Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. И. Белопольская, Вероятностный подход к решению систем нелинейных параболических уравнений, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 4, 625–652

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp186>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:15:22

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.
Выходит 4 раза в год
Москва • Наука • ТВП

Том 49
Выпуск 4, 2004 год
октябрь, ноябрь, декабрь

© 2004 г.

БЕЛОПОЛЬСКАЯ Я. И.*

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ¹⁾

В работе построено вероятностное представление решения задачи Коши для общей системы нелинейных параболических уравнений и сформулированы условия, при которых это представление может быть использовано для построения и исследования гладких решений задачи Коши для нелинейной гиперболической системы. В качестве примера рассмотрена система уравнений газовой динамики и ее параболическая регуляризация.

Ключевые слова и фразы: диффузионные процессы и мультипликативные функционалы, системы нелинейных параболических и гиперболических уравнений, метод исчезающей вязкости.

1. Введение. Системы линейных и нелинейных параболических уравнений, возникающие в различных разделах математической физики, газо- и гидродинамики, магнитогидродинамики, теории управления и многих других областей могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (a(x, u), \nabla) u + B(x, u) \circ \nabla u + c(x, u) u = \frac{1}{2} Q(x, u) u'', \quad (1.1)$$

где $[Qu'']^m = Q_{ik}^{jm} \frac{\partial^2 u^j}{\partial x_i \partial x_k}$ и $(B \circ \nabla u)^m = B_l^{im} \frac{\partial u^l}{\partial x_i}$, $t \in [0, \infty)$, $x \in \mathbf{R}^d$.

Здесь и ниже мы будем использовать (если не оговорено противное) соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

* С.-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, 2-я Красноармейская, 4, 198005 С.-Петербург, Россия; e-mail: yana@YB1569.spb.edu

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 02-01-00483, НШ-2258.2003 и DFG 436 RUS 311/593.

Для различных частных случаев системы (1.1) разработан ряд подходов к построению вероятностного представления решения $u(t, x)$ задачи Коши с гладкими ограниченными начальными данными

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (1.2)$$

Мы будем говорить, что система (1.1) принадлежит:

1) типу 1, если $Q_{ij}^{\alpha\beta} = A_{ik}A_{jk}\delta^{\alpha\beta}$, где $\delta^{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, $A: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^d$, $k = 1, \dots, m$, $\alpha, \beta = 1, \dots, d_1$, $i, j = 1, \dots, d$, а B и c произвольны;

2) типу 2, если матрица $Q^{\alpha\beta}(y) = Q_{ij}^{\alpha\beta}y^i y^j$ диагональна, $B = 0$, а матрица c произвольна.

Вероятностный подход к построению решения задачи Коши для системы линейных параболических уравнений типа 1 был предложен в работах Ю. Л. Далецкого [1], [2] и Д. Струка [3] и связан с использованием мультипликативных операторных функционалов от диффузионных процессов.

Вероятностное представление решения задачи Коши для линейных параболических систем типа 2 в виде средних по траекториям марковских процессов с дискретной компонентой было построено в работах Р. Григо и Р. Херша [4], [5]. Более детально свойства таких процессов были изучены в монографии И. И. Гихмана и А. В. Скорохода [6].

Вероятностный подход к построению решения задачи Коши для нелинейных скалярных уравнений был предложен в работах Г. Маккина [7] и М. И. Фрейдлина [8], [9]. Дальнейшее развитие этот подход получил в работах Ю. Л. Далецкого и автора [10]–[12], где в терминах диффузионных процессов и их мультипликативных операторных функционалов были построены вероятностные представления решения задачи Коши для системы полностью нелинейных параболических уравнений (см. также [13]).

Иная вероятностная модель, позволяющая построить вероятностное представление решения задачи Коши для квазилинейной системы типа 2, основана на рассмотрении марковского процесса с дискретной компонентой. Такая модель была построена в монографии М. И. Фрейдлина [9]. Дальнейшие исследования в этом направлении содержатся в докторской диссертации В. Сарафяна [14].

Наряду с упомянутыми выше подходами к исследованию систем нелинейных параболических уравнений, весьма интересным является также подход, основанный на возможности (подмеченной в знаменитой работе Е. Хопфа [15]) рассматривать некоторые параболические квазилинейные системы как уравнения для логарифмических производных гладких диффузионных мер.

Отметим, что среди упомянутых выше подходов лишь подход Хопфа

позволяет обсуждать переход к исследованию задачи Коши для гиперболической системы в пределе по исчезающей вязкости.

В недавней работе автора [16] было показано, что при некоторых дополнительных условиях на коэффициенты при первых производных по пространственным переменным подход, разработанный в [10], может быть использован для обоснования и изучения предельного перехода в методе исчезающей вязкости.

Далее статья организована следующим образом. В п. 2 кратко описаны вероятностные представления решения задачи Коши для систем параболических уравнений, основанные на преобразовании Коула–Хопфа и его обобщениях, а также на использовании марковских процессов с дискретной компонентой.

Остальная часть работы посвящена подходу, основанному на теории диффузионных процессов, ассоциированных с линейными и нелинейными уравнениями в частных производных, и их мультипликативных операторных функционалов.

В пункте 3 мы напоминаем основные идеи и результаты линейной теории и формулируем условия на коэффициент B параболической системы типа 1, при которых удастся исследовать предельное поведение решения задачи Коши (при исчезающей вязкости) для линейной системы параболических уравнений, что позволяет построить представление решения задачи Коши для линейной системы гиперболических уравнений. Начиная с пункта 4, мы рассматриваем нелинейные системы типа 1 и переносим результаты пункта 3 на нелинейный случай.

Отметим, что на этом пути удастся рассмотреть достаточно широкий класс параболических нелинейных уравнений и систем. С другой стороны, даже при изучении задачи Коши для уравнения Бюргерса такой подход позволяет расширить класс рассматриваемых начальных данных, отказавшись от условия потенциальности начального поля.

Заключительный пункт статьи посвящен применению подхода, развитого в пунктах 4 и 5, к построению решения задачи Коши для параболической регуляризации системы уравнений газовой динамики. Здесь конструируется гладкое (локальное по времени) решение регуляризованной системы уравнений Эйлера и его предел по исчезающей вязкости. Кроме того, здесь обсуждается возможность применения этого подхода к построению мерозначных решений и сравнения полученных таким образом результатов с вероятностными моделями уравнений газовой динамики без давления, построенными в работах [17], [18]. Более подробный сравнительный анализ нашего подхода и подхода, развитого в этих работах, будет приведен в другом месте.

2. Уравнение Бюргерса и его обобщения. Задача Коши для уравнения Бюргерса в последние десятилетия по разным поводам при-

влекала к себе внимание многочисленных исследователей (см., например, [19], [20] и приведенную там библиографию).

Уравнением Бюргера называют квазилинейное уравнение относительно (векторной) функции $u(t, x) \in \mathbf{R}^d$, $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbf{R}^d$, имеющее вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla) u = \frac{\sigma^2}{2} \Delta u, \quad (2.1)$$

где $\Delta u = \sum_{i=1}^d \nabla_i \nabla_i u$. Заметим, что при $d = 1$ (2.1) представляет собой скалярное квазилинейное уравнение, а при $d > 1$ — диагональную систему квазилинейных параболических уравнений относительно компонент вектор-функции $u(t, x)$.

Рассмотрим задачу Коши для (2.1) с начальным условием

$$u(0, y) = u_0(y). \quad (2.2)$$

В работе Хопфа [15] было показано (при $d = 1$), что уравнение (2.1) допускает линеаризацию с помощью преобразования

$$u(t, y) = -\sigma^2 \frac{\nabla \varphi(t, y)}{\varphi(t, y)}. \quad (2.3)$$

Точнее говоря, если скалярная функция $\varphi(t, y)$ удовлетворяет задаче Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \Delta \varphi, \quad \varphi(0, y) = \varphi_0(y), \quad (2.4)$$

то функция $u(t, y)$, имеющая вид (2.3) для всех $t \geq 0$, удовлетворяет (2.1). Поскольку $\varphi(t, y)$ допускает явное представление, то существует явное представление и для функции $u(t, y)$:

$$u(t, y) = \int_{\mathbf{R}^d} \frac{y - x}{t} e^{-\|x - y\|^2 / (2\sigma^2 t)} \varphi_0(x) dx \left(\int_{\mathbf{R}^d} e^{-\|x - y\|^2 / (2\sigma^2 t)} \varphi_0(x) dx \right)^{-1}. \quad (2.5)$$

Вероятностная интерпретация и естественные обобщения этого наблюдения в терминах диффузионных процессов могут быть описаны следующим образом (см. [22]).

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $w(t) \in \mathbf{R}^d$ — винеровский случайный процесс, заданный на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $\mathcal{F}_t$ — поток σ -подалгебр, порожденных процессом $w(t)$, $0 \leq s \leq t \leq T$, ξ_0 — $\mathcal{F}_s$ -измеримая случайная величина со значениями в $\mathbf{R}^d$, имеющая распределение $\varphi_0(dy) = \mathbf{P}\{\xi_0 \in dy\}$ с плотностью $\varphi_0(y)$. Пусть $a_i(t, x)$, $A_{ij}(t, x)$, $i, j = 1, \dots, d$, — детерминированные функции на $[0, \infty) \times \mathbf{R}^d$, непрерывные по t , удовлетворяющие локальному условию Липшица и имеющие рост не выше линейного по $x \in \mathbf{R}^d$.

Рассмотрим задачу Коши

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t)) dt + A(t, \xi(t)) dw, \quad \xi(s) = \xi_0. \quad (2.6)$$

При описанных выше условиях существование, единственность и марковское свойство решения $\xi(t)$ задачи (2.6) гарантируются общими результатами теории стохастических дифференциальных уравнений (см., например, [23]).

Переходная вероятность $P(s, x, t, dy) = \mathbf{P}\{\omega: \xi(t) \in dy | \xi(s) = x\}$, $0 \leq s \leq t \leq T < \infty$, $x \in \mathbf{R}^d$, марковского процесса $\xi(t)$ порождает пару эволюционных семейств, а именно, семейство $[U(t, s) f](x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(t, y) P(s, x, t, dy) = u(s, x)$, действующее в пространстве $B(\mathbf{R}^d)$ ограниченных борелевских функций, и семейство $[V(s, t) \varphi](dy) = \int_{\mathbf{R}^d} P(s, x, t, dy) \varphi(s, dx) = \mu(t, dy)$, действующее в пространстве $M(\mathbf{R}^d)$ ограниченных борелевских мер на $\mathbf{R}^d$. Производящий оператор семейства $U(t, s)$, называемый также генератором марковского процесса $\xi(t)$, имеет вид $\mathcal{A}(s) f(x) = \frac{1}{2} \text{Tr } A^T(s, x) f'' A(s, x) + \nabla_{a(s, x)} f$, где $\text{Tr } A^T f'' A = A^{ik} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} A^{jk}$, A^T обозначает сопряженное отображение к $A: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ и $\nabla_a f = a^i \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Если коэффициенты в (2.6) обладают дополнительными свойствами, гарантирующими гладкость меры $\mu_t(dy)$, то, как нетрудно проверить, ее логарифмическая производная $\lambda(t, y) = \frac{\nabla \mu(t, dy)}{\mu(t, dy)}$ удовлетворяет замкнутому квазилинейному параболическому уравнению

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{1}{2} \text{Tr } A^T \lambda'' A + (F \lambda, \nabla) \lambda + \frac{1}{2} \nabla F_i^j \nabla_i \lambda_j + \nabla_{\text{div } F} \lambda + \nabla(\text{div } F) \lambda + \nabla \alpha$$

и условию $\lambda(0, y) = \frac{\nabla \nu(dy)}{\nu(dy)}$.

Здесь $F = A^T A$, $[\text{div } F]^i = \sum_{k=1}^d \nabla_k F^{ki}$ и $\alpha = \sum_{k=1}^d [\nabla_{A^k} \text{div } A^k + \frac{1}{2} [\text{div } A^k]^2 + \frac{1}{2} [\nabla A^k]^2] - \text{div } a$.

При этом функция $v(t, y) = -F(t, y) \lambda(t, y)$ удовлетворяет уравнению, обобщающему уравнение Бюргерса (см. [25]–[27]). Если же $\lambda(t, y)$ — это логарифмическая производная распределения случайного процесса $\xi(t) = \xi_0 + \sigma w(t)$ с начальным распределением φ_0 , то функция $u(t, y) = -\sigma^2 \lambda(t, y)$ удовлетворяет классическому уравнению Бюргерса. Отметим, что в силу (2.3) в многомерном случае описанный выше подход справедлив, если начальное векторное поле $u_0(y)$ потенциально.

Далее, на этом пути удастся построить решение задачи Коши для системы, состоящей из уравнения Бюргерса (2.1) и уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = \frac{\sigma^2}{2} \Delta \rho, \quad (2.7)$$

для скалярной функции $\rho(t, y) \in \mathbf{R}^1$, $y \in \mathbf{R}^d$, при условии $\rho(0, y) = \rho_0(y)$.

Действительно, функция $\rho(t, y)$, удовлетворяющая (2.7), может быть представлена в виде $\rho(t, y) = \varphi_1(t, dy)/\varphi(t, dy)$, где $\varphi_1(t, dy)$ — мера, плотность которой по мере Лебега удовлетворяет уравнению теплопроводности с потенциалом

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \Delta \varphi_1 - \text{div } u \varphi_1$$

и начальному условию $\varphi_1(0, y) = \varphi_{01}(y)$, а $\varphi(t, dy)$ удовлетворяет (2.4). При этом

$$\varphi_1(t, y) = \mathbf{E} \left[\exp \left\{ \int_0^t \operatorname{div} u(s, \xi^1(s)) ds \right\} \varphi_{01}(y - \xi^1(t)) \right],$$

а процесс $\xi^1(t)$ имеет вид $\xi^1(t) = \xi_0^1 + \sigma w(t)$ и $\mathbf{P}\{\xi_0^1 \in dy\} = \varphi_{01}(dy)$.

Представления решения задачи Коши, полученные выше, позволяют исследовать поведение решения для начальных условий, обладающих той или иной степенью сингулярности. При этом поскольку оба уравнения (2.1) и (2.7) — это уравнения для плотностей мер, то начальные данные $u_0(y)$, $\rho_0(y)$ должны представлять собой измеримые функции, определенные на носителях соответствующих мер. Кроме того, эти представления позволяют изучить предельный переход при $\sigma \rightarrow 0$. В одномерном случае задачи такого типа для описанной выше системы с использованием преобразования Коула–Хопфа были исследованы в работе [24].

Как уже упоминалось выше, подходу, основанному на эксплуатации явного вида решения задачи Коши для уравнения Бюргерса, в последние десятилетия посвящено большое число работ, однако возможности этого подхода ограничены небольшим набором уравнений и систем. Кроме того, в многомерном (по пространственной переменной) случае на этом пути удастся рассмотреть лишь задачу Коши с потенциальными начальными данными.

В заключение этого пункта мы кратко опишем вероятностный подход, основанный на свойствах марковского процесса с дискретной компонентой и позволяющий изучать параболические системы типа 2.

Пусть $\zeta(t) = (\xi(t), \nu(t))$ — двухкомпонентный марковский процесс, компонента $\xi(t)$ которого удовлетворяет задаче Коши

$$d\xi(t) = a(\xi(t), \nu(t)) dt + A(\xi(t), \nu(t)) dw, \quad \xi(s) = x, \quad \nu(s) = q \quad (2.8)$$

($w(t) \in \mathbf{R}^d$ — винеровский процесс), а компонента $\nu(t)$ представляет собой марковский дискретный случайный процесс с пространством состояний $Y = \{1, \dots, d_1\}$, генератор которого имеет вид $\mathcal{A}^\nu f(x, q) = \sum_{k=1}^{d_1} c_{qk}(x) f(x, k)$. Здесь и ниже при описании этого подхода мы отождествляем обозначения $f(x, k)$ и $f_k(x)$.

Генератор марковского процесса $\zeta(t)$ имеет вид

$$[\mathcal{A}^\zeta f]_q(x) = [\mathcal{A}^\xi f]_q(x) + \sum_{i \neq q} c_{qi} f_i(x), \quad q, i = 1, \dots, d_1, \quad (2.9)$$

где

$$\mathcal{A}_q^\xi(x) = \frac{1}{2} A_q^{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} A_q^{jk}(x) + a_q^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (2.10)$$

Решение задачи Коши для нелинейной системы параболических уравнений

$$\frac{\partial u_q(s, x)}{\partial s} + [\mathcal{A}^\xi u]_q(s, x) + \sum_{k=1}^{d_1} c_{qk}(x, u(s, x)) u_k(s, x) = 0, \quad (2.11)$$

$$u_q(T, x) = v_q(x),$$

относительно функций $u_q(s, x)$, $q = 1, \dots, d_1$, заданных на $[0, T] \times \mathbf{R}^d$, может быть представлено в виде среднего по траекториям процесса $\zeta(t)$ (см. [9]).

Действительно, обозначим $c_q(x, u) = \sum_{k=1}^{d_1} c_{qk}(x, u)$. Тогда, как следует из (2.9), (2.10) и свойств марковских процессов, функция $u_q(s, x) = \mathbf{E}_{x,q} v(\zeta(T)) \exp\{\int_s^T c(\zeta(\tau), u(\tau, \zeta(\tau))) d\tau\}$ удовлетворяет (2.11).

3. Параболические системы с исчезающей вязкостью. Начиная с этого пункта, мы используем третий из упомянутых во введении вероятностных подходов к построению решения задачи (1.1), (1.2).

Введем необходимые обозначения. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$. Мы будем опускать индекс d в обозначении скалярного произведения в $\mathbf{R}^d$, если это не приведет к недоразумениям, и отождествлять евклидово пространство с его сопряженным. Обозначим $L(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^{d_1})$ пространство линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathbf{R}^d$ в $\mathbf{R}^{d_1}$, $L(\mathbf{R}^d) = L(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$, $L(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{d_1}, \mathbf{R}^{d_1})$ — пространство билинейных отображений из $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{d_1}$ в $\mathbf{R}^{d_1}$.

Пусть $A_k^i(x)$, $a^i(x)$, $C_{lq}^i(x)$, $c_{lq}(x)$, $x \in \mathbf{R}^d$, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, d$, $l, q = 1, \dots, d_1$ — набор гладких функций, задающих координатное представление векторного поля $a \in \mathbf{R}^d$, операторных полей $A \in L(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^d)$, $c \in L(\mathbf{R}^{d_1})$ и тензорного поля $B \in L(\mathbf{R}^{d_1} \times \mathbf{R}^m, \mathbf{R}^{d_1})$, удовлетворяющих условиям роста

$$\langle a(x), x \rangle + \text{Tr } A^T(x) A(x) \leq C_0 + C_1 \|x\|^2,$$

$$\langle c(x) h, h \rangle \leq C_0 \|h\|^2, \quad \sum_{i=1}^d \|C^i(x) h\|^2 \leq C_1 \|h\|^2,$$

где C_0 и $C_1 > 0$ — абсолютные константы и $B_l^{qk} = C_q^{il} A_i^k$. Если выполнены все перечисленные выше условия, мы будем говорить, что коэффициенты a , A , c , C подчиняются условию **C.2**.

Рассмотрим задачу Коши для системы типа 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (a(x), \nabla) u + B(x) \circ \nabla u + c(x) u = \frac{1}{2} \text{Tr } A^T(x) u'' A(x), \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad (3.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (3.2)$$

Расширив фазовое пространство $X = \mathbf{R}^d$ до пространства $Y = \mathbf{R}^M$, $M = d + d_1$, задачу Коши (3.1), (3.2) можно свести к задаче Коши для скалярного уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (N(z), \nabla) \Phi = \frac{1}{2} D_{qk}(z) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_q \partial z_k}, \quad \Phi(0, z) = \langle h, u_0(x) \rangle, \quad (3.3)$$

относительно функции $\Phi(t, z) = \langle h, u(t, z) \rangle_{d_1}$, $z = (x, h) \in \mathbf{R}^m$, заданной на $[0, T] \times \mathbf{R}^d$. Здесь $N(z) = (a(x), c(x)h) \in \mathbf{R}^M$, матрица $D \in L(\mathbf{R}^M)$ имеет вид $D = \begin{pmatrix} F & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$.

Пусть $w(t) \in \mathbf{R}^m$ — винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Тогда решение $\Phi(t, z)$ задачи Коши (3.3) допускает представление $\Phi(t, z) = \mathbf{E}\Phi_0(\gamma(t))$, где $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t)) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d_1}$ — диффузионный случайный процесс, компоненты $\xi(t) \in \mathbf{R}^d$ и $\eta(t) \in \mathbf{R}^{d_1}$ которого удовлетворяют стохастическим уравнениям

$$d\xi = -a(\xi(t))dt + A(\xi(t))dw, \quad \xi(0) = x \in \mathbf{R}^d, \quad (3.4)$$

$$d\eta(t) = -c(\xi(t))\eta(t)dt - C(\xi(t))(\eta(t), dw), \quad \eta(0) = h \in \mathbf{R}^{d_1}, \quad (3.5)$$

где $B^T = C \circ A$. Более того,

$$\Phi(t, z) = \langle h, u(t, x) \rangle = \mathbf{E}\langle \eta_h(t), u_0(\xi_x(t)) \rangle, \quad (3.6)$$

где u удовлетворяет (3.1).

Рассмотрим задачу Коши для линейной параболической системы

$$\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t} + \nabla_a u_m^\varepsilon + B_{ml}^i(x) \nabla_i u_l^\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{2} \text{Tr} A^T(x) [u_m^\varepsilon]'' A(x), \quad u_m^\varepsilon(0, x) = u_{0m}(x). \quad (3.7)$$

Как уже упоминалось, функция $u^\varepsilon(t, y)$ допускает представление

$$\langle h, u^\varepsilon(t, x) \rangle = \mathbf{E}\langle \eta_h^\varepsilon(t), u_0(\xi_x^\varepsilon(t)) \rangle, \quad (3.8)$$

где диффузионные процессы $\xi_x^\varepsilon(t)$, $\eta_h^\varepsilon(t)$ задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \xi_x^\varepsilon(t) &= x - \int_s^t a(\xi_x^\varepsilon(\tau)) d\tau + \varepsilon \int_0^t A(\xi_x^\varepsilon(\tau)) dw(\tau) \\ \eta_h^\varepsilon(t) &= h - \varepsilon^{-1} \int_s^t C(\xi_x^\varepsilon(\tau))(\eta_h^\varepsilon(\tau), dw(\tau)). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Мы будем говорить, что выполнено условие **С.3**, если:

1) тензор третьего ранга $B_{kl}^i(x)$, $i = 1, \dots, d$, $k, l = 1, \dots, d_1$, представим в виде $B_{lk}^i = C_{kl}^j A_j^i$ и матрицы $C(y) = C^i y_i$ имеют вещественный спектр;

2) собственные числа матрицы $C(y)$ представимы в виде $\lambda_\alpha(y) = \tilde{\lambda}_\alpha^i y_i$ и максимальная высота жордановой клетки этой матрицы равна 1.

Пусть $\{r_\alpha(y)\}_{\alpha=1}^{d_1}$ — жордановы базисные векторы матрицы $C(y)$, тогда $[C^i y_i](r_\alpha) = \tilde{\lambda}_\alpha^i y_i r_\alpha$.

Теорема 3.1. Пусть выполнено условие **С.3**. Тогда решение u^ε задачи Коши (3.7) допускает представление $\langle r_\alpha, u^\varepsilon(t, x) \rangle = \mathbf{E} \langle r_\alpha, u_0(\gamma_\alpha^\varepsilon(t)) \rangle$, где диффузионный процесс $\gamma_\alpha^\varepsilon(t) \in \mathbf{R}^d$ удовлетворяет стохастическому уравнению

$$\gamma_\alpha^\varepsilon(t) = x - \int_0^t [a(\gamma^\varepsilon(\tau)) + \tilde{\lambda}_\alpha(\gamma_\alpha^\varepsilon(\tau))] d\tau + \varepsilon \int_0^t A(\gamma^\varepsilon(\tau)) dw(\tau). \quad (3.10)$$

Доказательство. Процесс $\eta^\varepsilon(t)$, удовлетворяющий (3.9), порождает мультипликативный операторный функционал $S^\varepsilon(t, \tau, \xi(\cdot))$, задаваемый соотношением $\eta^\varepsilon(t) = S^\varepsilon(t, 0, \xi^\varepsilon(\cdot)) h = \exp\{G^\varepsilon(t, \tau, \xi^\varepsilon(\cdot))\} h$, с

$$G^\varepsilon(t, \tau, \xi^\varepsilon(\cdot)) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t C^i(\xi^\varepsilon(\tau)) dw^i(\tau) - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^t \sum_{i=1}^d [C^i(\xi^\varepsilon(\tau))]^2 d\tau. \quad (3.11)$$

Выбрав в соотношении (3.8) в качестве h собственный вектор r_α матрицы C , мы получим

$$\begin{aligned} \langle \eta_{r_\alpha}^\varepsilon(t), u_0(\xi^\varepsilon(t)) \rangle &= \left\langle r_\alpha, \exp\{G^\varepsilon(t, \tau, \xi^\varepsilon(\cdot))\} u_0(\xi^\varepsilon(t)) \right\rangle \\ &= \mathbf{E} \left\langle r_\alpha, \exp \left\{ -\varepsilon^{-1} \int_0^t \langle \lambda_\alpha(\xi^\varepsilon(\tau)), dw(\tau) \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\varepsilon^{-2}}{2} \int_0^t \sum_{i=1}^d \|\lambda^i(\xi^\varepsilon(\tau))\|^2 d\tau \right\} u_0(\xi^\varepsilon(t)) \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В силу условия **С.3**, представления (3.8) и формулы Гирсанова (см. [23]), соотношение (3.12) приводит к равенству

$$\langle r_\alpha, u(t, x) \rangle = \mathbf{E} \langle \eta_{r_\alpha}^\varepsilon(t), u_0(\xi^\varepsilon(t)) \rangle = \mathbf{E} \langle r_\alpha, u_0(\gamma_\alpha^\varepsilon(t)) \rangle, \quad (3.13)$$

где $\gamma_\alpha^\varepsilon(t)$ удовлетворяет (3.10) и суммирование по α не предполагается.

Следствие 3.1. Процесс $\gamma_\alpha^\varepsilon(t)$, удовлетворяющий (3.10), непрерывно зависит от ε и сходится по вероятности к пределу $\gamma_\alpha(t) = \mathbf{P}\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\alpha^\varepsilon(t)$. При этом предельная кривая $\gamma_\alpha(t)$ совпадает с характеристикой $\gamma_{\alpha,x}^0(t)$ для гиперболического уравнения

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial s} + \nabla_a u_\alpha + \lambda_\alpha(x) \nabla_b u_\alpha = 0. \quad (3.14)$$

Решение задачи Коши для системы (3.14) с начальным условием $u(0, x) = u_0(x)$ задается соотношением $u(t, x) = \sum_{\alpha=1}^{d_1} \langle r_\alpha, u_0(\gamma_{\alpha,x}(t)) \rangle r_\alpha$.

4. Диффузионные процессы и нелинейные параболические уравнения. В этом пункте мы напомним конструкцию диффузионных процессов и их мультипликативных функционалов, ассоциированных с нелинейными параболическими уравнениями и системами. Подробное изложение содержится в [10], [11].

Рассмотрим задачу Коши для скалярного нелинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (a(x, f), \nabla) f = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} A^T(x, f) f'' A(x, f), \quad f(0, x) = f_0(x). \quad (4.1)$$

Здесь $a(x, f) \in \mathbf{R}^d$, $A(x, f) \in L(\mathbf{R}^d)$, $x \in \mathbf{R}^d$, $f \in \mathbf{R}^1$.

В дальнейшем символами C, K, M мы будем обозначать различные константы, указывая (если нужно) от каких параметров они зависят, например, $K_f, C(f_1, f_2)$. Мы будем говорить, что выполнено условие **C.4.1**, если справедливы следующие оценки:

$$2\langle a(x, f), x \rangle + \sigma^2(A(x, f)) \leq C[1 + \|x\|^2 + |f|^{2p}],$$

$$2\langle a(x, f) - a(y, f), x - y \rangle + \sigma^2(A(x, f) - A(y, f)) \leq L\|x - y\|^2,$$

$$\|a(x, f) - a(x, f_1)\|^2 + \sigma^2(A(x, f) - A(x, f_1)) \leq M_{f, f_1}|f - f_1|^2,$$

где $\sigma^2(A) = \sum_{k=1}^n \|Ae_k\|^2$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ — ортобазис в $\mathbf{R}^d$ и

$$\sup_x \|f_0(x)\| \leq K_0, \quad \sup_x \|\nabla f_0(x)\| \leq K_0^1.$$

Кроме того, мы предположим, что $f_0(x)$ функция класса C^2 .

Для того чтобы построить решение задачи (4.1), рассмотрим систему стохастических уравнений

$$\begin{aligned} d\xi &= -a(\xi(\tau), f(t - \tau, \xi(\tau))) d\tau \\ &+ A(\xi(\tau), f(t - \tau, \xi(\tau))) dw(\tau), \quad \xi(0) = x, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$f(t, x) = \mathbf{E}f_0(\xi_x(t)). \quad (4.3)$$

Решение системы (4.2), (4.3) мы будем строить с помощью метода последовательных приближений

$$\begin{aligned} d\xi^k &= -a(\xi^k(\tau), f^k(t - \tau, \xi^k(\tau))) d\tau \\ &+ A(\xi^k(\tau), f^k(t - \tau, \xi^k(\tau))) dw(\tau), \quad \xi^k(0) = x, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$f^0(t, x) = f_0(x), \quad f^{k+1}(t, x) = \mathbf{E}f_0(\xi^k(t)). \quad (4.5)$$

Для доказательства сходимости системы последовательных приближений (4.4), (4.5) нам понадобится ряд вспомогательных оценок.

Пусть $\mathcal{L}$ — подпространство пространства непрерывных функций $C_0(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^1)$, состоящее из липшицевых функций $f(t, x)$ ($|f(t, x) - f(t, y)|^2 \leq L_f(t)\|x - y\|^2$) на $[0, T] \times \mathbf{R}^d$. Обозначим $K_f = \|f\|_{\mathcal{L}}^2 = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} |f(x)|^2$ норму элемента $f \in \mathcal{L}$.

Пусть скалярная функция $v(s, x)$ удовлетворяет оценкам $\|v(s)\|_{\mathcal{L}} \leq K_v(s) < \infty$, $|v(s, x) - v(s, y)|^2 \leq L_v(s)\|x - y\|^2$, где $L_v(s), K_v(s) < \infty$ для $s \in [0, T]$.

Рассмотрим стохастическое уравнение

$$\begin{aligned}\xi(t) = x - \int_s^t a(\xi(\tau), v(t-\tau, \xi(\tau))) dt \\ + \int_s^t A(\xi(\tau), v(t-\tau, \xi(\tau))) dw.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Если нам нужно будет изучать зависимость решения этого уравнения от параметров, то мы будем обозначать его $\xi_{s,x,v}(t)$, включая в обозначение интересующие нас параметры.

Мы используем обозначения $L_f(t)$ и $K_f(t)$ для минимальных констант, для которых справедливы неравенства $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L_f(t)\|x - y\|$ и $\|f(t)\|_{\mathcal{L}} \leq K_f(t)$.

Лемма 4.1. Пусть выполнено условие **С.4.1**. Тогда существует константа T такая, что решение $\xi_{x,v}(t)$ уравнения (4.6) подчиняется следующим оценкам:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\|\xi(t)\|^2 &\leq \left[\|x\|^2 + \int_s^t K_v(\tau) d\tau\right] \exp\{C(t-s)\}, \\ \mathbf{E}\|\xi_{x,v}(t) - \xi_{y,v}(t)\|^2 &\leq [\|x - y\|^2 + CT] \\ &\quad \times \exp\left\{\int_s^t [L + M_{(v,v)}L_v(t-\tau)] d\tau\right\},\end{aligned}\quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\|\xi_{x,v}(t) - \xi_{x,v_1}(t)\|^2 &\leq \int_s^t M_{(v,v)}\|v(\tau) - v_1(\tau)\|_{\mathcal{L}}^2 d\tau \\ &\quad \times \exp\left\{\int_s^t [L + M_{(v,v)}L_v(t-\tau)] d\tau\right\} \int_s^t L_v(t-\tau) d\tau\end{aligned}\quad (4.8)$$

для $0 \leq s \leq t \leq T$. При этом если $f_0 \in \mathcal{L}$, то при фиксированном t функция $f(t-s, x) = \mathbf{E}f_0(\xi_{s,x}(t))$ удовлетворяет оценкам $\|f(t-s)\|_{\mathcal{L}}^2 \leq K_0^2$ и

$$\begin{aligned}|f(t-s, x) - f(t-s, y)|^2 \\ \leq L_0\|x - y\|^2 \exp\left\{\int_s^t [L + M_{(v,v)}L_v(t-\tau)] d\tau\right\}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Доказательство. Доказательство всех оценок леммы стандартно (см. [11]). Для иллюстрации мы приведем лишь вывод оценки для величины $\mathbf{E}\|\xi_x(t) - \xi_y(t)\|^2$. Воспользовавшись формулой Ито и свойствами стохастического интеграла, мы получим соотношение

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\|\xi_x(t) - \xi_y(t)\|^2 &= \|x - y\|^2 \\ &- \mathbf{E}\left[2 \int_s^t \left\langle a(\xi_x(\tau), v(t-\tau, \xi_x(\tau))) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a(\xi_y(\tau), v(t-\tau, \xi_y(\tau))), \xi_x(\tau) - \xi_y(\tau) \right\rangle d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_s^t \sigma^2 \left[A(\xi_x(\tau), v(t-\tau, \xi_x(\tau))) - A(\xi_y(\tau), v(t-\tau, \xi_y(\tau))) \right] d\tau \right],\end{aligned}$$

из которого, в силу оценок коэффициентов и леммы Гронуолла, вытекает неравенство (4.7).

Аналогично доказываются и другие оценки этой леммы.

Лемма 4.2. Пусть выполнено условие С.4.1. Тогда существуют интервал $[0, T]$ и функции $\alpha(t), \beta(t)$, ограниченные на этом интервале, такие, что если $\|v(t)\|_{\mathcal{L}} \leq \alpha(t)$ и $|v(t, x) - v(t, y)| \leq \beta(t) \|x - y\|$, то

$$\|f(t)\|_{\mathcal{L}}^2 \leq \alpha(t), \quad |f(t, x) - f(t, y)|^2 \leq \beta(t) \|x - y\|^2. \quad (4.10)$$

Доказательство. В условиях леммы в качестве $\alpha(t)$ можно выбрать K_0 . Для доказательства второй оценки заметим, что из (4.9) вытекает, что

$$L_f(t - s) \leq L_0 \exp \left\{ L(t - s) + \int_s^t L_v(t - \tau) d\tau \right\}. \quad (4.11)$$

Выберем в качестве β решение уравнения

$$\beta(t - s) = L_0 \exp \left\{ \int_s^t [L + M\beta(t - \tau)] d\tau \right\}, \quad (4.12)$$

где $M = M_{(v, v)}$, и заметим, что β удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\beta(t - s)}{ds} = [L + M\beta(t - s)]\beta(t - s), \quad \beta(0) = L_0.$$

Решение этого уравнения может быть выписано в явном виде:

$$\beta(t - s) = \frac{L_0 L e^{L(t-s)}}{L + L_0 M - L_0 M e^{L(t-s)}}. \quad (4.13)$$

Таким образом, для $s \in [0, T]$, где T удовлетворяет оценке

$$T < \frac{1}{L} \ln \frac{L + L_0 M}{L_0 M} = T_1, \quad (4.14)$$

соотношение (4.13) задает функцию β , удовлетворяющую требованиям леммы.

Возвращаясь к системе последовательных приближений (4.5), мы можем доказать следующее утверждение.

Теорема 4.1. Пусть выполнено условие С.4.1. Тогда система функций $f^k(t, x)$, удовлетворяющих (4.5), равномерно сходится к функции $f(t, x)$ вида (4.3) для всех $t \in [0, T]$, где T удовлетворяет оценке (4.14).

Доказательство. В силу леммы 4.2 мы знаем, что отображение $\Phi(s, x, v) = Eu_0(\xi_{s, x}(t))$ действует в пространстве $\mathcal{L}$. Оценим разность

$$\varkappa^k(t - s, x) = |f^{k+1}(t - s, x) - f^k(t - s, x)|^2.$$

В силу оценок леммы 4.2 имеем

$$\varkappa^k(t-s, x) \leq [K_0^1]^2 \int_s^t \|f^k(t-\tau) - f^{k-1}(t-\tau)\|_{\mathcal{L}}^2 d\tau \exp \left\{ \int_s^t \beta(t-\tau) d\tau \right\}$$

и, следовательно, $\zeta^k(t-s) = \sup_x \varkappa^k(t-s, x)$ удовлетворяет неравенству $\zeta^k(t-s) \leq \delta^k \int_s^t \dots \int_s^{t_2} \|f^1(t-\tau_1) - f^0\|_{\mathcal{L}}^2 d\tau_1 \dots d\tau_k$, где $\delta = [K_0^1]^2 \exp\{\int_s^t \beta(t-\tau) d\tau\}$. Поскольку f^k равномерно ограничены и $\|f^1(t-s) - f^0\|_{\mathcal{L}} \leq \text{const} < \infty$, то мы получаем $\|f^k(t) - f^{k-1}(t)\|_{\mathcal{L}}^2 \leq (N^k/k!) \text{const}$, где $N = \delta(t-s)$. Отсюда следует, что при каждом $t \in [0, T]$ семейство $f^k(t)$ равномерно сходится к предельной функции $f(t)$. При этом, как нетрудно проверить, предельная функция f также удовлетворяет условию Липшица по пространственной переменной. Действительно, в силу леммы 4.2 для каждого $t \in [0, T]$, $T < T_1$, мы имеем $|f^k(t, x) - f^k(t, y)|^2 \leq \beta(t)\|x - y\|^2$, где $\beta(t)$ определена соотношением (4.13), и полученная оценка равномерна по k .

Для того чтобы доказать единственность построенного таким образом решения, предположим обратное. Пусть $f_1(t, x)$, $f_2(t, x)$ — два решения системы (4.2), (4.3), удовлетворяющие соотношению $f_1(0, x) = f_2(0, x) = f_0(x)$. Как следует из леммы 4.1, $\|f_1(t) - f_2(t)\|_{\mathcal{L}}^2 \leq \int_0^t \|f_1(\tau) - f_2(\tau)\|_{\mathcal{L}}^2 d\tau$, и, следовательно, $\|f_1(t) - f_2(t)\|_{\mathcal{L}}^2 = 0$, откуда вытекает единственность решения.

Далее, липшицевость предельной функции $f(t, x)$ гарантирует единственность марковского процесса $\xi(t)$, удовлетворяющего (4.2), а следовательно, и совпадение функций $u(t, x) = \mathbf{E}f_0(\xi(t)) = f(t, x)$.

Следствие 4.1. Пусть выполнено условие С.4.1. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи Коши (4.1) в классе ограниченных липшицевых функций. Если функция $f(t, x)$ вида (4.3) обладает ограниченными вторыми производными, то (4.3) задает единственное классическое решение задачи (4.1).

Рассмотрим, далее, систему нелинейных параболических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial t} + (a(x, u), \nabla) u_k + B_{kl}^i(x, u) \nabla_i u_l + c_{kl}(x, u) u_l \\ = \frac{1}{2} \text{Tr } A^T(x, u) u_k'' A(x, u), \quad u_k(0, x) = u_{0k}(x), \quad k = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4.15)$$

матрица старших коэффициентов которых кратна единичной, а матрицы коэффициентов членов первого и нулевого порядка недиагональны.

Заметим, что при $a(u) = 0$, $B_{kl}^i(u) = u^i \delta_{kl}$, $c(u) = 0$ и $A = \sigma I$ система (4.15) совпадает с многомерным уравнением Бюргерса, рассмотренным в первом пункте, а рассматриваемый в этом пункте подход является альтернативой использованию формулы Коула–Хопфа. Для того чтобы построить вероятностное представление решения задачи

Коши (4.15), так же как и в пункте 3, мы используем мультипликативные операторные функционалы от марковских процессов.

Как было отмечено выше, систему (4.15) можно интерпретировать как скалярное уравнение вида (3.3) в расширенном фазовом пространстве $Z = \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d_1}$. Ниже мы сформулируем условия, при которых коэффициенты $M(z) = (a(x), b(x)h)$, $D(z) = (A(x), B(x)h)$ этого уравнения будут (в соответствующих нормах) удовлетворять условию **C.4.1**. При этом существование решения задачи Коши с начальными данными $\Phi_0(z) = \langle h, u_0(x) \rangle$ для полученного таким образом скалярного уравнения, а следовательно, и для рассматриваемой системы, также удастся доказать с помощью метода последовательных приближений.

Однако при этом приходится искать решение $\Phi(t, z)$, $z = (x, h) \in Z$ в пространстве Θ функций $\Phi(z)$ линейного роста по дополнительным аргументам $h \in \mathbf{R}^{d_1}$. В связи с этим при доказательстве сходимости последовательных приближений возникают дополнительные трудности, связанные с необходимостью проверять равномерную ограниченность последовательных приближений, которая раньше была гарантирована ограниченностью начальных данных.

Обозначим $\Theta_1 = C_b(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^{d_1})$ множество ограниченных липшицевых функций $\varphi: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^{d_1}$ с нормой $\|\varphi\|_{\Theta_1} = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \|\varphi(x)\|$, $\Theta = \{\Phi: \Phi(z) = \langle h, \varphi(x) \rangle\}$ — линейное пространство с нормой $\|\Phi\|_{\Theta} = \sup_{\|h\|=1} \sup_{x \in \mathbf{R}^d} |\langle h, \varphi(x) \rangle|$, где $\varphi \in \Theta_1$, и заметим, что $\|\Phi\|_{\Theta} = \|\varphi\|_{\Theta_1}$.

Пусть $B = C^T A$, $c(x, u) \in \mathbf{R}^{d_1}$, $C(x, u)y \in L(\mathbf{R}^{d_1})$, $x, y \in \mathbf{R}^d$, $u \in \mathbf{R}^{d_1}$. Сформулируем условия на коэффициенты системы (4.15), достаточные для того, чтобы доказать равномерную сходимость последовательности u^k .

Мы будем говорить, что выполнено условие **C.4.2**, если справедливо условие **C.4.1** и, кроме того, имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} 2\langle c(x, u)h, h \rangle + \sigma^2(C(x, u)h) &\leq [M_0 + M_1\|u\|^2]\|h\|^2, \\ \|[c(x, u) - c(y, u)]h\|^2 + \sigma^2([C(x, u) - C(y, u)]h) \\ &\leq [L\|x - y\|^2 + M_{(u, u_1)}\|u - u_1\|^2]\|h\|^2, \end{aligned}$$

где $L, M_1 > 0$ и M_0 — абсолютные константы, а $M_{(u, u_1)}$ — положительная константа, зависящая от максимума нормы функций u_1 и u .

Рассмотрим систему стохастических уравнений

$$\begin{aligned} d\xi &= -a(\xi(\tau), u(t - \tau, \xi(\tau)))d\tau \\ &\quad + A(\xi(\tau), u(t - \tau, \xi(\tau)))dw(\tau), \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} d\eta(t) &= -c(\xi(\tau), u(t - \tau, \xi(\tau)))\eta(\tau)d\tau \\ &\quad - C(\xi(\tau), u(t - \tau, \xi(\tau)))(\eta(\tau), dw(\tau)), \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\langle h, u(t, x) \rangle = \mathbf{E} \langle \eta(t), u_0(\xi(t)) \rangle, \quad \xi(0) = x, \quad \eta(0) = h. \quad (4.18)$$

Решение системы (4.16)–(4.18) мы будем строить с помощью метода последовательных приближений.

Пусть

$$u^0(t, x) = u_0(x), \quad \xi^0(t) = x, \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} d\xi^k &= -a(\xi^k(\tau), u^k(t - \tau, \xi^k(\tau))) d\tau \\ &\quad + A(\xi^k(\tau), u^k(t - \tau, \xi^k(\tau))) dw(\tau), \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} d\eta^k(t) &= -c(\xi^k(\tau), u^k(t - \tau, \xi^k(\tau))) \eta^k(\tau) d\tau \\ &\quad - C(\xi^k(\tau), u^k(t - \tau, \xi^k(\tau))) (\eta^k(\tau), dw(\tau)), \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\langle h, u^{k+1}(t, x) \rangle = \mathbf{E} \langle \eta^k(t), u_0(\xi^k(t)) \rangle, \quad \xi^k(0) = x, \quad \eta^k(0) = h. \quad (4.22)$$

Для доказательства равномерной ограниченности семейства $u^k(t, x)$, или, эквивалентно, семейства $\Phi^k(t, z) = \langle h, u^k(t, x) \rangle$, мы используем следующее утверждение.

Рассмотрим систему стохастических уравнений

$$\begin{aligned} d\xi &= -a(\xi(\tau), v(t - \tau, \xi(\tau))) d\tau \\ &\quad + A(\xi(\tau), v(t - \tau, \xi(\tau))) dw(\tau), \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} d\eta(t) &= -c(\xi(\tau), v(t - \tau, \xi(\tau))) \eta(\tau) d\tau \\ &\quad - C(\xi(\tau), v(t - \tau, \xi(\tau))) (\eta(\tau), dw(\tau)), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\xi(0) = x, \quad \eta(0) = h,$$

где $v(t, x)$ — заданная ограниченная липшицева функция,

$$\sup_x \|v(t, x)\| = K_v(t) \quad \text{и} \quad \|v(t, x) - v(t, y)\| \leq L_v(t) \|x - y\|.$$

Лемма 4.3. Пусть выполнено условие **С.4.2**. Тогда решение $\eta(t)$ уравнения (4.24) подчиняется оценке

$$\mathbf{E} \|\eta(t)\|^2 \leq \|h\|^2 \exp \left\{ \int_s^t [M_0 + M_1 K_v^2(t - \tau)] d\tau \right\}.$$

Доказательство этой оценки вновь получается с помощью формулы Ито и леммы Гронуолла с учетом оценок коэффициентов, аналогично тому, как доказываются оценки леммы 4.1.

Лемма 4.4. Пусть выполнено условие **С.4.2**, $\sup_x \|u_0(x)\| = K_0$ и функция $\Psi(t, z)$ задана соотношением

$$\Psi(t, z) = \mathbf{E} \Phi_0(\zeta_{0,z}(t)), \quad (4.25)$$

где $\zeta(t) = (\xi(t), \eta(t))$ удовлетворяет соотношениям

$$d\zeta = N_{\Phi}(\zeta(t)) dt + D_{\Phi}(\zeta(t)) dw, \quad \zeta(0) = z, \quad (4.26)$$

а случайные процессы $\xi(t), \eta(t)$ подчиняются соотношениям (4.23), (4.24). Тогда существует интервал Δ_1 такой, что $\Psi(t)$ ограничена в норме пространства Θ для всех $t \in \Delta_1$, если Φ ограничена в этой норме или, эквивалентно, функция $g(t, x)$, заданная соотношением

$$\langle h, g(t-s, x) \rangle = \mathbf{E} \langle \eta(t), u_0(\xi(t)) \rangle, \quad (4.27)$$

ограничена в норме пространства Θ_1 для всех $t \in \Delta_1$, если v ограничена в норме Θ_1 .

Доказательство. Пусть $\gamma(t)$ — положительная функция такая, что

$$K_v(t) = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \|v(t, x)\| \leq \gamma(t)$$

для всех $t \in [0, T]$. Докажем, что существует интервал $\Delta_2 = [0, T_2]$, где $T_2 \leq T$, такой, что $K_g(t) \leq \gamma(t)$ для всех $t \in \Delta_2$.

Из леммы 4.1 и условий на коэффициенты вытекает оценка

$$\|g(t-s)\|_{\Theta_1}^2 \leq K_0^2 \exp \left\{ \int_s^t [M_0 + M_1 K_v^2(t-\tau)] d\tau \right\}.$$

Заметим, что без ограничения общности мы можем считать, что $K_g(t) > 1$. Используя рассуждения аналогичные тем, что были проведены при доказательстве леммы 4.2, нетрудно показать, что функция γ вида

$$\gamma(t-s) = \frac{M_0 K_0^2 e^{[M_0 + M_1](t-s)}}{M_0 + M_1 K_0^2 - M_1 K_0^2 e^{(M_0 + M_1)(t-s)}} \quad (4.28)$$

обладает требуемыми свойствами, а именно, если $K_v(\tau) \leq \gamma(\tau)$, то $K_g(\tau) \leq \gamma(\tau)$. Из соотношения (4.28) следует, что $\gamma(\tau)$ ограничена на всем интервале $[0, T]$, если $M_0 + M_1 K_0^2 \leq 0$. Если же $M_0 + M_1 K_0^2 > 0$, то $\gamma(\tau)$ ограничена на интервале $\Delta_2 = [s, T_2]$, длина которого подчиняется оценке

$$|T_2 - s| < \frac{1}{M_0 + M_1} \ln \left[1 + \frac{M_0 + M_1}{M_1 K_0^2} \right]. \quad (4.29)$$

Из леммы 4.2 вытекает равномерная ограниченность семейства $u^k(t, x)$.

Равномерную липшицевость семейства $u^k(t, x)$ мы получим как следствие равномерной ограниченности семейства $\nabla u^k(t, x)$, имеющего вид

$$\langle h, \nabla u^{k+1}(t, x) \rangle = \mathbf{E} \langle \beta^k(t), u_0(\xi^k(t)) \rangle + \langle \eta^k(t), \nabla u_0(\xi^k(t)) \alpha^k(t) \rangle, \quad (4.30)$$

где $\alpha^k(t)$, $\beta^k(t)$ — последовательные приближения решений следующих стохастических уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha(t) = & y - \int_0^t \nabla a(\xi(\tau), u(t-\tau, \xi(\tau))) \alpha(\tau) d\tau \\ & + \int_0^t \nabla A(\xi(\tau), u(t-\tau, \xi(\tau))) (\alpha(\tau), dw(\tau)), \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \beta(t) = & - \int_0^t \nabla c(\xi(\tau), u(t-\tau, \xi(\tau))) (\alpha(\tau), \eta(\tau)) d\tau \\ & - \int_0^t c(\xi(\tau), u(t-\tau, \xi(\tau))) \beta(\tau) d\tau \\ & - \int_0^t C(\xi(\tau), u(t-\tau, \xi(\tau))) (\beta(\tau), dw) \\ & - \int_0^t \nabla C(\xi(\tau), u(t-\tau, \xi(\tau))) (\alpha(\tau), \eta(\tau)) dw(\tau), \end{aligned} \quad (4.32)$$

и использованы обозначения $\nabla_y a(x, v(x)) = \nabla a(x, v(x)) y$.

Заметим, что соотношение

$$\langle h, \nabla_y u(t, x) \rangle = \mathbf{E} \langle \beta(t), u_0(\xi(t)) \rangle + \langle \eta(t), \nabla u_0(\xi(t)) \alpha(t) \rangle \quad (4.33)$$

замыкает систему соотношений (4.16)–(4.18) и (4.31), (4.32).

Предположим, что производные коэффициентов системы (4.16)–(4.18) по переменным x и v таковы, что

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{x,y}(m) &= (a(x, v(x)), \nabla a(x, v(x)) y), \\ \tilde{A}_{x,y}(m) &= (A(x, v(x)), \nabla A(x, v(x)) y), \\ \tilde{c}_{x,y}(m) &= (c(x, v(x)) y, \nabla c(x, v(x)) y), \\ \tilde{C}_{x,y}(m) &= (C(x, v(x)) y, \nabla C(x, v(x)) y), \end{aligned}$$

где $m = (v, \nabla v)$, удовлетворяют в соответствующих нормах условию **С.4.2**.

Точнее, мы будем говорить, что выполнены условия **С.4.3**, если наряду с **С.4.2** справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\nabla_y a(x, v(t, x))\|^2 + \sigma^2(\nabla_y A(x, v(t, x))) &\leq \dot{N}_{(v, D_x v)}(t) \|y\|^2, \\ \|\nabla_y [c(v(t, x)) h]\|^2 + \sigma^2(\nabla_y [C(v(t, x)) h]) &\leq G_{(v, D_x v)}(t) \|h\|^2 \|y\|^2 \end{aligned}$$

с положительными константами N, G , зависящими от функции v и ее градиента.

Предположим вначале, что в правой части уравнений (4.31) и (4.32) коэффициенты зависят от известной функции $u(t, x) \equiv v(t, x)$, и заметим, что структура системы (4.23), (4.24), (4.31), (4.32) совпадает со структурой самой системы (4.23), (4.24), поскольку набор уравнений (4.24),

(4.31), (4.32) можно интерпретировать как одно линейное уравнение относительно процесса $\zeta(t) = (\beta(t), \alpha(t) \times \eta(t))$ со значениями в линейном пространстве $\Pi = \mathbf{R}^{d_1} \oplus (\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d_1})$. Обозначим $G \oplus H = G \otimes I + I \otimes H$ тензорную сумму операторов (или оператор — в пространстве Π), действующую по правилу $(G \oplus H)(h, y) = Gh \otimes y + h \otimes Hy$, и используем обозначение $\widehat{D_x c}, \widehat{D_x C} w$ для линейных операторов, действующих из $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{d_1}$ в $\mathbf{R}^{d_1}$ следующим образом: $\widehat{D_x c}(\alpha \otimes \eta) = D_x c(\alpha, \eta)$ и $\widehat{D_x C}(\alpha \otimes \eta) w = D_x C(\alpha, \eta, w)$. Используя введенные обозначения, перепишем систему (4.24), (4.30), (4.31) в виде одного линейного уравнения

$$d\zeta = r(\xi(t), V(t, \xi(t))) \zeta(t) dt + R(\xi(t), V(t, \xi(t))) (\zeta(t), dw), \quad (4.34)$$

где $V = (v, \nabla v)$,

$$\begin{aligned} r \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \otimes \eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -c & -\widehat{D_x c} \\ 0 & -D_x a \oplus -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \otimes \eta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -c\beta - D_x c(\alpha, \eta) \\ -D_x a \alpha \otimes \eta + \alpha \otimes -c\eta \end{pmatrix}, \\ R \left(\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \otimes \eta \end{pmatrix}, w \right) &= \begin{pmatrix} -C & -\widehat{D_x C} \\ 0 & D_x A \oplus -C \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \otimes \eta \end{pmatrix}, w \right) \\ &= \begin{pmatrix} -C(\beta, w) - D_x C(\alpha, \eta, w) \\ D_x A(\alpha, w) \otimes \eta + \alpha \otimes (-C(\eta, w)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Предполагая далее, что r и R в соответствующих нормах удовлетворяют условиям типа **C.4.2** и $G(t, x) = (g(t, x), \nabla g(t, x))$, применим лемму 4.4 к функции $\langle \gamma, G(t, x) \rangle_\Pi = \mathbf{E} \langle \zeta(t), G_0(\xi(t)) \rangle_\Pi$. Здесь $\gamma = \zeta(0)$ и

$$\left\langle \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \otimes \eta \end{pmatrix}, G(t, x) \right\rangle_\Pi = \langle \beta, g(t, x) \rangle_{\mathbf{R}^{d_1}} + \langle \eta, \nabla g(t, x) \alpha \rangle_{\mathbf{R}^{d_1}}.$$

При этом описанные выше рассуждения позволяют утверждать, что существует интервал $\Delta_3 = [0, T_3]$ такой, что вектор-функции $g(t, x)$, $\nabla g(t, x)$ ограничены для всех $0 \leq t \leq T_3$, если $v(t, x)$, $\nabla v(t, x)$ ограничены.

Сходимость последовательных приближений $u^k(t, x)$, $\nabla u^k(t, x)$ функции $u(t, x)$ и ее градиента, так же как и в доказательстве теоремы 4.1, вытекает из их равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности для всех $t \in \Delta_4 = \Delta_2 \cap \Delta_3$.

В результате, в силу описанных выше оценок, мы приходим к выводу, что на интервале Δ_4 существует единственное решение задачи Коши (4.15) в классе C^1 -гладких ограниченных функций.

Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 4.1, можно показать, что семейство функций вида

$$\Psi^{k+1}(t, z) = \langle h, u^{k+1}(t, x) \rangle = \mathbf{E} \langle \eta^k(t), \varphi(\xi^k(t)) \rangle = \mathbf{E} \Phi(\zeta^k(t)),$$

где $\xi^k(t)$ и $\eta^k(t)$ определяются соотношениями (4.20) и (4.21), сходится к предельной функции $\Psi(t, z) = \mathbf{E}\Phi(\zeta(t))$, которая принадлежит классу Θ . Здесь $\zeta(t) = (\xi(t), \eta(t))$ задается системой (4.16), (4.17). В других терминах соответствующий результат состоит в утверждении, что семейство функций $u^k(t)$ равномерно сходится к функции $u(t)$, заданной соотношением $\langle h, u(t, x) \rangle = \mathbf{E}\langle \eta(t), u_0(\xi(t)) \rangle$, которая принадлежит классу Θ_1 .

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия С.4.2, С.4.3. Тогда существует интервал $[0, T]$ такой, что система вектор-функций $u^k(t)$, удовлетворяющих (4.22), равномерно сходится к вектор-функции $u(t)$ вида (4.18) для всех $t \in [0, T]$.

Отметим, не приводя подробных рассуждений, что на этом пути может быть доказано существование гладких решений у уравнения (4.1) и системы (4.15) при достаточной гладкости коэффициентов и начальных данных. При этом длины соответствующих интервалов, на которых производные ограничены, снова должны быть определены с помощью процедуры аналогичной той, что была описана выше. Подробное описание этой процедуры можно найти в [10], [11].

Следствие 4.2. Пусть выполнены условия С.4.2, С.4.3. Тогда в классе Θ_1 существует единственное обобщенное решение задачи (4.15). Если вектор-функция $u(t, x)$ вида (4.18) обладает ограниченными вторыми производными, то (4.18) задает единственное классическое решение задачи (4.15).

5. Метод исчезающей вязкости для нелинейных уравнений и систем. В этом пункте мы покажем, что изучение семейства параболических уравнений и систем с исчезающим коэффициентом диффузии (вязкости) в определенных случаях позволяет получить дополнительную информацию о решениях соответствующих гиперболических систем. Отметим, что при изучении решения задачи Коши для скалярных уравнений предельный переход при $A \rightarrow 0$ допускает естественное обоснование на языке стохастических уравнений. Ситуация усложняется при рассмотрении систем типа (4.15). Действительно, непосредственный выбор $A \equiv 0$ в системе (4.15), вообще говоря, приводит одновременно к исчезновению и недиагонального члена, содержащего первые производные, ввиду соотношения $B = C^T A$. С другой стороны, выбор $A_\varepsilon = \varepsilon A$, $C_\varepsilon = \varepsilon^{-1} C$, сохраняя необходимые члены в (4.15), приводит к необходимости изучать линейное стохастическое уравнение вида (4.17) с сингулярным коэффициентом диффузии. Для преодоления этой трудности можно воспользоваться конструкциями, описанными в п. 2.

Известно, что метод исчезающей вязкости играет важную роль в построении разрывных решений гиперболических уравнений и систем. Заметим, что описанные в предыдущем пункте конструкции могут быть

использованы и для построения разрывных решений гиперболических уравнений и систем, понимаемых как обобщенные решения в смысле соответствующих интегральных тождеств.

Рассмотрим задачу Коши для нелинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t} + v^\varepsilon \nabla_b v^\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta v^\varepsilon, \quad v^\varepsilon(0, x) = v_0(x) \quad (5.1)$$

относительно скалярной функции $v^\varepsilon(t, x)$, $x, b \in \mathbf{R}^d$, $t \in [0, \infty)$.

Как следует из результатов предыдущего пункта, при выполнении условий **С.4.1** решение задачи (5.1) может быть сведено к решению следующей стохастической задачи:

$$d\xi_x^\varepsilon = -v^\varepsilon(t - \tau, \xi_x^\varepsilon(\tau)) b d\tau + \varepsilon dw(\tau), \quad \xi^\varepsilon(0) = x, \quad (5.2)$$

$$v^\varepsilon(t, x) = \mathbf{E} v_0(\xi_x^\varepsilon(t)). \quad (5.3)$$

При этом процесс $\xi^\varepsilon(t)$ непрерывно зависит от параметра ε , так что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}\{\|\xi^\varepsilon(t) - \xi^0(t)\| > \varepsilon_1\} = 0$ для любого положительного ε_1 . Предельная кривая $\xi^0(t) = y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$y(t) = x - \int_0^t v(t - \tau, y(\tau)) b d\tau \quad (5.4)$$

и совпадает с характеристикой нелинейного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla_b v = 0. \quad (5.5)$$

При переходе к изучению систем параболических уравнений с исчезающей вязкостью мы сталкиваемся с новыми трудностями.

Рассмотрим задачу Коши для системы параболических уравнений

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + (a(u^\varepsilon), \nabla) u^\varepsilon + B(u^\varepsilon) \circ \nabla u^\varepsilon + c(u^\varepsilon) u^\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{Tr} A(u) [u^\varepsilon]'' A(u), \quad (5.6)$$

$$u^\varepsilon(0, x) = u_0(x).$$

Как и в п. 3, для того чтобы свести задачу (5.6) к стохастической задаче, мы введем $C^\varepsilon(x, u) = \{\varepsilon^{-1} C_{ki}^l(x, u)\}$ ($k, l = 1, \dots, d_1$, $i = 1, \dots, d$) соотношением $B(x, u) = (C^\varepsilon)^T(x, u) \circ \varepsilon A(x, u)$, так что $B_{kl}^i = \sum_{j=1}^d C_{lk}^j A_{ij}$. Кроме того, мы предположим, что векторное поле $a(x, u) \in \mathbf{R}^d$ и операторное поле $A(x, u)$, а также $c(x, u) \in L(\mathbf{R}^{d_1})$ и $B(x, u) \in L(\mathbf{R}^{d_1} \times \mathbf{R}^d, \mathbf{R}^{d_1})$ удовлетворяют условию **С.4.2**.

Рассмотрим систему стохастических уравнений

$$d\xi^\varepsilon = a(\xi^\varepsilon(\tau), u^\varepsilon(t - \tau, \xi^\varepsilon(\tau))) d\tau$$

$$+ \varepsilon A(\xi^\varepsilon(\tau), u^\varepsilon(t - \tau, \xi^\varepsilon(\tau))) dw(\tau), \quad (5.7)$$

$$d\eta^\varepsilon = -c\left(\xi^\varepsilon(\tau), u^\varepsilon(t-\tau, \xi^\varepsilon(\tau))\right)\eta(\tau) d\tau - \varepsilon^{-1}C_u\left(\xi^\varepsilon(\tau), u^\varepsilon(t-\tau, \xi^\varepsilon(\tau))\right)(\eta^\varepsilon(\tau), dw(\tau)) \quad (5.8)$$

и добавим замыкающее соотношение

$$\langle h, u^\varepsilon(t, x) \rangle = \mathbf{E} \langle \eta^\varepsilon(t), u_0(\xi^\varepsilon(t)) \rangle, \quad \xi(0) = x \in \mathbf{R}^d, \quad \eta^\varepsilon(0) = h \in \mathbf{R}^{d_1}. \quad (5.9)$$

При фиксированном ε системы вида (5.6) и (5.7)–(5.9) были рассмотрены в предыдущем пункте. Как следует из теоремы 4.2, при выполнении условий **C.4.2**, **C.4.3** существует единственное решение системы (5.7)–(5.9), заданное на некотором интервале $[0, T]$, зависящем от параметров задачи. При этом функция $u^\varepsilon(t, x)$, заданная соотношением (5.9), представляет собой обобщенное решение задачи (5.6). Если, кроме того, удастся доказать, что $u^\varepsilon(t, x)$ — достаточно гладкая функция, то (5.9) определяет единственное классическое решение системы (5.6).

Чтобы обосновать предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, рассмотрим для простоты систему вида (5.6), полагая $c(x, u) = 0$. Заметим, что, в отличие от рассмотренного выше в этом пункте случая скалярного параболического уравнения и связанного с ним диффузионного процесса, в уравнении (5.8) системы (5.7)–(5.9) невозможен непосредственный предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Однако мы можем воспользоваться соображениями, описанными в п. 3, распространив их на рассматриваемый случай.

Рассмотрим вначале случай $d = 1$. Решение $\eta^\varepsilon(t)$ уравнения (5.8) порождает мультипликативный операторный функционал $V^\varepsilon(t, s, \xi^\varepsilon(\cdot))$, заданный соотношением $\eta^\varepsilon(t) = V^\varepsilon(t, s, \xi^\varepsilon(\cdot))h$. Мы будем использовать обозначение $V(t)$, если $s = 0$ и процесс $\xi^\varepsilon(t)$ фиксирован. Функционал $V(t)$ может быть представлен в виде

$$V^\varepsilon(t) = \exp \left\{ -\varepsilon^{-1} \int_0^t C\left(\xi^\varepsilon(\tau), u^\varepsilon(t-\tau, \xi^\varepsilon(\tau))\right) dw(\tau) - \int_0^t \frac{\varepsilon^{-2}}{2} C^2\left(\xi^\varepsilon(\tau), u^\varepsilon(t-\tau, \xi^\varepsilon(\tau))\right) d\tau \right\}. \quad (5.10)$$

Мы будем говорить, что выполнены условия **C.5.1**, если $d = 1$ и $C(x, u)$ имеет набор из d_1 собственных векторов $e_1, \dots, e_{d_1}$ с различными собственными значениями $\lambda_1(x, u), \dots, \lambda_{d_1}(x, u)$. При этом, как было показано в п. 3, соотношение (5.9) приобретает вид

$$\langle e_\alpha, u^\varepsilon(t, x) \rangle = \mathbf{E} \exp \left\{ -\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_\alpha(\xi^\varepsilon(\tau), u^\varepsilon(t-\tau, \xi^\varepsilon(\tau))) dw(\tau) - \frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \int_0^t \lambda_\alpha^2(\xi^\varepsilon(\tau), u^\varepsilon(t-\tau, \xi^\varepsilon(\tau))) d\tau \right\} \tilde{u}_{0\alpha}(\xi^\varepsilon(t)), \quad (5.11)$$

где $\tilde{u}_\alpha = \langle u, e_\alpha \rangle$. Наконец, используя теорему Гирсанова, мы сведем (5.11) к соотношению

$$\langle e_\alpha, u^\varepsilon(t, x) \rangle = \mathbf{E} \tilde{u}_{0\alpha}(\gamma_\alpha^\varepsilon(t)), \quad (5.12)$$

где случайный процесс $\gamma_\alpha^\varepsilon(t)$ задается как решение стохастического уравнения

$$\begin{aligned} d\gamma_\alpha^\varepsilon = & -\lambda_\alpha(\gamma_\alpha^\varepsilon(\tau), u^\varepsilon(t-\tau, \gamma_\alpha^\varepsilon(\tau))) d\tau \\ & + \varepsilon A(\gamma_\alpha^\varepsilon(\tau), u^\varepsilon(t-\tau, \gamma_\alpha^\varepsilon(\tau))) dw, \end{aligned} \quad (5.13)$$

удовлетворяющее условию $\gamma_\alpha^\varepsilon(0) = x \in \mathbf{R}^1$.

Теорема 5.1. *Предположим, что: 1) выполнено условие **С.5.1**; 2) $A(x, u)$ и собственные числа $\lambda_\alpha(x, u)$ матрицы $B(x, u)$ удовлетворяют условиям типа **С.4.1**. Тогда существует единственное решение задачи Коши*

$$u_t^\varepsilon + B(u^\varepsilon) u_x^\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{2} A^2(x, u^\varepsilon) u_{xx}^\varepsilon, \quad u^\varepsilon(0, x) = u_0(x), \quad (5.14)$$

допускающее представление $u^\varepsilon(t, x) = \sum_{\alpha=1}^{d_1} \mathbf{E} \tilde{u}_{0\alpha}(\gamma_\alpha^\varepsilon(t)) e_\alpha$, где $\gamma_\alpha(t)$ определяется соотношениями (5.12), (5.13).

Доказательство. Как было показано выше, при выполнении **С.5.1** решение системы уравнений (5.7)–(5.9) можно свести к решению набора из d_1 систем (5.12), (5.13). Далее, условия **С.5.1** и **С.4.1** для $\lambda_\alpha(x, u)$ и $A(x, u)$ гарантируют в силу теоремы 5.1 и результатов п. 5 существование и единственность (локального по времени) решения систем (5.12), (5.13). Наконец, как вытекает из следствия 5.1, соотношения $\tilde{u}_\alpha(t, x) = \mathbf{E} \tilde{u}_{0\alpha}(\gamma_\alpha(t))$ и $u(t, x) = \sum_{\alpha=1}^{d_1} \tilde{u}_\alpha(t, x) e_\alpha$ определяют единственное в классе Θ_1 решение задачи (5.6).

Следствие 5.1. *Процесс $\gamma_\alpha^\varepsilon(t)$, удовлетворяющий (5.13), сходится по вероятности к кривой $\gamma_\alpha(t)$, удовлетворяющей обыкновенному дифференциальному уравнению $d\gamma_\alpha = \lambda_\alpha(u(t-\tau, \gamma_\alpha(\tau))) d\tau$, и вектор-функция $u^\varepsilon(t, x)$, заданная соотношением (5.12), при почти всех $t \in \Delta$, $x \in \mathbf{R}^1$ сходится при этом к решению $u(t, x)$ задачи Коши для гиперболической системы*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + B(u) u_x = 0, \quad u(0, x) = u_0(x). \quad (5.15)$$

Рассмотрим теперь многомерную ($d > 1$) систему параболических уравнений вида (5.6) и соответствующую ей стохастическую систему (5.7)–(5.9).

Мы будем говорить, что выполнено условие **С.5.2**, если матрица $C(x, u, y) = \sum_{i=1}^d C^i(x, u) y_i$ обладает вещественным спектром, ее собственные числа $\lambda_\alpha(x, u, y)$ допускают представление $\lambda_\alpha(x, u, y) = \langle \tilde{\lambda}_\alpha(x, u), y \rangle$ и максимальная длина жордановой клетки равна 1. При

этом мы предполагаем, что $\tilde{\lambda}_\alpha(x, u)$ удовлетворяют оценкам в С.4.1. Обозначим $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^{d_1}$ соответствующий жорданов базис в $\mathbf{R}^{d_1}$.

Повторяя описанные выше рассуждения, нетрудно показать, что справедлив следующий результат.

Теорема 5.2. Пусть выполнены условия С.5.2. Тогда решение задачи (5.6) допускает следующее представление: $u^\varepsilon(t, x) = \sum_{\alpha=1}^{d_1} \tilde{u}_\alpha^\varepsilon(t, x) e_\alpha$, где функции u_α допускают представление $\tilde{u}_\alpha^\varepsilon(t, x) = \mathbf{E} \tilde{u}_{0\alpha}(\gamma_\alpha^\varepsilon(t))$, а случайные процессы $\gamma_\alpha(t)$ определяются из решения систем

$$\begin{aligned} d\gamma_\alpha^\varepsilon(t) &= -\tilde{\lambda}_\alpha(\gamma_\alpha^\varepsilon(\tau), u^\varepsilon(t-\tau, \gamma_\alpha^\varepsilon(\tau))) d\tau \\ &\quad + \varepsilon A(\gamma_\alpha^\varepsilon(\tau), u^\varepsilon(t-\tau, \gamma_\alpha^\varepsilon(\tau))) dw(\tau), \\ \tilde{u}_\alpha^\varepsilon(t, x) &= \mathbf{E} \tilde{u}_{0\alpha}(\gamma_\alpha^\varepsilon(t)), \quad \gamma_\alpha^\varepsilon(0) = x \in \mathbf{R}^d. \end{aligned}$$

При этом с вероятностью 1 существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\alpha^\varepsilon(t) = \gamma_\alpha^0(t)$ и при каждом $x \in \mathbf{R}^d$ существует предел $u(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(t, x)$.

6. Вероятностный подход к уравнениям газовой динамики.

В этом пункте мы построим вероятностное представление решения задачи Коши для параболической регуляризации многомерной системы уравнений Эйлера и обсудим возможность построения решения задачи Коши для самой системы уравнений Эйлера предельным переходом по исчезающей вязкости. Поскольку нас интересуют гладкие решения системы Эйлера, то мы предварительно сведем ее к некоторой другой системе и построим ее параболическую регуляризацию. Отметим, что, в отличие от одномерного случая, спектр соответствующей матрицы $B(y) = B^i y_i$, $y \in \mathbf{R}^3$, не является простым, так как собственное число 0, принадлежащее этому спектру, имеет кратность 3. Однако жорданова форма этой матрицы диагональна, что позволит воспользоваться результатами предыдущего пункта для построения вероятностного представления решения задачи Коши для параболической регуляризации системы уравнений Эйлера и обоснования возможности предельного перехода при исчезающей вязкости.

Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений Эйлера

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ (\rho v)_t + \nabla[\rho(v, v) + p] = 0, \\ (\rho E)_t + \operatorname{div}[\rho E v + p v] = 0, \end{cases} \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbf{R}^3, \quad (6.1)$$

$$\rho(0, x) = \rho_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x), \quad E(0, x) = E_0(x).$$

Мы сведем систему (6.1) к системе вида

$$\frac{\partial u^{\varepsilon k}}{\partial t} + B_{ik}^i(u^\varepsilon) \nabla_{x_i} u^{\varepsilon l} = 0 \quad (6.2)$$

относительно векторной функции $u = (u_1, \dots, u_5) = (\rho, v^1, v^2, v^3, e)$, где $E = e + \frac{1}{2} \|v\|^2$, и изучим ее параболическую регуляризацию

$$\frac{\partial u^{\varepsilon k}}{\partial t} + B_{ik}^i(u^\varepsilon) \nabla_{x_i} u^{\varepsilon l} = \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta u^{\varepsilon k}. \quad (6.3)$$

Здесь $u^\varepsilon = (u^{\varepsilon 1}, \dots, u^{\varepsilon 5}) = (\rho^\varepsilon, v^{\varepsilon 1}, v^{\varepsilon 2}, v^{\varepsilon 3}, e^\varepsilon)$ и явный вид матрицы $B(y) = B^i y_i$, $i = 1, 2, 3$, задан соотношением

$$B(y) = \begin{pmatrix} 0 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ \gamma_3 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 \\ 0 & \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\gamma_i = \gamma y_i$, $\beta_i = \beta y_i$, $\kappa_i = \kappa y_i$, $\rho_i = \rho y_i$, $i = 1, 2, 3$.

Из соотношения $\det(B(y) - \lambda I) = 0$ следует, что $\lambda^3(\lambda^2 - \sigma^2[l(y)]^2) = 0$, где $l(y)$ — линейный функционал на $\mathbf{R}^3$ и матрица $B(y)$ имеет собственные числа

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = \sigma, \quad \lambda_5 = -\sigma. \quad (6.4)$$

Здесь $\sigma = \sqrt{\rho\gamma + \kappa\beta}$ — это скорость звука.

Пусть e_α , $\alpha = 3, 4, 5$, — собственные векторы, соответствующие различным собственным числам λ_α . Отметим, что жорданова форма матрицы $B(y)$ диагональна, так как максимальная длина жордановой клетки, соответствующей трехкратному собственному числу $\lambda = 0$, равна 1. Действительно, ранг m_0 матрицы $B(y)$ равен 2, т.е. справедливо соотношение $r(B(y)^m) = d_1 - m_0 = 5 - 3 = 2$ при $m = 1$, откуда и следует сформулированное утверждение. Таким образом, мы можем применить развитую в этой работе технику для построения вероятностного представления решения задачи Коши для системы (6.3).

Пусть $w(t) \in \mathbf{R}^3$ — стандартный винеровский процесс, $\{e_1, e_2, e_3\}$ — стандартный базис в $\mathbf{R}^3$, а $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_5$ — стандартный базис в $\mathbf{R}^5$.

Вероятностная модель, соответствующая (6.3), имеет вид

$$d\xi^{\varepsilon i} = -v^i(t - \tau, \xi^\varepsilon(\tau)) d\tau + \varepsilon dw^i, \quad \xi(0) = x \in \mathbf{R}^3, \quad (6.5)$$

$$d\eta_i^\varepsilon = -\varepsilon^{-1} B_{ik}^i(u^\varepsilon(t - \tau, \xi^\varepsilon(\tau))) \eta_k^\varepsilon(\tau) dw^i(\tau), \quad \eta(0) = h \in \mathbf{R}^5, \quad (6.6)$$

$$\langle h, u^\varepsilon(t, x) \rangle = \mathbf{E} \langle \eta^\varepsilon(t), u_0(\xi^\varepsilon(t)) \rangle. \quad (6.7)$$

Воспользовавшись явным видом тензора B , нетрудно проверить, что система стохастических уравнений, которой удовлетворяют процессы $\eta_k^\varepsilon(t)$, имеет вид

$$d\eta_1^\varepsilon = -\varepsilon^{-1} \rho^\varepsilon(t - \tau, \xi^\varepsilon(\tau)) [\eta_2^\varepsilon(\tau) dw_1 + \eta_3^\varepsilon(\tau) dw_2 + \eta_4^\varepsilon(\tau) dw_3], \quad (6.8)$$

$$d\eta_2^\varepsilon = -\varepsilon^{-1} [\gamma^\varepsilon(t - \tau, \xi^\varepsilon(\tau)) \eta_1^\varepsilon(\tau) dw_1 + \beta^\varepsilon(t - \tau, \xi^\varepsilon(\tau)) \eta_5^\varepsilon(\tau) dw_1], \quad (6.9)$$

$$d\eta_3^\varepsilon = -\varepsilon^{-1} \left[\gamma^\varepsilon(t - \tau, \xi^\varepsilon(\tau)) \eta_1^\varepsilon(\tau) dw_2 + \beta^\varepsilon(t - \tau, \xi^\varepsilon(\tau)) \eta_5^\varepsilon(\tau) dw_2 \right], \quad (6.10)$$

$$d\eta_4^\varepsilon = -\varepsilon^{-1} \left[\gamma^\varepsilon(t - \tau, \xi^\varepsilon(\tau)) \eta_1^\varepsilon(\tau) dw_3 + \beta^\varepsilon(t - \tau, \xi^\varepsilon(\tau)) \eta_5^\varepsilon(\tau) dw_3 \right], \quad (6.11)$$

$$d\eta_5^\varepsilon = -\varepsilon^{-1} \chi^\varepsilon(t - \tau, \xi^\varepsilon(\tau)) \left[\eta_2^\varepsilon(\tau) dw_1 + \eta_3^\varepsilon(\tau) dw_2 + \eta_4^\varepsilon(\tau) dw_3 \right]. \quad (6.12)$$

Поскольку матрица $B^i y_i$ имеет собственные числа $\lambda_\alpha(y)$ вида (6.4) и максимальная высота жордановых клеток в жордановом представлении этой матрицы, соответствующем жорданову базису $\{f_\alpha\}_{\alpha=1}^5$, равна 1, то, как следует из результатов предыдущего пункта, справедливо соотношение

$$\tilde{u}_\alpha^\varepsilon(t, x) = \mathbf{E} \tilde{u}_{0\alpha}(\gamma_\alpha^\varepsilon(t)), \quad \alpha = 1, \dots, 5, \quad (6.13)$$

для компонент $\tilde{u}_\alpha^\varepsilon = \langle u^\varepsilon, f_\alpha \rangle$ вектора u^ε в базисе $f_1, \dots, f_5$. Здесь процессы $\gamma_\alpha^\varepsilon(t) \in \mathbf{R}^3$ удовлетворяют уравнениям

$$d\gamma_\alpha^{\varepsilon i} = -v^{\varepsilon i}(t - \tau, \gamma_\alpha^{\varepsilon i}(\tau)) d\tau + \varepsilon dw^i(\tau), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (6.14)$$

$$d\gamma_4^{\varepsilon i}(t) = \left[\sigma(t - \tau, \gamma_4^\varepsilon(\tau)) - v^{\varepsilon i}(t - \tau, \gamma_4^\varepsilon(\tau)) \right] d\tau + \varepsilon dw^i(\tau), \quad (6.15)$$

$$d\gamma_5^{\varepsilon i}(t) = \left[-\sigma(t - \tau, \gamma_5^\varepsilon(\tau)) - v^{\varepsilon i}(t - \tau, \gamma_5^\varepsilon(\tau)) \right] d\tau + \varepsilon dw^i(\tau), \quad (6.16)$$

$i = 1, 2, 3$. Далее для построения гладкого решения задачи Коши для системы Эйлера остается лишь применить процедуру, описанную в предыдущем пункте.

Окончательный результат этого пункта может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 6.1. Пусть $p(\rho, e)$ — гладкая функция полиномиального роста, а ρ_0, v_0, e_0 — гладкие и ограниченные функции. Тогда найдется интервал $[0, T]$ (зависящий от начальных данных ρ_0, v_0, e_0) такой, что для всех $t \in [0, T]$ существует гладкое решение задачи Коши для системы Эйлера (6.1). Это решение допускает представление $u(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(t, x)$, где u^ε в жордановом базисе $\{f_\alpha\}_{\alpha=1}^5$ задается соотношением $u^\varepsilon(t, x) = \sum_{\alpha=1}^5 \tilde{u}_\alpha^\varepsilon(t, x) f_\alpha$, $\tilde{u}_\alpha^\varepsilon(t, x) = \mathbf{E} \tilde{u}_{0\alpha}(\gamma_\alpha^\varepsilon(t))$, а диффузионные процессы $\gamma_\alpha^\varepsilon(t) \in \mathbf{R}^3$, $\alpha = 1, \dots, 5$, удовлетворяют (6.14)–(6.16).

З а м е ч а н и е 6.1. Мы описали здесь способ построения гладких, локальных по времени решений для системы уравнений Эйлера с использованием метода исчезающей вязкости. При этом система (6.1) была редуцирована к системе (6.2), что позволило воспользоваться подходом, основанным на построении вероятностного представления решения системы нелинейных обратных уравнений Колмогорова и формальным рассмотрением векторного поля $u(\tau) = u(t - s)$ вместо поля $u(s)$, для того чтобы построить решение задачи Коши с условиями на левом конце временного интервала, т.е. при $\tau = 0$.

Соответствующую технику можно развить и для того, чтобы непосредственно исследовать систему Эйлера (6.1) относительно неизвестных (мерозначных) функций $\rho(t, dy)$, $q(t, dy) = u(t, y) \rho(t, dy)$ и

$\mu(t, dy) = e(t, y) \rho(t, dy)$, где $u(t, y)$, $e(t, y)$ — производные Радона–Никодима мер q, μ относительно меры ρ . Заметим, что при этом компоненты $q_i(t, dy)$ векторной меры $q(t, dy)$ не предполагаются знакоопределенными.

Введем обозначение $\Pi = (\rho, q, \mu)$, представим систему (6.1) в виде

$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial t} + Z_{ik}^i(\Pi) \nabla_{y_i} \Pi_l = 0, \quad (6.17)$$

рассмотрим ее параболическую регуляризацию

$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial t} + Z_{ik}^i(\Pi) \nabla_{y_i} \Pi_l = \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta \Pi_k^\varepsilon \quad (6.18)$$

и построим вероятностное представление задачи Коши для системы (6.18) с начальными данными

$$\Pi_0(dy) = (\rho_0(dy), q_0(dy), \mu_0(dy)). \quad (6.19)$$

Рассматривая (6.18) как систему прямых уравнений Колмогорова, описывающих эволюцию набора мер, порожденную некоторым диффузионным процессом и его мультипликативным операторным функционалом, мы можем построить вероятностную систему, ассоциированную с (6.18).

Ограничимся, для определенности, моделью политропного газа, для которого

$$p = (\gamma - 1) \rho \left(e - \frac{\|v\|^2}{2} \right),$$

и случаем $d = 2$ и предположим, что $\xi_0 \in \mathbf{R}^2$ есть $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина с распределением $\rho_0(dy)$.

Рассмотрим диффузионный процесс

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi_0 + \varepsilon w(t) \quad (6.20)$$

и его мультипликативный операторный функционал, порожденный линейным стохастическим уравнением

$$d\eta_k^\varepsilon = \varepsilon^{-1} Z_{kl}^i(\Pi^\varepsilon)(t, \xi^\varepsilon(t)) \eta_l^\varepsilon(t) dw_i(t), \quad \eta_k^\varepsilon(0) = h_k, \quad k = 1, \dots, 4, \quad (6.21)$$

где $\Pi^\varepsilon = (\rho^\varepsilon, q^\varepsilon, \mu^\varepsilon)$. При этом эволюция мерозначной вектор-функции Π^ε определяется случайным процессом $\xi^\varepsilon(t)$ и его мультипликативным операторным функционалом, порожденным (6.21), по правилу

$$\langle h, \Pi^\varepsilon(t, dy) \rangle = \mathbf{E} \langle \eta^\varepsilon(t), \Pi_0(dy - \xi^\varepsilon(t)) \rangle. \quad (6.22)$$

Система уравнений (6.20)–(6.23) замкнута и может быть исследована аналогично тому, как была выше исследована система (4.16)–(4.18).

Заметим, что в рассматриваемом случае матрица $Z(\Pi, y) = Z^i(\Pi) y_i$ в представлении системы (6.1) в виде (6.17) удовлетворяет условиям **С.5.2**, поскольку собственные числа $\mu_\alpha(y)$ матрицы $Z(y)$ имеют вид $\mu_1(y) = \langle v, y \rangle + \sigma$, $\mu_2(y) = \mu_3(y) = \langle v, y \rangle$, $\mu_4(y) = \langle v, y \rangle - \sigma$ и существует базис пространства $\mathbf{R}^4$, в котором матрица Z диагонализуется (см. [28]).

Рассуждения, аналогичные тем, что были проведены в предыдущих пунктах, позволяют построить вероятностное представление для компонент решения системы (6.1) в жордановом базисе матрицы $Z(y)$ в виде

$$\tilde{\Pi}_\alpha^\varepsilon(t, dy) = \mathbf{E} \tilde{\Pi}_{0\alpha}(dy - \gamma_\alpha^\varepsilon(t)), \quad (6.23)$$

где случайные процессы $\gamma_\alpha^\varepsilon(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$d\gamma_\alpha^\varepsilon = \tilde{\mu}_\alpha(t, \gamma_\alpha^\varepsilon(t)) dt + \varepsilon dw, \quad \gamma_\alpha(0) = \xi_0. \quad (6.24)$$

Если начальные данные ρ_0, q_0, μ_0 обладают гладкими ограниченными плотностями по мере Лебега, то исследование полученной системы соотношений мало отличается от исследования, проведенного в п. 5.

Отметим, что на этом пути можно построить и менее гладкие (мерозначные) решения задачи Коши для системы Эйлера, в частности, выбирая в качестве начальных данных точечные меры, что соответствует тому, что в начальный момент положение диффундирующей частицы неслучайно. Соответствующие результаты будут описаны в другой работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Далецкий Ю. Л. Функциональные интегралы, ассоциированные с дифференциальными уравнениями и системами. — Докл. АН СССР, 1966, т. 137, № 2, с. 268–271.
2. Далецкий Ю. Л. Функциональные интегралы, ассоциированные с операторными эволюционными уравнениями. — Успехи матем. наук, 1967, т. 17, № 5, с. 3–115.
3. Stroock D. On certain systems of parabolic equations. — Comm. Pure Appl. Math., 1970, v. 23, p. 447–457.
4. Griego R. J., Herish R. Random evolutions, Markov chains, and systems of partial differential equations. — Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1969, v. 62, № 2, p. 305–308.
5. Griego R. J., Herish R. Theory of random evolutions with applications to partial differential equations. — Trans. Amer. Math. Soc., 1971, v. 156, p. 405–418.
6. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 2. М.: Физматгиз, 1973, 640 с.
7. McKean H. P., Jr. A class of Markov processes associated with nonlinear parabolic equations. — Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1966, v. 59, № 6, p. 1907–1911.
8. Фрейдлин М. И. Квазилинейные параболические уравнения и меры в функциональном пространстве. — Функци. анализ и его прилож., 1967, т. 1, № 3, с. 237–240.
9. Freidlin M. Functional Integration and Partial Differential Equations. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1985, 545 p.
10. Белопольская Я. И., Далецкий Ю. Л. Исследование задачи Коши для системы квазилинейных уравнений с помощью марковских случайных процессов. — Изв. вузов, 1978, № 12, с. 6–17.

11. Далецкий Ю. Л., Белопольская Я. И. Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. Киев: Выща школа, 1989, 295 с.
12. Белопольская Я. И., Далецкий Ю. Л. Марковские процессы, ассоциированные с нелинейными параболическими уравнениями. — Докл. АН СССР, 1980, т. 250, № 3, с. 268–271.
13. Белопольская Я. И. Вероятностный подход к решению нелинейных параболических уравнений. — Проблемы матем. анализа, 1992, т. 13 с. 21–35.
14. Сарафян В. Диффузионные процессы и дифференциальные уравнения с малым параметром. Автореф. дисс... докт. физ-матем. наук. Ереван, 1985.
15. Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. — Comm. Pure Appl. Math., 1950, v. 3, p. 201–230.
16. Белопольская Я. И. Вероятностные представления решений задачи Коши для систем параболических уравнений. — Докл. РАН, 2003, т. 389, № 4, с. 444–447.
17. E W., Rykov Yu., Sinai Ya. Generalized variational principles, global weak solutions and behaviour with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics. — Comm. Math. Phys., 1996, v. 177, № 2, p. 349–380.
18. Dermoune A. Probabilistic interpretation of sticky particle model. — Ann. Probab., 1999, v. 27, № 3, p. 1357–1367.
19. Burgers J. The Nonlinear Diffusion Equation, Dordrecht–Boston: Reidel, 1974, 173 p.
20. Woyczynski W. Burgers-KPZ turbulence. — Lecture Notes in Math., 1998, v. 1700, p. 1–318.
21. Белопольская Я. И. Нелинейные уравнения в теории диффузионных процессов. — Зап. научн. семин. ПОМИ, 2001, т. 278, с. 15–35.
22. Belopolskaya Ya. Nonlinear PDEs in Diffusion Theory. Preprint № 705. Bonn: Bonn University, 2001, 39 p.
23. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986, 445 с.
24. Joseph K. T. A Riemann problem whose viscosity solutions contain δ -measures. — Asymptot. Anal., 1993, v. 7, № 2, p. 105–120.
25. Belopolskaya Ya. Burgers equation on a Hilbert manifold and the motion of incompressible fluid. — Methods Funct. Anal. Topology, 1999, v. 5, № 4, p. 15–27.
26. Белопольская Я. И. Гладкие диффузионные меры и их преобразования. — Зап. научн. семин. ПОМИ, 1999, т. 260, с. 87–105.
27. Белопольская Я. И. Нелинейные преобразования эволюционных семейств, порожденных диффузионными процессами. — Проблемы матем. анализа, 2003, в. 25, с. 35–55.
28. Málek J., Necas J., Rokyta M., Ruzicka M. Weak and Measure-Valued Solutions to Evolutionary PDEs. Singapore: World Scientific, 2001.

Поступила в редакцию
25.II.2004