Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Саакян, М. С. Гиновян, О центральной предельной теореме для тёплицевых квадратичных форм от стационарных последовательностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 4, 653–671

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp187>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:52:02

© 2004 г.

ГИНОВЯН М. С.*, СААКЯН А. А.*

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ТЁПЛИЦЕВЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ ОТ СТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ¹⁾

Пусть $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, — вещественнозначная стационарная гауссовская последовательность со спектральной плотностью $f(\lambda)$. В статье рассматривается вопрос применимости центральной предельной теоремы (ЦПТ) для тёплицевой квадратичной формы Q_n от переменных $X(t)$, $t = 1, \dots, n$, порожденной некоторой интегрируемой четной функцией $g(\lambda)$. Предположив, что $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ — регулярно меняющиеся в точке $\lambda = 0$ функции порядка α и β соответственно, мы доказываем ЦПТ для стандартно нормированной квадратичной формы Q_n в критическом случае $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$.

Мы также показываем, что условие положительности и конечности асимптотической дисперсии квадратичной формы Q_n не гарантирует выполнение ЦПТ для Q_n .

Ключевые слова и фразы: стационарная гауссовская последовательность, спектральная плотность, тёплицевы квадратичные формы, центральная предельная теорема, асимптотическая дисперсия, медленно меняющиеся функции.

1. Введение. Пусть $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, — центрированная ($\mathbf{E}X(t) = 0$) вещественнозначная стационарная гауссовская последовательность со спектральной плотностью $f(\lambda)$ и ковариационной функцией $r(t)$, т.е.

$$r(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} f(\lambda) d\lambda. \quad (1.1)$$

Мы рассматриваем вопрос об асимптотическом распределении (когда $n \rightarrow \infty$) следующей тёплицевой квадратичной формы от процесса $X(t)$:

$$Q_n = \sum_{k,j=1}^n a(k-j) X(k) X(j), \quad (1.2)$$

* Институт математики НАН Армении, пр. Маршала Баграмяна, 24-Б, 375019, Ереван, Армения; e-mail: mginovian@yahoo.com; sart@instmath.sci.am

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке грантов ANSEF (№ PS58) и NFSAT/CRDF (№ MA 070-02/12011).

где

$$a(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} g(\lambda) d\lambda, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.3)$$

суть коэффициенты Фурье некоторой вещественной, четной, интегрируемой функции $g(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{T} = [-\pi, \pi]$. Функцию $g(\lambda)$ мы называем порождающей функцией квадратичной формы Q_n . Мы будем считать, что функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ являются 2π -периодическими.

Предельное распределение случайных величин (1.2) полностью определяется спектральной плотностью $f(\lambda)$ и порождающей функцией $g(\lambda)$, и, в зависимости от их свойств, оно может быть гауссовским (т.е. для Q_n с подходящей нормировкой имеет место центральная предельная теорема) или не гауссовским.

Естественно рассмотреть следующие два вопроса.

а) При каких условиях на $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ предельное распределение Q_n будет гауссовским?

б) Описать предельное распределение Q_n , если оно не гауссовское.

В данной статье мы изучаем по существу вопрос а). Эта проблема впервые была рассмотрена в классической монографии У. Гренандера и Г. Серё [9] в качестве применения их теории об асимптотическом поведении следа произведения усеченных тёплицевых матриц.

Позже эта проблема была изучена И. А. Ибрагимовым [11] и М. Розенблатом [12] в связи со статистическими оценками для спектральной ($F(\lambda)$) и ковариационной ($r(t)$) функций соответственно. С 1986 г. интерес к вопросам а) и б) обновился в связи со статистическими выводами для сильно зависимых процессов (см., например, статьи Ф. Аврама [1], Р. Фокса и М. С. Такку [4], Л. Гиравитиса и Д. Сургайлиса [8], Н. Террин и М. С. Такку [14], М. Танигучи [17] и книгу М. Танигучи и Й. Какизавы [18]). В работах [1], [4] и [8] были получены достаточные условия для выполнения ЦПТ для квадратичной формы Q_n .

Для формулировки соответствующих результатов нам потребуется ряд обозначений. Обозначим через $\tilde{Q}_n$ нормированную квадратичную форму:

$$\tilde{Q}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} (Q_n - \mathbf{E}Q_n). \quad (1.4)$$

Запись

$$\tilde{Q}_n \Longleftrightarrow N(0, \sigma^2) \quad (1.5)$$

будет означать, что распределение случайной величины $\tilde{Q}_n$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к центрированному нормальному распределению с дисперсией σ^2 . Через $T_n(f)$ и $T_n(g)$ мы обозначим тёплицевы матрицы размера $n \times n$, порожденные функциями f и g соответственно, т.е.

$$T_n(f) = \|r(k-j)\|_{k,j=\overline{1,n}} \quad \text{и} \quad T_n(g) = \|a(k-j)\|_{k,j=\overline{1,n}}, \quad (1.6)$$

где $r(k)$ и $a(k)$ определены в (1.1) и (1.3) соответственно. Через C, M, C_k, M_k мы обозначим постоянные, которые могут быть разными в разных формулах.

Теорема А (Ф. Аврам). Пусть спектральная плотность $f(\lambda)$ и порождающая функция $g(\lambda)$ таковы, что $f(\lambda) \in L^{p_1}(\mathbb{T})$, $g(\lambda) \in L^{p_2}(\mathbb{T})$, где $p_1, p_2 \geq 1$ и $1/p_1 + 1/p_2 \leq \frac{1}{2}$. Тогда имеет место (1.5) с

$$\sigma^2 = 16\pi^3 \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda. \quad (1.7)$$

З а м е ч а н и е 1.1. При $p_1 = p_2 = \infty$ теорема А была доказана У. Гренандером и Г. Сегё [9, теорема 11.6]), а в случае $p_1 = 2, p_2 = \infty$ — И. А. Ибрагимовым [11] и М. Розенблатом [12].

Теорема В (Р. Фокс и М. С. Такку). Пусть выполнены следующие условия:

а) функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ непрерывны почти всюду и ограничены на $[\delta, \pi]$ при любом $\delta > 0$;

б) существуют $\alpha < 1$ и $\beta < 1$ такие, что $\alpha + \beta < \frac{1}{2}$,

$$f(\lambda) \sim |\lambda|^{-\alpha} L_1(\lambda) \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0, \quad (1.8)$$

$$g(\lambda) \sim |\lambda|^{-\beta} L_2(\lambda) \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0, \quad (1.9)$$

где $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda)$ суть медленно меняющиеся в точке $\lambda = 0$ функции.

Тогда имеет место (1.5) с дисперсией σ^2 , определенной в (1.7).

Доказательства теорем А и В в [1] и [4] основаны на следующем хорошо известном представлении k -го кумулянта $\chi_k(\cdot)$ квадратичной формы $\tilde{Q}_n$ (см., например, [9], [11]):

$$\chi_k(\tilde{Q}_n) = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 1, \\ n^{-k/2} 2^{k-1} (k-1)! \operatorname{tr} [T_n(f) T_n(g)]^k & \text{при } k \geq 2, \end{cases}$$

где $\operatorname{tr}[A]$ — след матрицы A .

Другой подход, примененный в работе [8], позволил распространить теоремы А и В на линейные последовательности. В гауссовском случае этот результат может быть сформулирован следующим образом.

Теорема С (Л. Гиравитис и Д. Сургайлис). Предположим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\chi_2(\tilde{Q}_n) = \frac{2}{n} \operatorname{tr} [T_n(f) T_n(g)]^2 \longrightarrow 16\pi^3 \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda < \infty. \quad (1.10)$$

Тогда имеет место (1.5), где дисперсия σ^2 определена в (1.7).

В работах [1] и [4] (см. также [8]) было установлено, что из условий каждой из теорем А и В вытекает (1.10). К сожалению, проверить выполнение условия (1.10) непросто. Более простое достаточное условие было найдено в [8].

Теорема D (Л. Гиравитис и Д. Сургайлис). Пусть $f \in L^2(\mathbb{T})$, $g \in L^2(\mathbb{T})$, $fg \in L^2(\mathbb{T})$ и при $\mu \rightarrow 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) g^2(\lambda - \mu) d\lambda \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda. \quad (1.11)$$

Тогда имеет место (1.5), где дисперсия σ^2 определена в (1.7).

В этой же статье [8] Л. Гиравитис и Д. Сургайлис выдвинули гипотезу о том, что одного условия конечности интеграла в правой части (1.10) достаточно для выполнения (1.10). В работе [6] один из авторов опроверг эту гипотезу. Чтобы сформулировать этот результат, рассмотрим функции

$$f_0(\lambda) = \begin{cases} \left(\frac{2^s}{s^2}\right)^{1/p}, & \text{если } 2^{-s-1} \leq \lambda \leq 2^{-s}, \quad s = 2m, \\ 0, & \text{если } 2^{-s-1} \leq \lambda \leq 2^{-s}, \quad s = 2m + 1, \end{cases} \quad (1.12)$$

и

$$g_0(\lambda) = \begin{cases} \left(\frac{2^s}{s^2}\right)^{1/q}, & \text{если } 2^{-s-1} \leq \lambda \leq 2^{-s}, \quad s = 2m + 1, \\ 0, & \text{если } 2^{-s-1} \leq \lambda \leq 2^{-s}, \quad s = 2m, \end{cases} \quad (1.13)$$

где m — натуральное число и $p, q \geq 1$.

Легко видеть, что $f_0(\lambda) \in L^p(\mathbb{T})$, $g_0(\lambda) \in L^q(\mathbb{T})$, $f_0(\lambda) g_0(\lambda) \in L^r(\mathbb{T})$ для любого r и

$$\sigma^2 = 16\pi^3 \int_{-\pi}^{\pi} f_0^2(\lambda) g_0^2(\lambda) d\lambda = 0.$$

С другой стороны, как было доказано в [6], при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$

$$\chi_2(\tilde{Q}_n) = \frac{2}{n} \operatorname{tr}(T_n(f_0) T_n(g_0))^2 \longrightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (1.14)$$

т.е. сходимость в (1.10) не имеет места.

В [6] было высказано предположение, что для сходимости в (1.10) достаточно условия

$$0 < \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda < \infty.$$

Проблема б) — описание предельного распределения квадратичной формы Q_n , если оно негауссовское, была исследована Н. Террин и М. С. Такку в [14] и [15]. Пусть $f(\lambda) = |\lambda|^{-\alpha} L_1(\lambda)$ и $g(\lambda) = |\lambda|^{-\beta} L_2(\lambda)$, где $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda)$ — медленно меняющиеся в точке $\lambda = 0$ ограниченные функции. В [14] и [15] было доказано, что если $\alpha < 1$, $\beta < 1$ и $\alpha + \beta > \frac{1}{2}$, то случайная величина

$$\hat{Q}_n = \frac{1}{n^{\alpha+\beta} L_1(1/n) L_2(1/n)} (Q_n - \mathbf{E}Q_n) \quad (1.15)$$

сходится по распределению к некоторой негауссовской случайной величине $Y(\alpha, \beta)$, которая может быть представлена посредством двойного интеграла Винера–Ито.

Отметим, что наличие слабо меняющихся функций $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda)$ существенно, так как они дают бóльшую свободу при выборе функций $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$. В работе [14] было установлено, что эти функции влияют только на нормировку Q_n (см. (1.15)), а предел $Y(\alpha, \beta)$ от них не зависит. Из результатов настоящей работы следует, что в критическом случае $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ предельное распределение стандартно нормированной квадратичной формы Q_n уже зависит от функций $L_1(\lambda)$ и $L_2(\lambda)$.

Критический случай $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ был частично исследован Н. Террин и М. С. Такку в [16]. Исходя из величины $Y(\alpha, \beta)$, которая существует только при $\alpha + \beta > \frac{1}{2}$, они доказали, что если $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, то случайная величина $(\alpha + \beta - \frac{1}{2}) Y(\alpha, \beta)$ сходится по распределению к гауссовской случайной величине, когда $\alpha + \beta$ стремится к $\frac{1}{2}$.

В настоящей работе, предположив, что $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ — регулярно меняющиеся в точке $\lambda = 0$ функции порядка α и β соответственно, мы доказываем центральную предельную теорему (ЦПТ) для стандартно нормированной квадратичной формы Q_n в критическом случае $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$. Мы также показываем, что условие положительности и конечности асимптотической дисперсии квадратичной формы Q_n не гарантирует выполнение ЦПТ для Q_n .

2. Основные результаты. Пусть SV — класс медленно меняющихся в нуле функций $u(\lambda)$ с условиями: $u(\lambda) \in L^\infty(\mathbf{R})$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} u(\lambda) = 0$, $u(\lambda) = u(-\lambda)$ и $0 < u(\lambda) < u(\mu)$ при $0 < \lambda < \mu$.

Теорема 2.1. Пусть

$$f(\lambda) \leq |\lambda|^{-\alpha} L_1(\lambda), \quad (2.1)$$

$$|g(\lambda)| \leq |\lambda|^{-\beta} L_2(\lambda), \quad (2.2)$$

где

$$\alpha < 1, \quad \beta < 1, \quad \alpha + \beta \leq \frac{1}{2}, \quad (2.3)$$

$$L_i(\lambda) \in SV, \quad \lambda^{-(\alpha+\beta)} L_i(\lambda) \in L^2(\mathbf{T}), \quad i = 1, 2.$$

Тогда имеет место (1.5), где дисперсия σ^2 определена в (1.7).

З а м е ч а н и е 2.1. В качестве примера спектральной плотности $f(\lambda)$ и порождающей функции $g(\lambda)$, удовлетворяющих условиям теоремы 2.1, можно рассмотреть функции

$$f(\lambda) = |\lambda|^{-\alpha} |\ln |\lambda||^{-\gamma} \quad \text{и} \quad g(\lambda) = |\lambda|^{-\beta} |\ln |\lambda||^{-\gamma},$$

где $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}$ и $\gamma > \frac{1}{2}$.

З а м е ч а н и е 2.2. В теореме 2.1 функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ имеют особенности в точке нуль и ограничены вне произвольной окрестности этой точки. Ясно, что выбор точки нуль здесь несущественен и вместо нее можно брать произвольную точку $\lambda_0 \in [-\pi, \pi]$. Используя свойства произведения тёплицевых матриц $T_n(f)$ и $T_n(g)$, можно показать, что утверждение теоремы 2.1 остается в силе также в случае, когда $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ имеют особенности вида (2.1), (2.2) в одном и том же конечном числе точек отрезка $[-\pi, \pi]$.

Для функций $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ положим

$$\varphi(t_1, t_2, t_3) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u) g(u - t_1) f(u - t_2) g(u - t_3) du. \quad (2.4)$$

Теорема 2.2. Если функция $\varphi(t_1, t_2, t_3) \in L^2(\mathbb{T}^3)$ непрерывна в точке $(0, 0, 0)$, то имеет место (1.5) с дисперсией σ^2 , определенной в (1.7).

Утверждение 2.1. Из теоремы 2.2 вытекают теоремы А и D.

З а м е ч а н и е 2.3. Для функций $f(\lambda) = \lambda^{-3/4}$ и $g(\lambda) = \lambda^{3/4}$, удовлетворяющих условиям теоремы В, функция $\varphi(t_1, t_2, t_3)$ не определена при $t_2 = 0, t_1 \neq 0, t_3 \neq 0$. Это значит, что, вообще говоря, из теоремы 2.2 не вытекает теорема В.

Следующее утверждение показывает, что положительность и конечность асимптотической дисперсии квадратичной формы Q_n не гарантирует выполнение ЦПТ для Q_n .

Утверждение 2.2. Существуют спектральная плотность $f(\lambda)$ и порождающая функция $g(\lambda)$ такие, что

$$0 < \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda) g^2(\lambda) d\lambda < \infty \quad (2.5)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \chi_2(\tilde{Q}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{2}{n} \operatorname{tr}[T_n(f) T_n(g)]^2 = \infty, \quad (2.6)$$

т.е. условие (2.5) не гарантирует сходимость в (1.10).

3. Предварительные результаты. Напомним (см. [3], [13]), что положительная функция $u(x)$ называется медленно меняющейся в нуле, если $\lim_{x \rightarrow 0} [u(\lambda x)/u(x)] = 1$ для любого $\lambda > 0$. Отметим некоторые свойства медленно меняющихся функций, которые будут использованы ниже. Следующее свойство хорошо известно (см., например, [13]).

Лемма 3.1. Пусть $u(x)$ и $v(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — медленно меняющиеся в нуле функции. Тогда

а) для любого $p < 1$

$$\int_0^y x^{-p} u(x) dx = O(y^{1-p} u(y)) \quad \text{при } y \rightarrow 0;$$

б) функция $x^p u(x)$ возрастает на некотором интервале $(0, \delta)$, если $p > 0$, и убывает, если $p < 0$;

с) $u(x)v(x)$ и $u(x)/v(x)$ — медленно меняющиеся в нуле функции.

Лемма 3.2. Для произвольных функций $u, v \in SV$ и чисел $p, q < 1$, $p + q > 1$, существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\int_{\mathbb{T}} |x|^{-p} |x - y|^{-q} u(x) v^{-1}(x - y) dx \leq M |y|^{1-p-q} u(y) v^{-1}(y), \quad y \in \mathbb{T}. \quad (3.1)$$

Доказательство. Положим

$$Q(x, y) = |x|^{-p} |x - y|^{-q} u(x) v^{-1}(x - y).$$

Легко видеть, что для любого $\delta > 0$

$$\sup_{|y| > \delta} \int_{\mathbb{T}} Q(x, y) dx < \infty \quad \text{и} \quad \min_{|y| > \delta} y^{1-p-q} u(y) v^{-1}(y) > 0.$$

Следовательно, достаточно доказать (3.1) для $y \in (-\delta, \delta)$ при достаточно малом $\delta > 0$. Применив лемму 3.1 а), получим, что

$$\begin{aligned} \int_{0 < |x| < |y|/2} Q(x, y) dx &\leq \left(\frac{|y|}{2}\right)^{-q} v^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) \int_{0 < |x| < |y|/2} |x|^{-p} u(x) dx \\ &\leq C y^{1-p-q} u(y) v(y), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \int_{|y|/2 < |x| < 2|y|} Q(x, y) dx &\leq \left(\frac{|y|}{2}\right)^{-p} u(2|y|) \int_{|y|/2 < |x| < 2|y|} |x - y|^{-q} v^{-1}(x - y) dx \\ &\leq C |y|^{-p} u(|y|) \int_{0 < |x| < 4|y|} |x|^{-q} v^{-1}(x) dx \\ &\leq C y^{1-p-q} u(y) v(y), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \int_{2|y| < |x| < \pi} Q(x, y) dx &\leq |y|^{-p} v^{-1}(y) \int_{2|y| < |x| < \pi} |x|^{-q} u(x) dx \\ &\leq C y^{1-p-q} u(y) v(y). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (3.2)–(3.4) получим (3.1). Лемма 3.2 доказана.

Следующая лемма доказывается аналогичным образом.

Лемма 3.3. Пусть функции $u, w \in SV$ таковы, что

$$\int_{\mathbb{T}} x^{-1} u(x) w^{-3}(x) dx < \infty.$$

Тогда для любого $q \in (0, 1)$ существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\int_{\mathbb{T}} |x|^{-1} |x - y|^{-q} u(x) w^{-2}(x) w^{-1}(x - y) dx \leq M |y|^{-q} w^{-3}(y), \quad y \in \mathbb{T}.$$

Обозначим через $D_n(x)$ ядро Дирихле:

$$D_n(x) = \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}. \quad (3.5)$$

Легко видеть, что

$$|D_n(x)| \leq \min\{n, |x|^{-1}\} \quad \text{и} \quad |D_n(x)| \leq Cn\psi_n(x), \quad x \in \mathbb{T}, \quad (3.6)$$

где $\psi_n(x) = (1 + n|x|)^{-1}$.

Лемма 3.4. Для произвольной функции $w \in SV$ и любого числа $t \in (0, 1)$ существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|D_n(x)| \leq Mw(n^{-1}) n^t |x|^{t-1} w^{-1}(x).$$

Доказательство. Из леммы 3.1 b) следует, что функции $x^{t-1}w^{-1}(x)$ и $x^{-t}w(x)$ убывают на некотором интервале $(0, \delta)$. Так как

$$\min\{w(n^{-1}) n^t |x|^{t-1} w^{-1}(x)\} > 0,$$

мы можем предположить, что $n^{-1} < \delta$ и $|x| < \delta$. Теперь если $|x| \leq n^{-1}$, то из условия $n^{1-t}w^{-1}(n^{-1}) \leq x^{t-1}w^{-1}(x)$ и (3.6) следует, что

$$|D_n(x)| \leq n = w(n^{-1}) n^t n^{1-t} w^{-1}(n^{-1}) \leq w(n^{-1}) n^t |x|^{t-1} w^{-1}(x).$$

Случай $|x| > n^{-1}$ доказывается аналогично. Лемма 3.4 доказана.

Следующая лемма доказана в [8].

Лемма 3.5. Для любого $\delta \in (0, 1)$ существует постоянная $C_\delta > 0$ такая, что

$$n \int_{\mathbb{T}} \psi_n(x - y) \psi_n(x - z) dx \leq C_\delta \psi_n^{1-\delta}(y - z), \quad y, z \in \mathbb{T}.$$

Обозначим

$$\Phi_n(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^3 n} D_n(x_1) D_n(x_2) D_n(x_3) D_n(x_1 + x_2 + x_3), \quad (3.7)$$

где $D_n(x)$ определено в (3.5). Для заданного $\alpha \in (0, \pi)$ мы полагаем

$$E_\alpha = \{|\mathbf{x}| \leq \alpha\} = \{(x_1, x_2, x_3); |x_k| \leq \alpha, k = 1, 2, 3\},$$

$$E_\alpha^c = \{|\mathbf{x}| \leq \pi\} \setminus \{|\mathbf{x}| \leq \alpha\}.$$

Лемма 3.6. Ядро $\Phi_n(\mathbf{x})$, определенное в (3.7), с $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет следующим условиям:

- a) $\int_{\mathbb{T}^3} \Phi_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$;
- b) $\sup_n \int_{\mathbb{T}^3} |\Phi_n(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = C_1 < \infty$;
- c) для любого $\varepsilon \in (0, \pi)$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{E}_\varepsilon^c} |\Phi_n(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = 0$;
- d) для любого $\delta > 0$ существует постоянная $M_\delta > 0$ такая, что

$$\int_{\mathbb{E}_\delta^c} \Phi_n^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq M_\delta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Доказательство. Доказательство утверждений а)–с) можно найти в [2] (лемма 3.1). Для доказательства d) сперва заметим, что

$$\int_{\mathbb{T}} D_n^2(x) dx \leq Cn \quad \text{и} \quad |D_n(x)| \leq C_\delta \quad \text{при} \quad |x| > \delta, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.9)$$

где $D_n(x)$ — ядро Дирихле, а C и C_δ — некоторые положительные константы. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{E}_\delta^c} \Phi_n^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &\leq \int_{|x_1| > \delta} \Phi_n^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{|x_2| > \delta} \Phi_n^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{|x_3| > \delta} \Phi_n^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &=: I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Очевидно, достаточно оценить I_1 . Имеем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{|x_1| > \delta, |x_2| > \delta/3} \Phi_n^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{|x_1| > \delta, |x_3| > \delta/3} \Phi_n^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{|x_1| > \delta, |x_2| \leq \delta/3, |x_3| \leq \delta/3} \Phi_n^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} =: I_1^{(1)} + I_1^{(2)} + I_1^{(3)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Используя (3.9), получим

$$I_1^{(1)} \leq C_\delta \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{T}^3} D_n^2(x_3) D_n^2(x_1 + x_2 + x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \leq M_\delta. \quad (3.12)$$

Аналогично,

$$I_1^{(2)} \leq M_\delta. \quad (3.13)$$

Теперь, заметив, что в интеграле $I_1^{(3)}$ область интегрирования такова, что $|x_1 + x_2 + x_3| > \delta/3$, из (3.9) находим

$$I_1^{(3)} \leq C_\delta \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{T}^3} D_n^2(x_2) D_n^2(x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \leq M_\delta. \quad (3.14)$$

Из (3.12)–(3.14) получаем (3.8). Лемма 3.6 доказана.

Лемма 3.7. Пусть функция $\Psi(\mathbf{u}) \in L^2(\mathbb{T}^3)$ непрерывна в точке $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^3} \Psi(\mathbf{u}) \Phi_n(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \Psi(\mathbf{0}), \quad (3.15)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, а функция $\Phi_n(\mathbf{u})$ определена в (3.7).

Доказательство. В силу леммы 3.6 а)

$$R_n := \int_{\mathbb{T}^3} \Psi(\mathbf{u}) \Phi_n(\mathbf{u}) d\mathbf{u} - \Psi(\mathbf{0}) = \int_{\mathbb{T}^3} [\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(\mathbf{0})] \Phi_n(\mathbf{u}) d\mathbf{u}. \quad (3.16)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ такое, что

$$|\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(\mathbf{0})| < \frac{\varepsilon}{C_1}, \quad \text{если } \mathbf{u} \in \mathbb{E}_\delta, \quad (3.17)$$

где C_1 — постоянная из леммы 3.6 б). Рассмотрим разложение $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ такое, что

$$\|\Psi_1\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{M_\delta}} \quad \text{и} \quad \|\Psi_2\|_\infty < \infty, \quad (3.18)$$

где M_δ — постоянная из леммы 3.6 д). Применив лемму 3.6 б)–д) и (3.16)–(3.18), находим, что при достаточно большом n

$$\begin{aligned} |R_n| &\leq \int_{\mathbb{E}_\delta} |\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(\mathbf{0})| |\Phi_n(\mathbf{u})| d\mathbf{u} + \int_{\mathbb{E}_\delta^c} |\Psi_1(\mathbf{u})| |\Phi_n(\mathbf{u})| d\mathbf{u} \\ &\quad + \int_{\mathbb{E}_\delta^c} |\Psi_2(\mathbf{u}) - \Psi(\mathbf{0})| |\Phi_n(\mathbf{u})| d\mathbf{u} \leq \frac{\varepsilon}{C_1} \int_{\mathbb{E}_\delta} |\Phi_n(\mathbf{u})| d\mathbf{u} \\ &\quad + \|\Psi_1\|_2 \left[\int_{\mathbb{E}_\delta^c} \Phi_n^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right]^{1/2} + C_2 \int_{\mathbb{E}_\delta^c} |\Phi_n(\mathbf{u})| d\mathbf{u} \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (3.16) получаем (3.15). Лемма 3.7 доказана.

4. Доказательства основных результатов.

Доказательство теоремы 2.1. Для $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ положим

$$F(\mathbf{x}) = f(x_1) f(x_2) g(x_3) g(x_4),$$

и пусть

$$H_n(\mathbf{x}) = G_n(x_1 - x_3) G_n(x_2 - x_3) G_n(x_4 - x_1) G_n(x_4 - x_2),$$

где

$$G_n(u) = \sum_{k=1}^n e^{iku} = e^{iu(n+1)/2} D_n(u). \quad (4.1)$$

Легко проверить, что

$$\text{tr}(T_n(f) T_n(g))^2 = \int_{\mathbb{T}^4} F(\mathbf{x}) H_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (4.2)$$

Согласно теореме В, достаточно рассмотреть случай $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$. Тогда, в силу теоремы С нам нужно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}^4} F(\mathbf{x}) H_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 8\pi^3 \int_{\mathbb{T}} f^2(x) g^2(x) dx \quad (4.3)$$

при условии, что

$$f(x) \leq |x|^{-\alpha} L(x), \quad |g(x)| \leq |x|^{-\beta} L(x), \quad x \in \mathbb{T}, \quad (4.4)$$

где $L = L_1 + L_2 \in SV$ и

$$\alpha < 1, \quad \beta < 1, \quad \alpha + \beta = \frac{1}{2}, \quad \int_{\mathbb{T}} x^{-1} L^2(x) dx < \infty. \quad (4.5)$$

Если $\alpha, \beta \geq 0$, то из (4.4) следует, что $f \in L^{1/\alpha}(\mathbb{T})$, $g \in L^{1/\beta}(\mathbb{T})$, и теорема 2.1 вытекает из теоремы А. Предположив, что $\beta < 0$, из (4.5) имеем

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1, \quad -\frac{1}{2} < \beta < 0. \quad (4.6)$$

Для $\varepsilon \in (0, 1)$ положим

$$f_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| < \varepsilon, \\ f(x), & \text{если } \varepsilon \leq |x| \leq \pi, \end{cases}$$

и

$$\mathbb{T}_{i,\varepsilon} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^4: |x_i| < \varepsilon\}, \quad i = 1, 2.$$

Имеем

$$\frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}^4} F(\mathbf{x}) H_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = J_n^1 + J_n^2,$$

где

$$J_n^1 := \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}^4} f_{\varepsilon}(x_1) f_{\varepsilon}(x_2) g(x_3) g(x_4) H_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

и

$$|J_n^2| \leq \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}_{1,\varepsilon}} |F(\mathbf{x}) H_n(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}_{2,\varepsilon}} |F(\mathbf{x}) H_n(\mathbf{x})| d\mathbf{x} =: I_n^1 + I_n^2.$$

Так как $f_{\varepsilon}, g \in L^{\infty}(\mathbb{T})$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n^1 = 8\pi^3 \int_{\mathbb{T}} f_{\varepsilon}^2(x) g^2(x) dx.$$

Последний интеграл стремится к $\int_{\mathbb{T}} f^2(x) g^2(x) dx$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$, значит, (4.3) будет следовать из того, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} (I_n^1 + I_n^2) = 0. \quad (4.7)$$

Достаточно доказать (4.7) для I_n^1 . Положим

$$B_{i,j} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{T}^4: |x_i| \leq \frac{|x_j|}{2} \right\}, \quad i = 1, 2, \quad j = 3, 4,$$

$$B = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{T}^4: |x_1| < \varepsilon, |x_i| > \frac{|x_j|}{2}, i = 1, 2, j = 3, 4 \right\}.$$

Тогда

$$I_n^1 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=3}^4 \int_{B_{i,j}} F(\mathbf{x}) H_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{n} \int_B F(\mathbf{x}) H_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (4.8)$$

Допустим, что функция $w \in SV$ удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{T}} x^{-1} L^2(x) w^{-4}(x) dx < \infty. \quad (4.9)$$

Так как

$$\frac{|x_3|}{2} < |x_1 - x_3| < 2|x_3| \quad \text{при } \mathbf{x} \in B_{1,3},$$

из оценок (4.4) и из леммы 3.4 следует, что

$$\begin{aligned} A_{1,3} &:= \frac{1}{n} \int_{B_{1,3}} F(\mathbf{x}) G_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\leq C w^4 \left(\frac{1}{n} \right) \int_{B_{1,3}} |x_1|^{-\alpha} |x_2|^{-\alpha} |x_3|^{-\beta} |x_4|^{-\beta} L(x_1) L(x_2) L(x_3) L(x_4) \\ &\quad \times |x_1 - x_3|^{-3/4} |x_2 - x_3|^{-3/4} |x_1 - x_4|^{-3/4} |x_2 - x_4|^{-3/4} \\ &\quad \times w^{-1}(x_1 - x_3) w^{-1}(x_2 - x_3) w^{-1}(x_1 - x_4) w^{-1}(x_2 - x_4) d\mathbf{x} \\ &\leq C w^4 \left(\frac{1}{n} \right) \int_{\mathbb{T}^2} |x_2|^{-\alpha} |x_4|^{-\beta} |x_2 - x_4|^{-3/4} L(x_2) L(x_4) w^{-1}(x_2 - x_4) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{T}} |x_1|^{-\alpha} |x_1 - x_4|^{-3/4} L(x_1) w^{-1}(x_1 - x_4) dx_1 \\ &\quad \times \int_{\mathbb{T}} |x_3|^{-\beta-3/4} |x_2 - x_3|^{-3/4} L(x_3) w^{-1}(x_3) w^{-1}(x_2 - x_3) dx_3 dx_2 dx_4. \end{aligned}$$

Применив сначала лемму 3.2, затем лемму 3.3, находим, что

$$\begin{aligned} A_{1,3} &\leq C w^4 \left(\frac{1}{n} \right) \int_{\mathbb{T}^2} |x_2|^{-\alpha} |x_4|^{-\beta} |x_2 - x_4|^{-3/4} L(x_2) L(x_4) w^{-1}(x_2 - x_4) \\ &\quad \times |x_4|^{-\alpha+1/4} L(x_4) w^{-1}(x_4) |x_2|^{-\beta-1/2} L(x_2) w^{-2}(x_2) dx_2 dx_4 \\ &= C w^4 \left(\frac{1}{n} \right) \int_{\mathbb{T}} |x_4|^{-1/4} L^2(x_4) w^{-1}(x_4) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{T}} |x_2|^{-1} |x_2 - x_4|^{-3/4} L^2(x_2) w^{-2}(x_2) w^{-1}(x_2 - x_4) dx_2 dx_4 \\ &\leq C w^4 \left(\frac{1}{n} \right) \int_{\mathbb{T}} |x_4|^{-1} L^2(x_4) w^{-4}(x_4) dx_4 = o(1), \end{aligned} \quad (4.10)$$

когда $n \rightarrow \infty$. Аналогичным образом можно доказать, что все интегралы под знаком суммы в (4.8) стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Для

оценки последнего интеграла в (4.8) воспользуемся (4.4) и леммой 3.5:

$$\begin{aligned}
 A &:= \frac{1}{n} \int_B |F(\mathbf{x}) H_n(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\
 &\leq C n^3 \int_B |x_1|^{-\alpha} |x_2|^{-\alpha} |x_3|^{-\beta} |x_4|^{-\beta} L(x_1) L(x_2) L(x_3) L(x_4) \\
 &\quad \times \psi_n(x_1 - x_3) \psi_n(x_2 - x_3) \psi_n(x_1 - x_4) \psi_n(x_2 - x_4) d\mathbf{x} \\
 &\leq C n^3 \int_{(-2\varepsilon, 2\varepsilon)^2} |x_3|^{-1/2} |x_4|^{-1/2} L(x_3) L(x_4) \\
 &\quad \times \int_{\mathbb{T}} \psi_n(x_1 - x_3) \psi_n(x_1 - x_4) L(x_1) dx_1 \\
 &\quad \times \int_{\mathbb{T}} \psi_n(x_2 - x_3) \psi_n(x_2 - x_4) L(x_2) dx_2 dx_3 dx_4 \\
 &\leq C n \int_{(-2\varepsilon, 2\varepsilon)} |x_3|^{-1/2} L(x_3) \int_{\mathbb{T}} |x_4|^{-1/2} \psi_n^{3/2}(x_3 - x_4) L(x_4) dx_4 dx_3 \\
 &\leq C \int_{-2n\varepsilon}^{2n\varepsilon} |y|^{-1/2} L\left(\frac{y}{n}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^{-1/2}}{(1 + |x - y|)^{3/2}} L\left(\frac{x}{n}\right) dx dy. \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Докажем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^{-1/2}}{(1 + |x - y|)^{3/2}} L\left(\frac{x}{n}\right) dx \leq C y^{-1/2} L\left(\frac{y}{n}\right), \quad y \in \mathbb{T}. \quad (4.12)$$

Действительно, при $y \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned}
 \int_{|x| \leq |y|} \frac{|x|^{-1/2}}{(1 + |x - y|)^{3/2}} L\left(\frac{x}{n}\right) dx &\leq C L\left(\frac{y}{n}\right) \int_{\mathbb{T}} |x|^{-1/2} dx \\
 &\leq C L\left(\frac{y}{n}\right) \leq C y^{-1/2} L\left(\frac{y}{n}\right). \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Согласно лемме 3.1, функция $t^{-1/2} L(t)$ убывает на некотором интервале $(0, \delta)$. Следовательно, предположив без ограничения общности, что $n > \pi/\delta$, для $|x| > |y|$ будем иметь

$$\begin{aligned}
 |x|^{-1/2} L\left(\frac{x}{n}\right) &= n^{-1/2} \left(\frac{|x|}{n}\right)^{-1/2} L\left(\frac{x}{n}\right) \leq n^{-1/2} \left(\frac{|y|}{n}\right)^{-1/2} L\left(\frac{y}{n}\right) \\
 &= |y|^{-1/2} L\left(\frac{y}{n}\right).
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \int_{|x| > |y|} \frac{|x|^{-1/2}}{(1 + |x - y|)^{3/2}} L\left(\frac{x}{n}\right) dx &\leq C |y|^{-1/2} L\left(\frac{y}{n}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + |x|)^{3/2}} dx \\
 &\leq C |y|^{-1/2} L\left(\frac{y}{n}\right). \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

Из (4.13), (4.14) мы получим (4.12), а из (4.11), (4.12) и (4.5) находим, что

$$A \leq C \int_{-2n\varepsilon}^{2n\varepsilon} |y|^{-1} L^2\left(\frac{y}{n}\right) dy = C \int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} |t|^{-1} L^2(t) dt = o(\varepsilon), \quad (4.15)$$

когда $\varepsilon \rightarrow 0$. Из (4.8), (4.10) и (4.15) вытекает (4.7).

Теорема 2.1 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.2. С помощью замены переменных $x_1 = u$, $x_1 - x_3 = u_1$, $x_3 - x_2 = u_2$ и $x_2 - x_4 = u_3$ из (4.2) получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(T_n(f) T_n(g))^2 &= \int_{\mathbb{T}^4} G_n(u_1) G_n(u_2) G_n(u_3) G_n(-u_1 - u_2 - u_3) \\ &\quad \times f(u) g(u - u_1) f(u - u_1 - u_2) \\ &\quad \times g(u - u_1 - u_2 - u_3) du_1 du_2 du_3 du_4, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где $G_n(u)$ определено в (4.1). Учитывая равенство

$$e^{iu_1(n+1)/2} e^{iu_2(n+1)/2} e^{iu_3(n+1)/2} e^{-i(u_1+u_2+u_3)(n+1)/2} = 1$$

и четность функции $D_n(u)$, из (4.16) находим, что

$$\operatorname{tr}(T_n(f) T_n(g))^2 = 8\pi^3 \int_{\mathbb{T}^3} \Psi(u_1, u_2, u_3) \Phi_n(u_1, u_2, u_3) du_1 du_2 du_3, \quad (4.17)$$

где $\Phi_n(u_1, u_2, u_3)$ определено в (3.7), $\Psi(u_1, u_2, u_3) = \varphi(u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3)$, а $\varphi(u_1, u_2, u_3)$ определено в (2.4). Согласно теореме С и (4.17), нам нужно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^3} \Psi(\mathbf{u}) \Phi_n(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \int_{\mathbb{T}} f^2(x) g^2(x) dx. \quad (4.18)$$

Учитывая, что функции $\varphi(u_1, u_2, u_3)$ и $\Psi(u_1, u_2, u_3)$ интегрируемы с квадратом и непрерывны в точке $(0, 0, 0)$ одновременно, а

$$\Psi(0, 0, 0) = \int_{\mathbb{T}} f^2(x) g^2(x) dx,$$

из леммы 3.7 получаем (4.18). Теорема 2.2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о у т в е р ж д е н и я 2.1. Для того чтобы доказать, что из теоремы 2.2 следует теорема А, достаточно убедиться, что функция

$$\varphi(\mathbf{t}) := \int_{\mathbb{T}} f_0(u) f_1(u - t_1) f_2(u - t_2) f_3(u - t_3) du, \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3), \quad (4.19)$$

принадлежит $L^2(\mathbb{T}^3)$ и непрерывна в точке $(0, 0, 0)$ при условии, что

$$f_i \in L^{p_i}(\mathbb{T}), \quad 1 \leq p_i \leq \infty, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad \sum_{i=0}^3 \frac{1}{p_i} \leq 1. \quad (4.20)$$

Из неравенства Гёльдера и (4.20) следует, что

$$|\varphi(\mathbf{t})| \leq \prod_{i=0}^3 \|f_i\|_{L^{p_i}(\mathbb{T})}, \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{T}^3.$$

Следовательно, $\varphi(\mathbf{t}) \in L^2(\mathbb{T}^3)$. Для доказательства непрерывности $\varphi(\mathbf{t})$ в точке $(0, 0, 0)$ рассмотрим три случая.

Случай 1: $p_i < \infty$, $i = 0, 1, 2, 3$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ с условием (см. (4.20))

$$\|f_i(u - t) - f_i(u)\|_{p_i} \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{если } |t| \leq \delta. \quad (4.21)$$

Зафиксируем $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ с $|\mathbf{t}| < \delta$ и положим $\bar{f}_i(u) = f_i(u + t_i) - f_i(u)$, $i = 1, 2, 3$. Тогда из (4.21) находим, что $\|\bar{f}_i\|_{p_i} \leq \varepsilon$, $i = 1, 2, 3$, и, следовательно,

$$\varphi(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{T}} f_0(u) \prod_{i=1}^3 (\bar{f}_i(u) + f_i(u)) du = \varphi(0, 0, 0) + W,$$

где величина W есть сумма пяти интегралов. Каждый из них содержит по крайней мере одну функцию $\bar{f}_i$ и может быть оценен, как следующий интеграл:

$$\left| \int_{\mathbb{T}} f_0(u) \bar{f}_1(u) f_2(u) f_3(u) du \right| \leq \|f_0\|_{p_0} \|\bar{f}_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \|f_3\|_{p_3} \leq C\varepsilon.$$

Случай 2: $p_i \leq \infty$, $i = 0, 1, 2, 3$, $\sum_{i=0}^3 1/p_i < 1$. Существуют конечные числа $p'_i < p_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, $\sum_{i=0}^3 1/p'_i \leq 1$, для которых $f_i \in L^{p'_i}(\mathbb{T})$. Следовательно, функция φ непрерывна в $(0, 0, 0)$, как это доказывалось в случае 1.

Случай 3: $p_i \leq \infty$, $i = 0, 1, 2, 3$, $\sum_{i=0}^3 1/p_i = 1$.

По крайней мере одно из чисел p_i конечно. Допустим, что $p_0 < \infty$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдем функции f'_0 и f''_0 такие, что

$$f_0 = f'_0 + f''_0, \quad f'_0 \in L^\infty, \quad \|f''_0\|_{p_0} < \varepsilon. \quad (4.22)$$

Тогда

$$\varphi(\mathbf{t}) = \varphi'(\mathbf{t}) + \varphi''(\mathbf{t}), \quad (4.23)$$

где функции φ' и φ'' определяются так же, как функция φ в (4.19), с заменой f_0 на f'_0 и f''_0 соответственно. Из (4.22) следует, что φ' непрерывна в $(0, 0, 0)$ (см. случай 2), а для φ'' , применив неравенство Гёльдера, получим, что $|\varphi''(\mathbf{t})| \leq C\varepsilon$. Следовательно, для достаточно малых $|\mathbf{t}|$

$$|\varphi(\mathbf{t}) - \varphi(0, 0, 0)| \leq |\varphi'(\mathbf{t}) - \varphi'(0, 0, 0)| + |\varphi''(\mathbf{t}) - \varphi''(0, 0, 0)| \leq (C + 1)\varepsilon,$$

откуда вытекает требуемый результат.

Теперь докажем, что из теоремы 2.2 вытекает теорема D. Для этого достаточно показать, что функция

$$\varphi(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{T}} f(u) g(u - t_1) f(u - t_2) g(u - t_3) du, \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{T}^3,$$

принадлежит $L^2(\mathbb{T}^3)$ и непрерывна в точке $(0, 0, 0)$, если f и g удовлетворяют условиям теоремы D, т.е. $f \in L_2(\mathbb{T})$, $g \in L_2(\mathbb{T})$, $fg \in L_2(\mathbb{T})$ и имеет место (1.11).

Так как

$$\varphi^2(\mathbf{t}) \leq 2\pi \int_{\mathbb{T}} f^2(u) g^2(u - t_1) f^2(u - t_2) g^2(u - t_3) du,$$

то имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^3} \varphi^2(\mathbf{t}) d\mathbf{t} &\leq \int_{\mathbb{T}} \left[\int_{\mathbb{T}} g^2(u - t_1) dt_1 \int_{\mathbb{T}} f^2(u - t_2) dt_2 \int_{\mathbb{T}} g^2(u - t_3) dt_3 \right] f^2(u) du \\ &= \|f\|_2^4 \|g\|_2^4 < \infty. \end{aligned}$$

Теперь докажем непрерывность $\varphi(\mathbf{t})$ в точке $(0, 0, 0)$. Пусть ε — произвольное положительное число. Положим

$$E_K = \{u \in \mathbb{T} : |f(u)| \leq K\}, \quad f_1(u) = \chi_{E_K}(u) f(u), \quad f_2(u) = f(u) - f_1(u),$$

где число $K > 0$ выбрано так, чтобы выполнялось равенство

$$\int_{\mathbb{T} \setminus E_K} f^2(u) g^2(u) du \leq \varepsilon.$$

Тогда

$$f = f_1 + f_2, \quad \|f_1\|_{\infty} \leq K, \quad \int_{\mathbb{T}} f_2^2(u) g^2(u) du \leq \varepsilon. \quad (4.24)$$

Рассмотрим разложение

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{t}) &= \int_{\mathbb{T}} f_1(u) g(u - t_1) f_1(u - t_2) g(u - t_3) du \\ &\quad + \int_{\mathbb{T}} f_2(u) g(u - t_1) f_1(u - t_2) g(u - t_3) du \\ &\quad + \int_{\mathbb{T}} f_1(u) g(u - t_1) f_2(u - t_2) g(u - t_3) du \\ &=: \varphi_1(\mathbf{t}) + \varphi_2(\mathbf{t}) + \varphi_3(\mathbf{t}). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Оценим функции $\varphi_k(\mathbf{t})$, $k = 1, 2, 3$. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathbf{t}) &= \int_{\mathbb{T}} f_1(u) g(u - t_1) f_1(u - t_2) [g(u - t_3) - g(u)] du \\ &\quad + \int_{\mathbb{T}} f_1(u) g(u) f_1(u - t_2) [g(u - t_1) - g(u)] du \\ &\quad + \int_{\mathbb{T}} f_1(u) g^2(u) f_1(u - t_2) du =: I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Применив неравенство Гёльдера, из (4.24) получим, что

$$|I_1| \leq K^2 \|g\|_2 \|g(u + t_3) - g(u)\|_2 = o(1) \quad \text{при } t_3 \rightarrow 0. \quad (4.27)$$

Аналогично,

$$|I_2| = o(1) \quad \text{при } t_1 \rightarrow 0 \quad (4.28)$$

и, с учетом (4.24),

$$\begin{aligned} \left| I_3 - \int_{\mathbb{T}} \varphi(0, 0, 0) \right| &= \left| \int_{\mathbb{T}} f_1(u + t_2) g^2(u + t_2) f_1(u) du - \int_{\mathbb{T}} f_1^2(u) g^2(u) du \right| \\ &\quad + \left| \int_{\mathbb{T}} f_2^2(u) g^2(u) du \right| \\ &\leq K \left\| f_1(u + t_2) g^2(u + t_2) - f_1(u) g_1^2(u) \right\|_1 + \varepsilon = o(1) + \varepsilon \end{aligned} \quad (4.29)$$

при $t_2 \rightarrow 0$. Из (4.26)–(4.29) для достаточно малого $|\mathbf{t}|$ имеем

$$|\varphi_1(\mathbf{t}) - \varphi(0, 0, 0)| \leq 2\varepsilon. \quad (4.30)$$

Далее, для $\varphi_2(\mathbf{t})$ имеем

$$\begin{aligned} |\varphi_2(\mathbf{t})|^2 &\leq \int_{\mathbb{T}} f_2^2(u) g^2(u - t_1) du \int_{\mathbb{T}} f_2^2(u - t_2) g^2(u - t_3) du \\ &= \left| \int_{\mathbb{T}} f^2(u) g^2(u - t_1) du - \int_{\mathbb{T}} f_1^2(u) g^2(u - t_1) du \right| \\ &\quad \times \int_{\mathbb{T}} f^2(u) g^2(u + t_2 - t_3) du \\ &\longrightarrow \left| \int_{\mathbb{T}} f^2(u) g^2(u) du - \int_{\mathbb{T}} f_1^2(u) g^2(u) du \right| \int_{\mathbb{T}} f^2(u) g^2(u) du, \end{aligned}$$

когда $|\mathbf{t}| \rightarrow 0$. Следовательно, с учетом (4.24), при достаточно малом $|\mathbf{t}|$

$$|\varphi_2(\mathbf{t})| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{T}} f^2(u) g^2(u) du. \quad (4.31)$$

Подобным образом можно доказать, что при достаточно малом $|\mathbf{t}|$

$$|\varphi_3(\mathbf{t})| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{T}} f^2(u) g^2(u) du. \quad (4.32)$$

Из (4.25) и (4.30)–(4.32) вытекает, что

$$\lim_{\mathbf{t} \rightarrow 0} \varphi(\mathbf{t}) = \varphi(0, 0, 0).$$

Утверждение 2.1 доказано.

Доказательство утверждения 2.2. Мы построим функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$, удовлетворяющие условиям (2.5) и (2.6). Фиксировав $p \geq 2$, выберем число $q > 1$ с условием $1/p + 1/q > 1$. Для этих p

и q рассмотрим функции $f_0(\lambda)$ и $g_0(\lambda)$, определенные в (1.12) и (1.13) соответственно. Для произвольной положительной постоянной C положим $g_{\pm}(\lambda) = g_0(\lambda) \pm C$. Так как носители функций $f_0(\lambda)$ и $g_0(\lambda)$ не пересекаются, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_0^2(\lambda) g_{\pm}^2(\lambda) d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} f_0^2(\lambda) (g_0(\lambda) \pm C)^2 d\lambda = C^2 \int_{-\pi}^{\pi} f_0^2(\lambda) d\lambda < \infty,$$

следовательно, условие (2.5) имеет место. Далее, в силу (1.14)

$$\frac{1}{n} \operatorname{tr}(T_n(f_0) T_n(g_0))^2 \longrightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (4.33)$$

и в силу теоремы В с $p_1 = p \geq 2$ и $p_2 = \infty$

$$\frac{1}{n} C^2 \operatorname{tr}(T_n^2(f_0)) \longrightarrow 8\pi^3 C^2 \int_{-\pi}^{\pi} f_0^2(\lambda) d\lambda < \infty. \quad (4.34)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(T_n(f_0) T_n(g_{\pm}))^2 &= \operatorname{tr}(T_n(f_0) T_n(g_0 \pm C))^2 \\ &= \operatorname{tr}(T_n(f_0) T_n(g_0))^2 \pm 2C \operatorname{tr}(T_n^2(f_0) T_n(g_0)) + C^2 \operatorname{tr}(T_n^2(f_0)), \end{aligned}$$

откуда, с учетом (4.33) и (4.34), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \operatorname{tr}(T_n(f_0) T_n(g_+))^2 + \frac{1}{n} \operatorname{tr}(T_n(f_0) T_n(g_-))^2 \\ = \frac{2}{n} \operatorname{tr}(T_n(f_0) T_n(g_0))^2 + \frac{2}{n} C^2 \operatorname{tr}(T_n^2(f_0)) \longrightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, либо

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{tr}(T_n(f_0) T_n(g_+))^2 = \infty,$$

либо

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{tr}(T_n(f_0) T_n(g_-))^2 = \infty.$$

Таким образом,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \chi_2(\tilde{Q}_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \operatorname{tr}(T_n(f) T_n(g))^2 = \infty$$

с $f = f_0$ и $g = g_+$ или $g = g_-$. Утверждение 2.2 доказано.

Авторы выражают благодарность академику И. А. Ибрагимову за внимание к работе, а также рецензенту за полезные замечания и комментарии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Avram F.* On bilinear forms in Gaussian random variables and Toeplitz matrices. — *Probab. Theory Related Fields*, 1988, v. 79, № 1, p. 37–45.
2. *Бенткус Р.* Об ошибке оценки спектральной функции стационарного процесса. — *Литов. матем. сб.*, 1972, т. 12, № 1, с. 55–71.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
4. *Fox R., Taqqu M. S.* Central limit theorem for quadratic forms in random variables having long-range dependence. — *Probab. Theory Related Fields*, 1987, v. 74, № 2, p. 213–240.
5. *Гиновян М. С.* Асимптотически эффективное непараметрическое оценивание функционалов от спектральной плотности, имеющей нули. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1988, т. 33, в. 2, с. 315–322.
6. *Гиновян М. С.* Замечание о центральной предельной теореме для квадратичных форм тёплицева типа от стационарных гауссовских величин. — *Изв. НАН Армении, сер. матем.*, 1993, т. 28, № 2, с. 78–81.
7. *Ginovian M. S.* On Toeplitz type quadratic functionals of stationary Gaussian process. — *Probab. Theory Related Fields*, 1994, v. 100, № 3, p. 395–406.
8. *Giraitis L., Surgailis D.* A central limit theorem for quadratic forms in strongly dependent linear variables and its application to asymptotical normality of Whittle's estimate. — *Probab. Theory Related Fields*, 1990, v. 86, № 1, p. 87–104.
9. *Гренандер У., Сегё Г.* Тёплицевы формы и их приложения. М.: ИЛ, 1961, 308 с.
10. *Hasminskii R. Z., Ibragimov I. A.* Asymptotically efficient nonparametric estimation of functionals of a spectral density function. — *Probab. Theory Related Fields*, 1986, v. 73, № 3, p. 447–461.
11. *Ибрагимов И. А.* Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1963, т. 8, в. 4, с. 391–430.
12. *Rosenblatt M.* Asymptotic behavior of eigenvalues of Toeplitz forms. — *J. Math. Mech.*, 1962, v. 11, № 6, p. 941–949.
13. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1976, 141 с.
14. *Terrin N., Taqqu M. S.* A noncentral limit theorem for quadratic forms of Gaussian stationary sequences. — *J. Theoret. Probab.*, 1990, v. 3, № 3, p. 449–475.
15. *Terrin N., Taqqu M. S.* Convergence in distribution of sums of bivariate Appell polynomials with long-range dependence. — *Probab. Theory Related Fields*, 1991, v. 90, № 1, p. 57–81.
16. *Terrin N., Taqqu M. S.* Convergence to a Gaussian limit as the normalization exponent tends to $\frac{1}{2}$. — *Statist. Probab. Lett.*, 1991, v. 11, № 5, p. 419–427.
17. *Taniguchi M.* Berry–Esseen theorems for quadratic forms of Gaussian stationary processes. — *Probab. Theory Related Fields*, 1986, v. 72, № 2, p. 185–194.
18. *Taniguchi M., Kakizawa Y.* Asymptotic Theory of Statistical Inference for Time Series. New York: Springer-Verlag, 2000, 661 p.

Поступила в редакцию
17.V.2004