. 795–797.
3. Rényi A. Wahrscheinlichkeitsrechnung. VEB, 1977.
4. Rényi A. On the central limit behaviour of products of a random number of group valued i.i.d. random variables. — Acta Math. Acad. Sc. Hung., 1960, v. 11, p. 97–102.
5. Moggyoródy J. A central limit theorem for sums of a random number of random variables. — Ann. Univ. Sci. Budapest., 1967, v. 10, p. 171–182.

Heyer H. (Tübingen, Germany) **Infinitely divisible and stable statistical experiments.**

The purpose of the present contribution to the theory of comparison of statistical experiments is two-fold: to describe in a somewhat direct way the functional-analytic approach to the central limit theorem for experiments in terms of infinitesimal triangular arrays, and at the same time to emphasize the application of an indisputable definition of Poisson experiments. Since the text has been conceived as a manuscript supporting a talk the exposition is motivated by a gradually enriched discussion of two standard examples of the theory. According to its purpose the sections of the paper refer to the problem of repeating experiments, to the formalism of convergence of experiments, to the tools which are conical measures and Hellinger transforms, and to the result containing a structural

characterization of infinitely divisible experiments. In the concluding section the useful subclass of stable experiments are introduced.

Sharma V. (Bangalore, India), Kuri J. (Montreal, Canada) Stability and continuity of rate-based feedback controlled ATM networks.

Introduction. Recently in ATM forum a new service category, Available Bit Rate (ABR) for data traffic has been announced. Since then various versions of this are being extensively studied. However, no queueing model (in the usual sense) has been studied till now. In [1] we have formulated a queueing model of it and obtained ergodicity, rates of convergence and several algorithms to obtain various performance indices. Our model is very general and includes Enhanced Proportional Rate Control Algorithm (ERPCA) and the more recently proposed explicit rate feedback schemes. In this paper we summarize the results of [1].

The basic model: stability and continuity. The simplest queueing model studied in [1] is a single server queue with two input sources. Source 2 provides a Poisson arrival stream with rate λ representing the superposition of various controlled and uncontrolled sources. Source 1 is an ABR source whose Poisson input rate is controlled by the feedback information obtained at the source regarding the queue length or the total work-load at the queue at the instants $n\tau$, $n \geq 1$. The service distributions of both sources are i.i.d. with general distributions, $s(i)$, $i = 1, 2$, being the generic service time of the source i . The arrival rate of the ABR source is λ_n during the time interval $[n\tau, (n+1)\tau]$ and is defined as $\lambda_n = f(V(n\tau), \lambda_{n-1})$, where $V(n\tau)$ is the total work-load at the queue at time $n\tau$ and f is an appropriately defined function (we will write $V_n = V(n\tau)$).

To prove ergodicity of $\{(V(n\tau), \lambda_{n-1}), n \geq 1\}$ we make

Assumption A. (i) There are $N_1, \bar{\lambda}_1$ such that if $V_n = 0, V_{n+1} = 0, \dots, V_{n+N_1} = 0$, then $\lambda_{n+N_1} = \bar{\lambda}_1$ for any λ_{n-1} .

(ii) There is an $\bar{\lambda} \geq 0$ such that $\lambda_n \leq \bar{\lambda}$ for all n .

(iii) There are $\bar{N} \geq 0$ and $N_2 \geq 0$ such that if $V_n > \bar{N}, V_{n+1} > \bar{N}, \dots, V_{n+m} > \bar{N}$ for $m \geq N_1$, then $\lambda_{n+m} \leq \bar{\lambda}_2$ where $\bar{\lambda}_2$ satisfies $\bar{\lambda}_2 E\{s(1)\} + \lambda E\{s(2)\} < 1$.

Assumption A is quite general and satisfied by all the algorithms proposed in ATM forum.

Theorem 1. Let assumption A be satisfied. Then $\{(V_n, \lambda_{n-1})\}$ has a unique stationary distribution and starting from any initial conditions, the system will converge in total variation to the stationary distribution.

If we assume that $E\{s(i)^m\} < \infty$, $i = 1, 2$, $m > 1$, then we obtain $n^{m-1} \|(V_n, \lambda_{n-1}) - \pi\| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ where $\|\cdot\|$ denotes the total variation norm and π the stationary distribution. Then we also obtain $E_\pi\{(V_n)^{m-1}\} < \infty$. Taking $m \geq 4$ provides us with central limit theorem for $\{V_n\}$.

Two specific examples of the controlled policy considered in the literature are (i) $\lambda_n = \lambda_{n-1} + \Delta_1$ if $V_n < N_0 - \delta$, $\lambda_n = \lambda_{n-1}$ if $V_n \in [N_0 - \delta, N_0 + \delta]$, $\lambda_n = \lambda_{n-1} - \Delta_2$ if $V_n > N_0 + \delta$, where $N_0, \delta, \Delta_1, \Delta_2$ are an appropriately defined positive constants; (ii) $\lambda_n = \bar{\lambda} + \Delta_1$ if $V_n < N_0 - \delta$, $\lambda_n = \bar{\lambda}$ if $V_n \in [N_0 - \delta, N_0 + \delta]$, $\lambda_n = \bar{\lambda} - \Delta_2$ if $V_n > N_0 + \delta$, where $N_0, \delta, \Delta_1, \Delta_2, \bar{\lambda}$ are appropriately defined.

In example (ii) by taking $\bar{\lambda}$ to be a rate which optimizes $P_\pi\{V_n \in [N_0 - \delta, N_0 + \delta]\}$ and $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ we obtain the optimal open loop policy maximizing $P_\pi\{V_n \in [N_0 - \delta, N_0 + \delta]\}$. We have shown that if $T = 0$, taking $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$ in example (ii) provides a feedback policy which performs better with respect to this cost function. This cost function has several desirable features and has been extensively studied in literature.

For the special case of $\lambda_n = f(V_n)$ policies, we have the following continuity result: consider a sequence of queues indexed by m and the corresponding system parameters

as $T_m, V^m(t)$ (denotes work-load at time t), $\lambda^m, s^m(i)$, $i = 1, 2$. A weak convergence in $D[0, \infty)$ is denoted by $\Rightarrow$.

Theorem 2. If $V^m(0) \Rightarrow V(0)$, f is uniformly continuous, $\lambda^m \rightarrow \lambda$, $s^m(i) \Rightarrow s(i)$, $T_m \rightarrow T$ and $E\{s^m(i)\} \leq M_1 < \infty$, $i = 1, 2$, then $\{V^m(t), t \geq 0\} \Rightarrow \{V(t), t \geq 0\}$. If also $(\bar{\lambda}E\{s^m(1)\} + \lambda^m E\{s^m(2)\})/(\bar{\lambda} + \lambda^m) < 1$ and $E\{s^m(i)\} \rightarrow E\{s(i)\}$, $i = 1, 2$, then $\pi^m \Rightarrow \pi$. Furthermore, if $\sup_m E\{s^m(i)^{1+\alpha'}\} < \infty$, $i = 1, 2$, $\alpha' > 0$, then for $\alpha < \alpha'$, the α th moments of π^m converge to that of π .

The above continuity result implies the continuity of optimal policies and the optimal costs for $P_\pi\{V_n \in [N_0 - \delta, N_0 + \delta]\}$.

Generalizations.

We have obtained ergodicity of the system under following generalizations:

- (a) There can be more than one ABR source.
- (b) The controlled traffic can arrive at regular intervals instead of as a Poisson process.
- (c) The uncontrolled traffic can be a Markov modulated poisson process.
- (d) There can be propagation delay in the arrival of feedback information and of the packets in reaching the queue.

REFERENCES

1. Sharma V., Kuri J. Stability and Performance Analyzes of Rate-based feedback Flow controlled ATM networks (submitted).

Шатских С. Я. (Самара, Россия) Минимальные базисы в гильбертовом пространстве и условные квантили гауссовских мер.

Рассматривается представление условных квантилей гауссовской меры в виде аффинных измеримых функционалов, значения которых на всем гильбертовом пространстве однозначно определяются их явно вычисляемыми сужениями на ядро меры.

Пусть H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $\mathbf{B}(H)$ — борелевская σ -алгебра подмножеств из H . Будем рассматривать на $\{H, \mathbf{B}(H)\}$ гауссову меру $\mu(\cdot) = \mu(\cdot; t, B)$ со средним значением t и корреляционным оператором $B: H \rightarrow H$, который предполагается симметрическим, положительно определенным, ядерным с ортонормированным базисом собственных векторов $\{e_k\}$, $k = 1, 2, \dots$. С помощью оператора B введем стандартным образом (см. [1, с. 39]) оснащения пространства H пространствами H_+ и H_- . Пространство H_+ часто называют ядром гауссовой меры $\mu(\cdot; t, B)$.

Рассмотрим вопрос о минимальности базисов пространства H относительно нормы $|\cdot|_-$. Пусть $\{f_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, — ортонормированный относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ базис в H . Этот базис будем называть минимальным (см. [2, с. 171]) относительно нормы $|\cdot|_-$, если для любого натурального k элемент f_k не принадлежит $L_- \{f_n, n = 1, 2, \dots; n \neq k\}$ — линейной оболочке векторов f_n , $n = 1, 2, \dots; n \neq k$, замкнутой по норме $|\cdot|_-$.

Лемма. Ортонормированный относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ базис $\{f_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, пространства H минимален относительно нормы $|\cdot|_-$ тогда и только тогда, когда $f_k \in H_+$ для любого натурального k .

Теорема. Пусть $\mu(\cdot; t, B)$ — гауссовская мера в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$; $\{f_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, — базис в H , ортонормированный относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и минимальный относительно нормы $|\cdot|_-$, тогда $q_{k|1\ldots\widehat{k}\ldots}^{(p)}(x)$ — условная квантиль случайного функционала $\langle f_k, x \rangle$ по случайным функционалам $\langle f_1, x \rangle, \dots, \langle f_k, x \rangle, \dots, \langle f_N, x \rangle, \dots$; $x \in H$, соответствующая

вероятности $p \in [0, 1]$, имеет вид

$$q_{k|1\dots k\dots}^{(p)}(x) = \langle m, f_k \rangle + \lim_{N \rightarrow \infty} \langle f_{k,N}^*, x - m \rangle + |f_k - f_k^*|_- \cdot \Phi^{-1}(p),$$

для любого $x \in C$, $\mu(C; m, B) = 1$, причем $q_{k|1\dots k\dots}^{(p)}(x)$ однозначно определяется по своему сужению на ядро H_+ :

$$q_{k|1\dots k\dots}^{(p)}(x)|_{H_+} = \langle f_k, m \rangle + \langle f_k^*, x - m \rangle + |f_k - f_k^*|_- \cdot \Phi^{-1}(p),$$

где

$$f_k^* = f_k - \frac{1}{|f_k|_+^2} B^{-1} f_k; \quad \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-t^2/2} dt.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скорород А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1975, 232 с.
2. Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980, 384 с.

Scheffler H.-P. (Dortmund, Germany) **Series representation for operator semistable laws and domains of normal attraction.**

1. Introduction. LePage [3] provides a series representation for operator stable laws in terms of «order statistics» and indicates how a series representation for an arbitrary infinitely divisible law could be obtained. Later Hahn et al. [2] gave a different series representation with more classical centerings analogous to those in [4] for stable laws on the real line.

They also characterized the domain of normal attraction of an operator stable law without Gaussian component in terms of the convergence of order statistics relative to some coordinate system closely related to the exponent of the operator stable law.

The goal of this paper is to extend the series representation to operator semistable laws and to give necessary and sufficient conditions of a vector X to belong to the domain of normal attraction of some operator semistable law having no Gaussian component. It will turn out that our condition stating the convergence of «order statistics» is always sufficient, but only necessary if we propose an additional assumption to the operator semistable law. This is due to the fact that in contrast to operator stable laws in the operator semistable case the «radial and angular components» are no longer independent.

2. Results. Suppose Y is a $\mathbf{R}^d$ -valued random vector with a full operator semistable distribution ν without Gaussian component. Due to a result in [1], there exist a $c > 1$ and a linear operator $B \in GL(\mathbf{R}^d)$ such that $\nu^c = c^B \nu * \delta(b)$ for some $b \in \mathbf{R}^d$. Here ν^c is the c -fold convolution power of ν ; for $A \in GL(\mathbf{R}^d)$ we define $A\nu\{dx\} = \nu\{A^{-1}dx\}$ and $\delta(b)$ is the unit mass in $b \in \mathbf{R}^d$.

Then the Lévy measure φ of ν has the representation

$$\varphi\{s^B \theta: s > t, \theta \in A\} = \frac{1}{t} \int_A K_\theta(\log t) d\lambda(\theta)$$

for all $t > 0$ and all Borel subsets A of some suitable sphere $\Sigma \subset \mathbf{R}^d$. The measure λ is a probability measure on Σ and the function $K(t, \theta) = K_\theta(\log t)/t$ is a nonincreasing

function in t for every $\theta \in \Sigma$. Let $K^{-1}(t, \theta) = \inf\{x > 0: K(x, \theta) \leq t\}$ denote the asymptotic inverse of K as a function in T .

Now assume that $E_1, E_2, \dots$ are i.i.d. as a standard exponential distribution and let $U_1, U_2, \dots$ be i.i.d. according to λ and independent of $\{E_i\}$. For each positive integer n let $\Gamma_n = E_1 + \dots + E_n$.

Then the following series representation holds:

Theorem 1. *The series*

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ K^{-1}(\Gamma_n, U_n)^B U_n - \mathbf{E} \left(K^{-1}(\Gamma_n, U_n)^B U_n I(K^{-1}(\Gamma_n, U_n) \leq 1) \right) \right\}$$

converges almost surely and there exists a vector $a \in \mathbf{R}^d$ such that $\mathcal{L}(Z + a) = \nu$.

We say that a random vector X belongs to the domain of normal attraction of ν if for $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. as X there exist $b_n \in \mathbf{R}^d$ such that $c^{-nB} \sum_{i=1}^{[c^n]} X_i - b_n \Rightarrow \nu$ and write $X \in \text{DONA}(\nu, B, c)$. Via B we introduce a coordinate system on $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ by $x = \tau(x)^B l(x)$, where $\tau(x) > 0$ is unique radial component and $l(x) \in \Sigma$ is a unique direction of x .

Now let $T_{n1} \geq T_{n2} \geq \dots \geq T_{n[c^n]}$ be the order statistics of $c^{-n}\tau(X_1), \dots, c^{-n}\tau(X_{[c^n]})$ and let $L_{n1}, \dots, L_{n[c^n]}$ be the corresponding directions. Then

$$\sum_{i=1}^{[c^n]} T_{ni}^B L_{ni} = c^{-nB} \sum_{i=1}^{[c^n]} X_i.$$

Let

$$\begin{aligned} T_n &= (T_{n1}, \dots, T_{n[c^n]}, 0, \dots) \in \mathbf{R}_+^\infty, \\ L_n &= (L_{n1}, \dots, L_{n[c^n]}, l(X_{[c^n]+1}), \dots) \in \Sigma^\infty, \\ T &= (K^{-1}(\Gamma_1, U_1), K^{-1}(\Gamma_2, U_2), \dots) \in \mathbf{R}_+^\infty, \\ L &= (U_1, U_2, \dots) \in \Sigma^\infty. \end{aligned}$$

Then we have

Theorem 2. *If $\mathcal{L}(T_n, L_n) \Rightarrow \mathcal{L}(T, L)$, then $X \in \text{DONA}(\nu, B, c)$.*

If the function $K(t, \theta)$ has the special form $K(t, \theta) = k(t)$ for some continuous function k , we get

Theorem 3. *$\mathcal{L}(T_n, L_n) \Rightarrow \mathcal{L}(T, L)$ if and only if $X \in \text{DONA}(\nu, B, c)$.*

REFERENCES

1. Чорны В. Операторно полуустойчивые распределения на $\mathbf{R}^d$. — Теория вероятн. и ее примен., 1986, т. 31, в. 4, с. 795–797.
2. Hahn M. G., Hudson W. N., Veeh J. A. Operator stable laws: Series representation and domains of normal attraction. — J. Theor. Probab., 1989, v. 2, p. 3–35.
3. LePage R. Multidimensional infinitely divisible variables and processes. Part II. — Lect. Notes Math., 1981, B. 860, S. 279–284.
4. LePage R., Woodroffe M., Zinn J. Convergence to a stable distribution via order statistics. — Ann. Probab., 1981, v. 9, p. 624–631.

Шоргин С. Я. (Москва, Россия) Одна экспоненциальная оценка для обобщенных пуассоновских распределений и некоторые актуарные приложения.

Пусть случайная величина (с.в.) $W(\Lambda)$ имеет обобщенное пуассоновское распределение, т.е. с.в. $W(\Lambda)$ совпадает по распределению со с.в. $\sum_{i=1}^0 \omega_i$ (принимается, что $\sum_{i=1}^0 = 0$), где с.в. $N, \omega_1, \omega_2, \dots$ независимы в совокупности, N — пуассоновская с.в. с параметром Λ , с.в. $\omega_1, \omega_2, \dots$ одинаково распределены (о.р.). Пусть существуют $E\omega_1 = a, D\omega_1 = b^2$; обозначим $G^2 = DW(\Lambda) = \Lambda(a^2 + b^2)$.

Теорема 1. Пусть $|\omega_1| \leq H$ почти наверное (п.н.). Положим $t = xH/G$, $t' = \min\{t, e - 1\}$. Тогда для всех $x \geq 0$

$$P\{W(\Lambda) - \Lambda a \geq Gx\} \leq \exp \left\{ -x^2 \frac{(1+t)\ln(1+t') - t'}{t^2} \right\}.$$

Эта оценка аналогична неравенству Беннета [1] для больших отклонений распределений сумм независимых ограниченных с.в. Доказательство теоремы 1 основывается на следующей лемме.

Лемма. Пусть существуют такие классы распределений K и $K'(h)$, $h \in M$, что распределение с.в. ω_1 принадлежит K , а распределение с.в. $W(h) - ah$ при $h \in M$ принадлежит $K'(h)$; пусть $\Omega[z]$ — некоторое подмножество неотрицательной полупрямой, зависящее от $z > 0$. Если при любом $h \in M$ и $n = 1, 2, \dots$ для всех последовательностей о.р. центрированных с.в. $Z_1, Z_2, \dots$, распределение которых принадлежит $K'(h)$, имеет место некоторая оценка

$$P\left\{ \sum_{i=1}^n Z_i \geq x [nE(Z_1^2)]^{1/2} \right\} \leq U(x, h, n),$$

справедливая при $x \in \Omega[nE(Z_1^2)]$, то при любых $\Lambda > 0$ и $x \in \Omega[G^2]$

$$P\{W(\Lambda) - EW(\Lambda) \geq Gx\} \leq \inf_{n: \Lambda/n \in M} U\left(x, \frac{\Lambda}{n}, n\right).$$

С помощью данной леммы, по-видимому, возможен «перенос» на обобщенные пуассоновские распределения и других оценок больших отклонений для сумм неслучайного числа независимых с.в.

Теорема 1 позволяет получить некоторые актуарно-математические результаты. Рассмотрим модель индивидуального риска с факторизуемыми исками. Подробное обсуждение концепции факторизационной модели страхового иска можно найти в [2]; в рамках этой модели каждому индивидуальному иску Y_j ставится в соответствие с.в. $S_j > 0$ (страховая сумма), такая, что $Y_j \leq S_j$, и предполагается, что с.в. Y_j и $X_j = Y_j/S_j$ некоррелированы. Предполагается, что случайные пары $\{(S_j, X_j)\}$ — о.р. и независимы в совокупности со с.в. N , равной количеству договоров в страховом портфеле и распределенной по закону Пуассона с параметром Λ . Пусть $A = EX_1$, $B^2 = DX_1$, $V^2 = DS_1/E^2(S_1)$, $g^2 = (1 + V^2)B^2E^2(S_1)$. Под итоговым страховым фондом по страховому портфелю понимается с.в. R , равная сумме всех зачисленных в фонд страховых премий Z_j и начального капитала r за вычетом всех исков Y_j . Страховые премии определяются по формуле $Z_j = zS_j$, где S_j — страховая сумма по j -му договору, z — страховая ставка. Минимально допустимой страховой ставкой называется величина $z_0 = \inf\{z: z \geq EX_1, P\{R \geq 0\} \geq Q\}$, где $Q \in (0, 1)$.

Предположим, что $S_1 \leq C$ п.н. Из теоремы 1 выводится оценка вероятности «разорения» — величины $P\{R < 0\}$, а из этого результата — оценка минимально допустимой страховой ставки, приводимая ниже.

Пусть $T(u)$ является решением уравнения $F(T(u)) = u$, где $F(\omega) = (1 + \omega) \ln(1 + \omega) - \omega$ при $\omega \leq e - 1$ и $F(\omega) = 2 - e + \omega$ при $\omega \geq e - 1$. В силу монотонности $F(\omega)$ функция $T(u)$ определена при всех $u \geq 0$.

Теорема 2. Пусть $q = (\Lambda g/C) T[(C^2/\Lambda g^2) \ln(1/(1-Q))]$, $p = r/ES$.
Если $\Lambda^2 > q^2(1+V^2)$, то $z_0 \leq A + d'$, где при $p^2 \leq q^2(1+V^2) B^2$

$$d' = \frac{[(\Lambda^2 - q^2(1+V^2)) q^2(1+V^2) B^2 + q^2 V^2 p^2]^{1/2} - p}{\Lambda^2 - q^2(1+V^2)},$$

а при $p^2 > q^2(1+V^2) B^2$ имеет место равенство $d' = 0$ (т.е. в этом случае $z_0 = A$).

Работа выполнена при поддержке Российского гуманитарного научного фонда, грант № 97-02-02235.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bennett G. Probability inequalities for the sum of independent random variables. — J. Amer. Statist. Assoc., 1962, v. 57, p. 33–45.
2. Shorgin S. Ya. Asymptotic analysis of an individual risk model with random insurance premiums. — J. Math. Sciences, 1996, v. 81, № 5, p. 3000–3004.

Janković S. (Belgrade, Yugoslavia) **On continuation of max-stable laws.**

We deal with continuation problems and restricted convergence concerning maxima of i.i.d. random variables. In 1983, Gnedenko and Senusi-Bereksi proved the following restricted convergence theorem on the interval:

Let $X_1, X_2, \dots$ be a sequence of i.i.d. random variables and let $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. If for suitable choice of constants $a_n > 0$ and $b_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$,

$$P\{a_n^{-1} M_n - b_n < x\} \rightarrow G(x), \quad n \rightarrow \infty,$$

for all $x \in (c, d)$ such that $G(d) - G(c) > 0$, where $G(x)$ coincides on (c, d) with one of the three possible limit distributions of max-stable type, then the convergence holds for all values of x .

We investigate weaker conditions under which the above restricted convergence theorem still holds. These conditions are related to the set of points on which the convergence takes place.

First question is to find out on how large sets different distributions of the max-stable type can coincide, excluding the set of points on which distributions of the max-stable type take values equal to 0 or 1.

Theorem 1. Two different distributions of the max-stable type can coincide in at most two points in which these distributions take values different from 0 and 1.

The consequence of the preceding theorem is that given three pairs (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$, where $x_1 < x_2 < x_3$ and $0 < y_1 < y_2 < y_3 < 1$, there exists at most one distribution G of the max-stable type satisfying $G(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, 3$. What we would like to know is: given three pairs (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$, where $x_1 < x_2 < x_3$ and $0 < y_1 < y_2 < y_3 < 1$, under which conditions there exists a max-stable law G having the prescribed values $G(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, 3$. And also we would like to find the criterion to determine to which of the three max-stable types Φ, Ψ or Λ belongs G in that case. Next theorem gives complete answers to these questions.

Theorem 2. Suppose three pairs of real numbers (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$, satisfy $x_1 < x_2 < x_3$ and $0 < y_1 < y_2 < y_3 < 1$. There exists exactly one distribution G of the max-stable type satisfying $G(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, 3$. The distribution G is of the type Φ, Λ, Ψ if the value of

$$(x_3 - x_2) \ln(-\ln y_1) + (x_1 - x_3) \ln(-\ln y_2) + (x_2 - x_1) \ln(-\ln y_3)$$

is positive, zero, or negative, respectively.

Theorem 3. Let $X_1, X_2, \dots$ be a sequence of i.i.d. random variables with common probability distribution F . Suppose for suitably chosen sequences $a_n > 0$ and $b_n \in \mathbb{R}$, satisfying

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{[nt]}}{a_n} = \alpha(t) \in (0, \infty), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{[nt]} - b_n}{a_n} = \beta(t) \quad (1)$$

for all $t > 0$, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x_0 + b_n) = G(x_0) = y_0, \quad (2)$$

for some $x_0 \in \mathbb{R}$ and $y_0 \in (0, 1)$. Then the convergence (2) holds for all $x \in \mathbb{R}$.

Theorem 3 has the following consequence.

Suppose $X_1, X_2, \dots$ is a sequence of i.i.d. random variables with a common probability distribution F such that for suitably chosen sequences $a_n > 0$, and $b_n \in \mathbb{R}$, the following convergence holds:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x_i + b_n) = G(x_i) = y_i,$$

$i = 1, 2, 3$, $0 < y_1 < y_2 < y_3 < 1$. Then condition (1) is sufficient to deduce that the convergence above holds for all $x \in \mathbb{R}$, and the limit function G will be a unique max-stable law taking values y_i at x_i , $i = 1, 2, 3$.

REFERENCES

1. Гнеденко Б. В., Сенуси-Берекси Л. О свойстве продолжимости предельных распределений для максимального члена последовательности. — Вестник Моск. Унив., сер. Математики и механики, 1983, т. 3, с. 11–20.

Янушкявичене О. Л. (Вильнюс, Литва) **О скорости сходимости одной последовательности случайных полиномов.**

Исследование предельного поведения случайных полиномов уже давно привлекает внимание ряда авторов (см., например, [1]–[3]). Это повышение интереса к случайным полиномам вызвано тем, что во многих случаях линейные модели не очень точно описывают реальные ситуации. Уточнение моделей с помощью симметрических полиномов, естественно, требует исследования скорости сходимости последних.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$ и пусть $\{Q_{kn}(x_1, \dots, x_n)\}$ — последовательность симметрических полиномов степени $k \geq 2$. Соответствующую последовательность случайных полиномов обозначим через $\{T_n\}$,

$$T_n = Q_{kn}(X_1, \dots, X_n), \quad n \geq 1,$$

а последовательность нормированных случайных полиномов через $\{\bar{T}_n\}$

$$\bar{T}_n = \frac{T_n - u_n}{v_n}, \quad n \geq 1.$$

В. М. Золотарев в работе [1] предложил для исследования случайных полиномов использовать представление Ньютона:

$$T_n = \sum_{m=1}^k \sum_{i_1, \dots, i_m} \{a_{i_1, \dots, i_m}^{(n)} S_1^{i_1} \dots S_m^{i_m} : i_1 + \dots + m i_m = m\} + a_0,$$

где $S_m = X_1^m + \dots + X_n^m$ — степенной симметрический полином.

Л. Сейдль [2] получил в общем виде описание класса возможных предельных распределений нормированных случайных симметрических полиномов $\bar{T}_n$, основываясь на этом подходе. При этом предполагалось, что функции распределения $F(x)$ удовлетворяет следующим условиям регулярности

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= (a + o(1)) L(x) x^{-\gamma}, \\ F(-x) &= (b + o(1)) L(x) x^{-\gamma}, \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\gamma > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a + b > 0$ и $L(x)$ — медленно меняющаяся функция.

Интересен также вопрос, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты исходных полиномов, чтобы последние сходились к некоторому невырожденному предельному распределению? Эта задача решается, например, в [3].

Однако скорость сходимости полиномов, рассматриваемых упомянутыми авторами, исследована не была. В настоящем сообщении скорость сходимости к предельному распределению оценивается для следующего случайного полинома Y_n второго порядка:

$$Y_n = \frac{1}{n} \left(\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n X_i^2 \right).$$

При этом с целью упрощения выкладок предполагается, что $EX_i = 0$, $EX_i^2 = 1$. Нетрудно видеть, что Y_n при $n \rightarrow \infty$ будет сходиться к $N^2 - 1$, где N — стандартная нормальная случайная величина.

Далее мы будем предполагать, что

$$E|X_i|^{4+2\delta} < \infty \quad (2)$$

для некоторого положительного $\delta \leq 1$. Это условие нам понадобится для того, чтобы применить оценки в центральной предельной теореме для квадратов рассматриваемых нами случайных величин.

Теорема 1. При выполнении условий (1) и (2) имеет место следующее соотношение:

$$L(Y_n, N^2 - 1) = \begin{cases} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right), & \text{если } \delta = 1, \\ \frac{cE|X_i|^{4+2\delta}}{n^{\delta/2}} + o\left(\frac{1}{n^{\delta/2}}\right), & \text{если } 0 < \delta < 1, \end{cases}$$

(здесь c — некоторая константа, а L — метрика Леви).

Теорема 2. При выполнении условий (1) и (2) имеет место следующее неравенство:

$$\rho(Y_n, N^2 - 1) \leq c_1 \sqrt{E|X_i|^{4+2\delta}} \begin{cases} \frac{\sqrt{\ln n}}{n^{1/4}}, & \text{если } \delta = 1, \\ \frac{1}{n^{\delta/4}}, & \text{если } 0 < \delta < 1, \end{cases}$$

(здесь c_1 — некоторая константа, а ρ — равномерная метрика).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотарев В. М. О случайных симметрических полиномах. — В сб.: Вероятностные распределения и матем. статистика. Ташкент: ФАН, 1986, с.170–188.
2. Сейдль Л. О предельных распределениях случайных симметрических полиномов. — Теория вероятн. и ее примен., 1988, т. 33, № 2, с. 266–278.
3. Янушквичене О. Л. О предельных распределениях однородных случайных полиномов произвольной степени. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, № 3, с. 671–677.

Янушкявичюс Р. В. (Вильнюс, Литва) **Об устойчивости одной характеристики нормального закона.**

Пусть X_1, X_2 — независимые нормальные (невыврожденные) случайные величины. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 , чтобы линейные статистики $L_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2$ и $L_2 = b_1 X_1 + b_2 X_2$ были независимы? Из простого уравнения для характеристических функций

$$f_{L_1, L_2}(t_1, t_2) = f_{L_1}(t_1) f_{L_2}(t_2) \quad (1)$$

путем непосредственной подстановки характеристических функций нормальных случайных величин с дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 получаем, что

$$a_1 b_1 \sigma_1^2 + a_2 b_2 \sigma_2^2 = 0. \quad (2)$$

Это означает, что должно выполняться условие $a_1 b_1 a_2 b_2 \leq 0$, причем нетривиальным является лишь случай $a_1 b_1 a_2 b_2 < 0$.

Несмотря на очевидную простоту (2), в известной монографии А. М. Кагана, Ю. В. Линника, С. Р. Рао [1] это соотношение, как заметил Ю. Ю. Мачис, записано неверно: $\sum a_j b_j = 0$ ([1, глава 3, § 3.1, с. 126]).

Таким образом, если статистики $L_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2$ и $L_2 = b_1 X_1 + b_2 X_2$ от независимых невырожденных нормальных случайных величин X_1 и X_2 независимы, то их дисперсии удовлетворяют условию (2), а характеристические функции — уравнению (1). Возникает естественный вопрос: является ли нормальная характеристическая функция единственным решением уравнения (1)? Положительный ответ на этот вопрос составляет суть характеристики Б. В. Гнеденко [2].

Наша задача — исследовать устойчивость этой характеристики. А именно, предположив, что статистики L_1 и L_2 в некотором смысле почти независимы, убедимся, что рассматриваемые случайные величины при условии $a_1 b_1 a_2 b_2 < 0$ в некотором смысле почти нормальны.

С этой целью напомним определение метрики λ :

$$\lambda(\vec{X}, \vec{Y}) = \lambda(f_{\vec{X}}, f_{\vec{Y}}) = \inf \left\{ \max\{v(\vec{X}, \vec{Y}; t), t\} : t > 0 \right\},$$

где

$$v(\vec{X}, \vec{Y}; t) = \frac{1}{2} \max \left\{ |f_{\vec{X}}(\vec{u}) - f_{\vec{Y}}(\vec{u})| : |\vec{u}| < \frac{1}{t} \right\}.$$

О п р е д е л е н и е. Случайные величины X и Y называются (λ, ε) -независимыми, если $\lambda(f_{X,Y}, f_X f_Y) \leq \varepsilon$.

Теорема. Пусть X_1, X_2 — независимые случайные величины из класса $\mathcal{P}_\varepsilon(p)$,

$$\mathcal{P}_\varepsilon(p) = \left\{ X : \inf \{ |t| : |E \exp itX| \geq p \} \geq \varepsilon \right\}.$$

Если статистики $L_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2$ и $L_2 = b_1 X_1 + b_2 X_2$ (λ, ε)-независимы, причем $a_1 a_2 b_1 b_2 < 0$, то существуют нормальные случайные величины N_1 и N_2 такие, что

$$\lambda(X_j, N_j) \leq C p^{-4} \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

где C зависит лишь от коэффициентов a_1, a_2, b_1, b_2 .

Возникает естественный вопрос — достаточно ли «богат» класс $\mathcal{P}_\varepsilon(p)$? Элементарный пример дает утвердительный ответ.

Рассмотрим нормальный закон со средним m и дисперсией σ^2 . Тогда

$$\inf \left\{ |t| : \left| \exp \left(i m t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right) \right| \geq p \right\} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{2 \ln \frac{1}{p}}$$

Этот нормальный закон принадлежит классу $\mathcal{P}_\varepsilon(p)$, если

$$\frac{1}{\sigma} \sqrt{2 \ln \frac{1}{p}} \geq \varepsilon, \quad \text{т.е.} \quad \sigma \leq \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{2 \ln \frac{1}{p}}. \quad (4)$$

Поскольку p — фиксированная константа из интервала $(0, 1)$, а $\varepsilon \downarrow 0$, то ограничения на σ , как видно из (4), в некотором смысле минимальны.

В заключение заметим, что характеризацию нормального закона независимостью статистик $X_1 + X_2$ и $X_1 - X_2$ (т.е. случай $a_1 = a_2 = b_1 = 1, b_2 = -1$) впервые рассмотрел С. Н. Бернштейн еще в 1941 году. Из (2) следует, что $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Это условие и, главное, специфика коэффициентов в случае теоремы С. Н. Бернштейна при исследовании ее устойчивости позволяют применять так называемую процедуру растяжения (см. § 3.1 монографии автора [3]).

Процедура растяжения, в свою очередь, позволяет отказаться от условия типа «неутекания значительной массы на бесконечность», т.е. в случае $a_1 = a_2 = b_1 = 1, b_2 = -1$ нет необходимости вводить в рассмотрение класс $\mathcal{P}_\varepsilon(p)$, а в самой оценке устойчивости (3) удастся избавиться от логарифмического множителя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р. Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972.
2. Гнеденко Б. В. Об одной теореме Берштейна. — Известия Академии наук СССР, сер. матем., 1948, т. 12, № 1, с. 97–100.
3. Янушкевичус Р. В. Устойчивость характеристик вероятностных распределений. Вильнюс: Мокслас, 1991.