Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Жуленев, О больших отклонениях, II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 4, 672–694

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp188>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 13:50:46

© 2004 г.

ЖУЛЕНЕВ С. В.*

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ, II

Метод Эшера–Крамера позволяет получать представления больших отклонений и без условия Крамера. При этом для нормированных сумм независимых и одинаково распределенных случайных величин при достаточно большом числе слагаемых они оказываются мало отличающимися от тех, которые справедливы при выполнении этого жесткого условия.

Ключевые слова и фразы: обобщенное преобразование Крамера, усеченная экспонента, условные математические ожидания.

Введение. Практически с момента возникновения проблематики больших отклонений (БУ), т.е. уже более 60 лет, на повестке дня стоит один вопрос: существует ли представление БУ (ПБУ) без условия Крамера, в определенном смысле аналогичное тому, которое имеет место при этом условии, и если нет, то почему? В настоящей работе, которая является продолжением [1], предпринята попытка разобраться в этой ситуации и показано, что такое представление существует.

Условие, заменяющее условие Крамера, естественно и сводится к существованию некоторого момента у слагаемых нормированной суммы. Однако форму представления, которую можно было бы называть «аналогичной крамеровской», фактически подсказал нетрадиционный взгляд на метод Крамера, предложенный в [1] (причем по ряду причин оказалась удобной форма, используемая в [2]). Так что становится понятным, почему так долго не удавалось ответить на указанный вопрос. Конечно, если автор не ошибается, и то, что ему ничего не известно о каких-то ответах на него, действительно означает, что эти ответы и не были даны.

С математической точки зрения основную часть работы составляет доказательство одной теоремы. К сожалению, оно оказалось весьма громоздким, и даже формулировка потребовала специальной подготовки, проведенной в п. 1. Поэтому его пришлось упрощать, выделяя узловые моменты и вынося их доказательство за рамки непосредственного

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: zhulenev@mech.math.msu.su

обоснования теоремы, приведенного в п. 2, — они помещены в пп. 3–5. Мотивировать же тот факт, что предложенное представление «аналогично крамеровскому», наоборот, совсем необязательно. Достаточно лишь взглянуть на эти два представления (использованное в [2] приведено в п. 7). Но в п. 7 все же дан и сравнительный анализ этих представлений, поскольку представляет интерес, сближаются ли в определенном смысле рассматриваемые представления при увеличении числа слагаемых нормированной суммы или «сближении» используемого условия с условием Крамера. Наконец, в п. 6 помещены несколько утверждений, полезных при вычислении некоторых элементов нашего представления, поскольку основной целью нетрадиционного подхода является все же не столько асимптотика «хвоста распределения», сколько его запись в виде конкретной функции на конкретном интервале.

1. Одинаковые слагаемые. Каноническое представление.

Рассмотрим получение ПБУ в простейшем случае нормированной суммы S_n/s_n независимых одинаково распределенных случайных величин (н.о.р.с.в.) $(X_l)_{l \geq 1}$; пусть, как и обычно, $S_n = \sum_1^n X_l$, $s_n^2 = \mathbf{D}S_n$. При этом по-прежнему будем считать, что все наши (одномерные) с.в. несмещены, как и в ч. I, но теперь имеют лишь конечное число моментов. Точнее говоря, допустим, что

$$\mathbf{E}X_1 = 0, \quad \mathbf{D}X_1 = d^2 > 0, \quad (1)$$

$$\alpha_{2s+2} < \infty \quad (2)$$

при некотором фиксированном целом $s \geq 1$; здесь и ниже $\alpha_k = \mathbf{E}X_1^k$.

Однако прежде чем перейти к получению искомого представления, проведем небольшую подготовку. А именно, уточним вид используемого обобщенного преобразования Крамера (ОПК; см. [1]), введем большую часть обозначений и установим соотношение, которое назовем «каноническим». Дело в том, что его можно считать лежащим в основе любых ПБУ нашего типа. Как тех, которые устанавливаются при условии Крамера, так и тех, которые мы собираемся доказывать с его помощью.

1.1. *Используемые аналоги преобразования Крамера.* Как и в ч. I, договоримся считать всюду ниже основным параметр λ , вообще говоря, пробегающий положительную ось. Но сначала предположим, что произвольное $\lambda > 0$ фиксировано, и введем последовательность независимых одномерных с.в. $Y_l = \zeta(\lambda; X_l/s_n)$, которые, как и в ч. I, будем называть ОПК с.в. X_l/s_n с функцией $g_\lambda(t) = e_{2s}(\lambda t)$, $e_s(t) = 1 + t + \dots + t^s/s!$. Означать же это будет, что их распределение задается равенством

$$d\mathbf{P}\{Y_l < t\} = e_{2s}(\lambda t) \varphi_{2s}^{-1}(z) d\mathbf{P}\{X_l < s_n t\}; \quad (3)$$

здесь и ниже $\varphi_s(\lambda) = \mathbf{E}e_s(\lambda X_l) = \sum_0^s \alpha_k \lambda^k/k!$, $z = \lambda/s_n$.

Введенные выше н.о.р.с.в. Y_l , $1 \leq l \leq n$ (а их существование вытекает из теоремы Колмогорова), фактически являются основными «кирпичиками» проводимого ниже анализа, поскольку в дальнейшем потребуется лишь преобразование, являющееся по координатным произведением выражений (3):

$$\prod_{l=1}^n d\mathbf{P}\{Y_l < y_l\} = \varphi_{2s}^{-n}(z) \prod_{l=1}^n e_{2s}(\lambda y_l) d\mathbf{P}\{X_l < s_n y_l\}. \quad (4)$$

Ясно, что определенное таким образом распределение n -мерного вектора $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ с независимыми компонентами можно называть ОПК n -мерного вектора $X/s_n = (X_1, \dots, X_n)/s_n$ с функцией $G_n(\lambda; y) = \prod_{l=1}^n e_{2s}(\lambda y_l)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Именно с помощью преобразования (4) мы и будем записывать искомую вероятность $\mathbf{P}\{S_n > s_n x\}$, используя несколько новых и старых обозначений:

$$\begin{aligned} m_l &= \mathbf{E}Y_l \equiv m, \quad \zeta = \sum_{l=1}^n Y_l, \quad x = \mathbf{E}\zeta, \quad \sigma^2 = \mathbf{D}\zeta, \quad \eta = \prod_{l=1}^n e_{2s}^{-1}(\lambda Y_l), \\ \bar{Y}_l &= \frac{Y_l - m}{\sigma}, \quad H = \sum_{l=1}^n \bar{Y}_l, \quad H(t) = \mathbf{P}\{H < t\} = \mathbf{P}\{\zeta < x + \sigma t\}, \\ \nu &= \sup_t |H(t) - \Phi(t)|, \quad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-y^2/2} dy, \quad \beta_k = \frac{\alpha_k}{d^k}, \quad \alpha_k = \mathbf{E}X_1^k, \\ J(t) &= \frac{t(1 - \Phi(t))}{\Phi'(t)} = t e^{t^2/2} \int_t^\infty e^{-y^2/2} dy, \quad t \geq 0, \\ I(B) &= \begin{cases} 1, & \omega \in B, \\ 0, & \omega \notin B, \end{cases} \\ m(z) &= \frac{\varphi'_{2s+1}(z)}{\varphi_{2s}(z)}, \quad \sigma^2(z) = \frac{\varphi''_{2s+2}(z)}{\varphi_{2s}(z)} - \left(\frac{\varphi'_{2s+1}(z)}{\varphi_{2s}(z)} \right)^2, \quad \varphi_s(\lambda) = \sum_0^s \alpha_k \frac{\lambda^k}{k!} \end{aligned}$$

(имеются в виду производные по z). Всюду ниже через θ и δ , с индексом или без него, будем обозначать разные величины, но такие, что $|\theta| \leq 1$, а $0 \leq \delta \leq 1$. Также пусть $\bar{B}$ всегда обозначает дополнение события B .

Подчеркнем следующее. Во-первых, все введенные величины $\zeta, x, \sigma^2, \nu, H(t)$ являются функциями λ , как θ и другие величины ниже. Однако чаще мы этого указывать не будем. Во-вторых, ранее в [1] через m мы обозначали сумму математических ожиданий m_l , а не каждое из них, как сейчас. Наконец, в-третьих, различие преобразований Крамера (ПК), используемых в [1] и здесь, состоит в следующем. Величины Y_l фактически определяются аналогично, но только в [1] функция $g_\lambda(t) = e^{\lambda t}$, а величины X_l произвольны. Кроме того, ПК из [1] обладают свойством линейности, т.е. ПК линейной комбинации с.в. является соответствующей линейной комбинацией ПК данных с.в. (см. лемму 3

из [2]). Здесь же это свойство отсутствует, и потому для записи искомой вероятности нужно непосредственно вводить преобразование (4) и с.в. η .

1.2. *Каноническое представление.* Рассматриваемые ниже характеристики всех с.в. являются функциями основного параметра λ . И прежде всего математическое ожидание и дисперсия с.в. ζ . Поскольку дальнейшее во многом зависит от них, приведем не только соответствующие выражения (из них ясно, что существование указанных величин определяется условием (2)), но и краткий комментарий.

Так, связь параметров x и λ задается равенством (см. также п. 4)

$$x = x(\lambda) = \mathbf{E}\zeta = n m = \frac{n}{s_n} m(z), \quad (5)$$

$$\sigma^2 = \sigma_n^2(\lambda) = \mathbf{D}\zeta = \frac{n}{s_n^2} \sigma^2(z) > 0 \quad (6)$$

в силу (1). И это по-прежнему (как и в [1]) говорит о том, что уравнение $x = x(\lambda)$ имеет единственное решение λ при всех возможных x в широком диапазоне предположений. Правда, на этот раз $\mathbf{D}\zeta \neq x'(\lambda)$, и потому сразу такой вывод, по-видимому, не следует. Однако эти функции «почти» равны асимптотически, поскольку теперь

$$\sigma_n^2(\lambda) = x'_\lambda(\lambda) + \frac{z^{2s} [\alpha_{2s+2} - m(z) \alpha_{2s+1}]}{(2s)! \varphi_{2s}(z) d^2}$$

и второе слагаемое здесь является o -малым порядка z^{2s} при $z \rightarrow 0$. Более того, в условиях нашей теоремы даже оказывается, как и в [1], что $x(\lambda) \sim \lambda$, $\sigma^2 \sim 1$, $n \rightarrow \infty$.

Покажем теперь, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если выполнены условия (1), (2), то при всех $\lambda > 0$ и соответствующих им x из (5) имеет место представление*

$$\mathbf{P}\{S_n > s_n x\} = \varphi_{2s}^n(z) \int_0^\infty \mathbf{E}(\eta \mid H = t) dH(t). \quad (7)$$

Доказательство. Из независимости с.в. (X_l) и (Y_l) вытекает, что

$$d\mathbf{P}\{S_n < s_n t\} = \int_t^\infty \prod_1^n d\mathbf{P}\{X_l < s_n y_l\}, \quad dH(t) = \int_t^\infty \prod_1^n d\mathbf{P}\{\bar{Y}_l < y_l\};$$

символ $\int$ здесь и ниже использован для обозначения интегрирования по пространству $\mathbf{R}^n$ значений векторов X/s_n , Y и $\bar{Y} = (\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n)$, а символ « $=t$ » обозначает гиперплоскость $\sum_1^n y_l = t$. Таким образом, используя ОПК (4) и проводя элементарные выкладки, можно записать

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_n > s_n x\} &= \int_x^\infty d\mathbf{P}\{S_n < s_n t\} = \int_x^\infty \int_t^\infty \prod_1^n d\mathbf{P}\{X_l < s_n y_l\} \\ &= \varphi_{2s}^n(z) \int_x^\infty \int_t^\infty \prod_1^n \frac{d\mathbf{P}\{Y_l < y_l\}}{e_{2s}(\lambda y_l)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi_{2s}^n(z) \int_0^\infty \left\{ \int_{=t} \prod_1^n \frac{d\mathbf{P}\{\bar{Y}_l < y_l\}}{e_{2s}(\lambda(m + \sigma y_l))} \left(\int_{=t} \prod_1^n d\mathbf{P}\{\bar{Y}_l < y_l\} \right)^{-1} \right\} dH(t) \\
&= \varphi_{2s}^n(z) \int_0^\infty \mathbf{E}(\eta | H = t) dH(t), \tag{8}
\end{aligned}$$

поскольку $\eta = \prod_{l=1}^n e_{2s}^{-1}(\lambda(m + \sigma \bar{Y}_l))$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. При некоторых значениях t условное математическое ожидание $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\eta | H = t)$ может и не существовать. Однако на величине самого интеграла в (7) это не скажется, поскольку неопределенность будет уничтожена соответствующим нулевым элементом $dH(t)$. И все же часто в таких случаях полагают, скажем, что $\mathbf{E} = 1$.

2. Одинаковые слагаемые. Основной результат. Из доказанной леммы следует, что область задания искомого представления на оси λ представляет собой полуось, а на оси x зависит от выражения (5). Однако нам желательно, прежде всего, получить такое представление, которое можно было бы сравнивать с аналогичным представлением при условии Крамера. В связи с этим рассмотрим на оси λ интервал

$$0 < \lambda < C(\sqrt{n})^{1-\alpha} \tag{9}$$

с произвольной постоянной C и параметром α , выбранным из условия

$$1) \quad \alpha_{2s+1} = 0: \alpha > \frac{1}{s+1}; \quad 2) \quad \alpha_{2s+1} \neq 0: \alpha > \frac{2}{2s+1}. \tag{10}$$

Обоснование нашего утверждения потребует также обозначений

$$K_n(\varepsilon) = \{y \in \mathbf{R}^n: |y_l| \leq \varepsilon, 1 \leq l \leq n\}, \quad \varepsilon = (\sqrt{n})^{-\beta}, \quad A = \{\bar{Y} \in K_n(\varepsilon)\}$$

для уменьшающегося куба $K_n(\varepsilon)$ пространства $\mathbf{R}^n$, поглощающего вектор $\bar{Y}$ с ростом n в том смысле, что $\mathbf{P}(A) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$, если «скорость» β его уменьшения не слишком велика. Кроме того, введем и обозначение $H_{[a,b]}$ для события $\{a \leq H < b\}$, $0 \leq a \leq b \leq \infty$ ($H_t = \{H = t\}$).

Теорема. Если выполнены условия (1), (2), то для всех λ из (9) и соответствующих им x из (5) при любых фиксированных $n \geq 1, T > 0$ и α из (10) справедливо представление

$$\mathbf{P}\{S_n > s_n x\} = \frac{\varphi_{2s}^n(z) e^{-\lambda x}}{c\sigma(z)\sqrt{2\pi}} (1 + \delta_n(\lambda)), \tag{11}$$

в котором

$$\delta_n(\lambda) = c\sigma(z)\sqrt{2\pi}\{2\theta\nu e^{\mu_1} + \Delta_n\} - \{1 - \delta_1 e^{\mu_1} J(c\sigma(z))\}, \tag{12}$$

$$\Delta_n = \delta_2 e^{-\lambda\sigma T + \mu_2} \mathbf{P}(H_{[T, \infty)}) + \delta_3 e^{\mu_3} \mathbf{P}(\bar{A}), \tag{13}$$

$$\delta_1 = 1 - \frac{1 - \Phi(\lambda\sigma + T)}{1 - \Phi(\lambda\sigma)}, \quad 0 < \delta_2, \delta_3 \leq 1, \quad c = \frac{\lambda}{d}, \quad z = \frac{\lambda}{s_n}, \tag{14}$$

величины $\mu_l = \mu_l(n; T)$, $l = 1, 2$, $\mu_3 = \mu_3(n)$ определены в (16), (17) ниже; при этом $\mu_1 \rightarrow 0$, $\mu_2 \rightarrow 0$, а μ_3 ограничено при $n \rightarrow \infty$, а $\lambda\sigma = c\sigma(z)$.

Доказательство. В работе приведено полное и замкнутое обоснование этого результата. Оно весьма громоздко, и потому естественно объяснение всех его основных узлов отделить и поместить в пп. 3–5, а здесь привести лишь схему доказательства. Разобьем ее на три части.

1. *Вспомогательное ПБУ.* Интеграл в правой части (7) совпадает с величиной $\mathbf{E}(\eta I(H \geq 0))$. Но для него можно получить и несколько иное представление ($I_A = I(A)$)

$$\int_0^\infty \mathbf{E}(\eta | H_t) dH(t) = \int_0^T \mathbf{E}(\eta I_A | H_t) dH(t) + \mathbf{E}(\eta I_A | H_{[T, \infty)}) \mathbf{P}(H_{[T, \infty)}) + \delta_3 e^{-\lambda x + \mu} \mathbf{E}(\rho | \bar{A}) \mathbf{P}(\bar{A}). \quad (15)$$

Для этого достаточно разложить с.в. $\eta I(H \geq 0)$ в сумму трех с.в. соответственно разбиению события $\{H \geq 0\} = H_{[0, \infty)}$ на три подмножества

$$H_{[0, \infty)} = A \cap H_{[0, T)} + A \cap H_{[T, \infty)} + \bar{A} \cap H_{[0, \infty)},$$

ввести еще одну вспомогательную с.в.

$$\rho = \prod_1^n \frac{e_{2s}(\lambda m)}{e_{2s}(\lambda(m + \sigma \bar{Y}_l))} = \prod_1^n \frac{e_{2s}(\lambda m)}{e_{2s}(\lambda Y_l)} = e^{\lambda x - \mu \eta} \quad (16)$$

($\mu \rightarrow 0$ в силу свойства 2.4 ниже) и воспользоваться равенствами

$$\mathbf{E}(\eta I(A \cap H_{[0, T)})) = \int_0^T \mathbf{E}(\eta I_A | H_t) dH(t),$$

$$\mathbf{E}(\eta I(\bar{A} \cap H_{[0, \infty)})) = e^{-\lambda x + \mu} \mathbf{E}(\rho I(\bar{A} \cap H_{[0, \infty)})) = \delta_3 e^{-\lambda x + \mu} \mathbf{E}(\rho | \bar{A}) \mathbf{P}(\bar{A}).$$

2. *Узловые факты, установленные ниже.* Обоснование теоремы непосредственно опирается на ряд фактов разного уровня сложности, которым ниже мы присвоили номера 2.1–2.5. Условия справедливости всех этих свойств уточняются ниже, в пп. 3–5, т.е. там, где они и доказываются. Соотношения 2.2 используются для записи в нужной форме первого, интегрального слагаемого в (15). При выяснении роли остальных двух слагаемых в этом представлении используются, наряду с 2.2, последние соотношения 2.3–2.5:

$$2.1 \quad \mathbf{P}(A) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty;$$

$$2.2 \quad \mathbf{E}(\eta I_A | H_t) = e^{-\lambda(x + \sigma t)} \mathbf{E}(\varrho I_A | H_t), \quad \varrho = \exp(\sum_1^n c_l (\lambda Y_l)^{2s+1}), \\ e_{2s}^{-1}(\lambda(m + \sigma \varepsilon)) < (2s + 1)! c_l < e_{2s}^{-1}(\lambda(m - \sigma \varepsilon)); \\ \mathbf{E}(\eta I_A | H_{[T, \infty)}) = \delta e^{-\lambda(x + \sigma T)} \mathbf{E}(\varrho I_A | H_{[T, \infty)});$$

$$2.3 \quad \mathbf{E}(\varrho I_A | H_t) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{равномерно по } 0 \leq t \leq T,$$

$$\mathbf{E}(\varrho I_A | H_{[T, \infty)}) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty;$$

$$2.4 \quad e_{2s}^n(\lambda m) \sim e^{\lambda x}, \quad n \rightarrow \infty;$$

$$2.5 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\rho | \bar{A}) \leq g_s < \infty.$$

В заключение все же уточним, где эти узловые моменты теоремы обоснованы. Так, свойства 2.2 и 2.4 устанавливаются в следствии 1 (п. 3), свойство 2.1 — в лемме 3 (п. 4), свойство 2.5 — в следствии 3 (п. 5). Что же касается свойств 2.3, то их элементарное доказательство (но при более жестком условии, чем (10)) приведено в лемме 6, а основной вариант излагается в следствии 5, причем оба утверждения находятся в п. 5.

3. *Формирование представления и ошибки $\delta_n(\lambda)$* . Теперь чтобы получить искомое представление, фактически достаточно определить величины μ_l . Сделаем это с помощью равенств

$$e^{\mu_1} \int_0^T e^{-\lambda\sigma t} dH(t) = \int_0^T e^{-\lambda\sigma t} \mathbf{E}(\varrho I_A | H_t) dH(t), \quad (17)$$

$$\mathbf{E}(\varrho I_A | H_{[T, \infty)}) = e^{\mu_2}, \quad e^\mu \mathbf{E}(\rho | \bar{A}) = e^{\mu_3} \quad (17')$$

и покажем, что представление (11) с элементами (12)–(14) действительно легко вытекает из леммы 1 и соотношения (15) в силу 2.1–2.5.

Прежде всего, ясно, что $\mu_l \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $l = 1, 2$ в силу 2.3, а ограниченность величин $\mu_3 = \mu_3(n)$ при $n \rightarrow \infty$ вытекает из 2.5 и того, что $\mu \rightarrow 0$ в силу 2.4. Далее, нетрудно видеть, что во всех трех слагаемых в (15) появится множитель $e^{-\lambda x}$, если воспользоваться свойствами 2.2 и выражением $\eta = e^{\mu - \lambda x} \rho$. Причем без этого множителя второе и третье слагаемые можно записать в виде (13). Наконец, первому слагаемому можно придать форму $I_1 e^{-\lambda x + \mu_1}$, где

$$I_1 = \int_0^T e^{-\lambda\sigma t} dH(t) = \frac{J(\lambda\sigma)}{\lambda\sigma\sqrt{2\pi}} \delta_1 + 2\theta\nu,$$

если по аналогии с [2] (см. (9), (10)) воспользоваться представлением

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-at} dH(t) &= \int_0^T e^{-at} d\Phi(t) + \int_0^T e^{-at} d(H(t) - \Phi(t)) \\ &= e^{a^2/2} (1 - \Phi(a)) \delta_1 + e^{-at} (H(t) - \Phi(t)) \Big|_0^T - \int_0^T (H(t) - \Phi(t)) de^{-at}, \end{aligned}$$

в котором $a = \lambda\sigma = c\sigma(z)$. Теорема доказана.

3. Свойства усеченной экспоненты. Прежде чем интересоваться выводом искомого представления, естественно внести ясность в некоторые возникающие при его обосновании проблемы. Начнем с того, что укажем ряд свойств функции

$$e_{2s}(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^{2s}}{(2s)!},$$

которые нам потребуются в дальнейшем. Как известно (см. [3, гл. II, с. 39, 40], где она обозначается $\exp_{2s}(t)$), эта функция при всех $t \in \mathbf{R}$

положительна, и именно это позволяет использовать ее для построения ОПК (4).

Функция $e_{2s}(t)$ не только положительна, но и выпукла вниз при всех t , поскольку ее вторая производная $e_{2s-2}(t)$ также положительна всюду. Поэтому функция $g(t) = e_{2s}^{-1}(t)$ напоминает одновершинную плотность. Ее первая производная лишь раз меняет свой знак, а для нулей второй производной имеем уравнение $2e_{2s-1}^2 = e_{2s-2}e_{2s}$. Поэтому $g(t)$ имеет одну точку максимума $t_m(s)$ и две точки перегиба $t_c^-(s) < t_m(s) < t_c^+(s) < 0$. Иными словами, в интервале $t_c^-(s) < t < t_c^+(s)$ функция $g(t)$ выпукла вверх, а вне его — вниз. Ясно также, что

$$t_c^-(1) = -1 - \frac{1}{\sqrt{3}} < t_m(1) = -1 < t_c^+(1) = -1 + \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$g_s \equiv g(t_m(s)) = (2s)! (t_m(s))^{-2s}.$$

Но, возможно, главной точкой опоры при обосновании ПБУ без условия Крамера является тот факт, что в окрестности нуля усеченная и обычная экспоненты почти совпадают. Причем слово «почти» можно использовать тем с большим основанием, чем больше s . Так говорить позволяет следующее утверждение.

Лемма 2. При любых $y \in \mathbf{R}$

$$\ln e_{2s}(y) = y - A_s(y), \quad \text{где} \quad A_s(y) = \int_0^y \frac{t^{2s}}{(2s)! e_{2s}(t)} dt. \quad (18)$$

В частности, при любых $s \geq 0$, $k = 2s + 1$ и указанных ниже y

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{1}{e_{2s}(y)} = \exp \left(-y + a \frac{y^k}{k!} \right), \\ 2) \quad & \frac{e_{2s}(c)}{e_{2s}(c+y)} = \exp \left(-y + b \frac{(c+y)^k - c^k}{k!} \right); \end{aligned}$$

при этом величины $a = a(y)$, $b = b(c, y)$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} 1) \quad & y > 0: e^{-y} < e_{2s}^{-1}(y) < a < 1; \quad t_m(s) < y < 0: 1 < a < e_{2s}^{-1}(y) < g_s; \\ 2) \quad & y > 0: e^{-(c+y)} < b < e_{2s}^{-1}(c); \quad t_m(s) - c < y < 0: e_{2s}^{-1}(c) < b < g_s. \end{aligned}$$

Доказательство. Так как $(\ln e_{2s}(y))'_y = e_{2s-1}/e_{2s} = 1 - y^{2s}/((2s)! e_{2s}(y))$ и $\ln e_{2s}(0) = 0$, то $\ln e_{2s}(y) = \int_0^y [1 - t^{2s}/((2s)! e_{2s}(t))] dt$. Поэтому основное соотношение (18) установлено. Приведенные же в лемме свойства 1), 2) вытекают из него и монотонности функции $e_{2s}^{-1}(y)$ на интервале $y > t_m(s)$. Лемма доказана.

Приведем сразу и пример практического использования этой леммы. Напомним: с.в. η была введена в п. 1, а с.в. ρ и события A, H_t — в п. 2.

Следствие 1. При любых $0 < t, T \leq n\varepsilon$ справедливы представления

$$2.2 \quad \mathbf{E}(\eta I_A | H_t) = e^{-\lambda(x+\sigma t)} \mathbf{E}(\varrho I_A | H_t) \quad (\text{с указанными } c_l) \text{ и} \\ \mathbf{E}(\eta I_A | H_{[T, \infty)}) = \delta e^{-\lambda(x+\sigma T)} \mathbf{E}(\varrho I_A | H_{[T, \infty)}),$$

если условные математические ожидания существуют и $\lambda(m - \sigma\varepsilon) \geq t_m(s)$.

Если же $(2s+1)\alpha > 1$, то равномерно по λ из (9) имеем

$$2.4 \quad \prod_1^n e_{2s}(\lambda m) = e_{2s}^n(\lambda m) \sim e^{\lambda x}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Если $y \in K_n(\varepsilon) \cap B_t$, $B_t = \{y \in \mathbf{R}^n: \sum_1^n y_l = t\}$, то

$$\prod_1^n \frac{1}{e_{2s}(\lambda(m + \sigma y_l))} = \exp \left\{ -\lambda(x + \sigma t) + \sum_1^n a_l \frac{(\lambda(m + \sigma y_l))^{2s+1}}{(2s+1)!} \right\}$$

в силу п. 1 леммы 2. Нужно только учесть, что возможные значения с.в. Y_l (т.е. $m + \sigma y_l$) представляют собой некоторую окрестность нуля и потому $e_{2s}^{-1}(\lambda(m + \sigma\varepsilon)) \leq a_l \leq e_{2s}^{-1}(\lambda(m - \sigma\varepsilon))$. Тем самым первое представление в 2.2 установлено. Чтобы обосновать второе, заметим, что событие $A \cap H_t$ пусто при $t > n\varepsilon$, т.е. $\mathbf{E}(\eta I_{A \cap H_t}) = 0$. Поэтому

$$\mathbf{E}(\eta I(A \cap H_{[T, \infty)})) = \int_T^\infty \mathbf{E}(\eta I_A | H_t) dH(t) = \int_T^{n\varepsilon} \mathbf{E}(\eta I_A | H_t) dH(t) \\ \leq e^{-\lambda(x+\sigma T)} \int_T^{n\varepsilon} \mathbf{E}(\varrho I_A | H_t) dH(t) = e^{-\lambda(x+\sigma T)} \mathbf{E}(\varrho I(A \cap H_{[T, \infty)})).$$

Наконец, тот же пункт леммы 2 позволяет сказать, что в равенстве $e_{2s}^n(\lambda m) = \exp(n(\lambda m - a(\lambda m)^k/k!)) \sim \exp(\lambda x)$ параметр a принимает значения в интервале $(0, 1)$. Искомое же соотношение 2.4, очевидно, имеет место, если $n(\lambda m)^k \rightarrow 0$. Иными словами, соотношение 2.4 имеет место, если $\lambda^{2k} n^{1-k} = o(1)$, поскольку $m \sim \lambda/n$ (см. начало п. 4). Но для этого достаточно выбрать α из неравенства $(2s+1)\alpha > 1$. Следствие доказано.

4. Поглощающий куб. Асимптотика элементов. В этом пункте перед нами две цели. Во-первых, указать условия, при которых куб $K_n(\varepsilon)$ «поглощает» вектор $\bar{Y}$, т.е. равномерно по λ из (9)

$$2.1 \quad p = \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\{|Y_l - m| \leq \sigma\varepsilon, 1 \leq l \leq n\} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (19)$$

И, во-вторых, подготовить «почву» для обоснования соотношений 2.3 и 2.5. Для этого выясним условия «быстрого» убывания трех условных математических ожиданий. Но сначала уточним асимптотику основных элементов нашего ПБУ, которые в дальнейшем будут неоднократно

использоваться. Для чего напомним, что все это нас интересует в ситуации, когда выполнены условия (1), (2), (9), а сторона куба определяется величиной $\varepsilon = (\sqrt{n})^{-\beta}$.

Итак, в указанных условиях при $n \rightarrow \infty$ (и $\alpha > 0$)

$$\begin{aligned}\varphi_{2s}(z) &= \sum_0^{2s} \alpha_k \frac{z^k}{k!} \sim 1 + \frac{d^2 z^2}{2} = 1 + \frac{\lambda^2}{2n}, \quad \varphi'_{2s+1}(z) \sim d^2 z = d \frac{\lambda}{\sqrt{n}}, \\ m(z) &= \frac{\sum_1^{2s} \alpha_{k+1} z^k / k!}{\varphi_{2s}(z)} \sim d^2 z, \quad m = \frac{m(z)}{s_n} \sim \frac{\lambda}{n}, \quad x = \frac{n}{s_n} m(z) \sim \lambda, \\ \sigma^2(z) &= \frac{\sum_0^{2s} \alpha_{k+2} z^k / k!}{\varphi_{2s}(z)} - m^2(z) \sim d^2 \left[1 + \beta_3 \frac{\lambda}{\sqrt{n}} + (\beta_4 - 3) \frac{\lambda^2}{2n} \right], \\ \sigma^2 &= \frac{\sigma^2(z)}{d^2}.\end{aligned}$$

Покажем далее, что куб $K_n(\varepsilon)$ может быть поглощающим, если

$$\alpha > (s+1)^{-1}. \quad (20)$$

Используем для этого известное асимптотическое соотношение

$$\int_t^\infty y^k d\mathbf{P}\{X_l < y\} = o(t^{-(2s+2-k)}), \quad t \rightarrow \infty \quad (21)$$

(и его аналог для интеграла $\int_{-\infty}^t y^k d\mathbf{P}\{X_l < y\}$ при $t \rightarrow -\infty$), справедливое при любом $0 \leq k \leq 2s+2$, если выполнено условие (2).

Лемма 3. В условиях (1), (2), (9) соотношение (19) имеет место, если

$$\beta < s(s+1)^{-1}, \quad \alpha + \beta \geq 1. \quad (22)$$

Доказательство. При любом $0 < \delta < 1$ и достаточно больших n

$$\begin{aligned}1 - p &\leq \sum_1^n \int_{|t| \geq \varepsilon} d\mathbf{P}\{Y_l - m < \sigma t\} \leq \sum_1^n \int_{|t| \geq \delta \varepsilon} d\mathbf{P}\{Y_l < t\}, \\ \int_{|t| \geq \delta \varepsilon} d\mathbf{P}\{Y_l < t\} &= \varphi_{2s}^{-1}(z) \int_{|t| \geq \delta \varepsilon} e_{2s}(\lambda t) d\mathbf{P}\{X_l < s_n t\}.\end{aligned}$$

Поэтому достаточно показать, что последний интеграл при всех l есть $o(n^{-1})$. Но это вытекает из условий, поскольку в силу (21) при любом $0 \leq k \leq 2s$:

$$\begin{aligned}\int_{|t| \geq \delta \varepsilon} (\lambda t)^k d\mathbf{P}\{X_l < s_n t\} &= \int_{|y| \geq \delta \varepsilon s_n} (zy)^k d\mathbf{P}\{X_l < y\} \\ &= z^k o((\varepsilon s_n)^{-(2s+2-k)}) = O((\sqrt{n})^{-(1-\beta)(2s+2)+k(1-\alpha-\beta)}).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Нетрудно видеть, что при $\alpha > 1/(s+1)$ условию (22) удовлетворяет любое β из интервала $[1-\alpha, s/(s+1))$. Таким образом, если выбрать параметр α из условия (20), то существуют скорости β «убывания» куба $K_n(\varepsilon)$, при которых он «поглощает» вектор $\bar{Y}$ в смысле (19).

З а м е ч а н и е 2. Отметим для сравнения, насколько быстро может уменьшаться куб $K_n(\varepsilon)$, в который с вероятностью 1 «заползает» вектор X/s_n из одинаково нормально распределенных с.в. $X_l = N(0, 1)$. Оказывается, что в этом случае можно даже положить $\varepsilon = ((2 \ln n)/n)^{1/2}$. В самом деле, поскольку $s_n^2 = n$ и $1 - \Phi(x) \sim e^{-x^2/2}/(x\sqrt{2\pi})$, $x \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}\{Xs_n^{-1} \in K_n(\varepsilon)\} = (1 - 2(1 - \Phi(\varepsilon\sqrt{n})))^n \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Перейдем теперь к решению второй задачи, т.е. к выявлению асимптотики трех условных математических ожиданий. Для этого сначала введем несколько новых обозначений: $t_{\pm} = s_n y_{\pm}$, $y_{\pm} = m \pm \sigma \varepsilon$,

$$r_m = \left(\int_{t_+}^{\infty} + \int_{-\infty}^{t_-} \right) t^m d\mathbf{P}\{X_l < t\},$$

$$R_m = \left(\int_{t_+}^{\infty} + \int_{-\infty}^{t_-} \right) t^m e_{2s}(zt) d\mathbf{P}\{X_l < t\},$$

и установим для этих математических ожиданий нужные представления.

Лемма 4. При выполнении условий (1), (2), (9) для любых $1 \leq l \leq n$ справедливы следующие представления:

$$E_1 = \mathbf{E}(\lambda \sigma \bar{Y}_l | |\bar{Y}_l| \leq \varepsilon) = z \left\{ \frac{R_0 \varphi'_{2s+1}(z) - R_1 \varphi_{2s}(z)}{\varphi_{2s}(z)(\varphi_{2s}(z) - R_0)} \right\},$$

$$E_2 = \mathbf{E}((\lambda Y_l)^{2s+1} | |\bar{Y}_l| \leq \varepsilon) = \frac{I_2}{\varphi_{2s}(z) - R_0},$$

$$E_3 = \mathbf{E}((\lambda Y_l)^{2(2s+1)} | |\bar{Y}_l| \leq \varepsilon) = \frac{I_3}{\varphi_{2s}(z) - R_0};$$

при этом если $\alpha + \beta \geq 1$, то

$$I_2 = z^{2s+1}(\alpha_{2s+1} - r_{2s+1}) + z^{2s+2}(\alpha_{2s+2} - r_{2s+2}) O(1),$$

$$I_3 = z^{2s+2}(\alpha_{2s+2} - r_{2s+2}) O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $Y_l = m + \sigma \bar{Y}_l$, то в силу (3)

$$E_1 = \lambda \frac{\int_{y_-}^{y_+} (y - m) d\mathbf{P}\{Y_l < y\}}{\int_{y_-}^{y_+} d\mathbf{P}\{Y_l < y\}} = \lambda \left\{ \frac{\int_{y_-}^{y_+} y e_{2s}(\lambda y) d\mathbf{P}\{X_l < s_n y\}}{\int_{y_-}^{y_+} e_{2s}(\lambda y) d\mathbf{P}\{X_l < s_n y\}} - m \right\}$$

$$= z \left\{ \frac{\int_{t_-}^{t_+} t e_{2s}(zt) d\mathbf{P}\{X_l < t\}}{\int_{t_-}^{t_+} e_{2s}(zt) d\mathbf{P}\{X_l < t\}} - m(z) \right\} = z \left\{ \frac{\varphi'_k(z) - R_1}{\varphi_{2s}(z) - R_0} - \frac{\varphi'_k(z)}{\varphi_{2s}(z)} \right\},$$

$$\begin{aligned}
E_2 &= \frac{\int_{y_-}^{y_+} (\lambda y)^k d\mathbf{P}\{Y_l < y\}}{\int_{y_-}^{y_+} d\mathbf{P}\{Y_l < y\}} = \frac{\int_{y_-}^{y_+} (\lambda y)^k e_{2s}(\lambda y) d\mathbf{P}\{X_l < s_n y\}}{\int_{y_-}^{y_+} e_{2s}(\lambda y) d\mathbf{P}\{X_l < s_n y\}} \\
&= \frac{\int_{t_-}^{t_+} (zt)^k e_{2s}(zt) d\mathbf{P}\{X_l < t\}}{\int_{t_-}^{t_+} e_{2s}(zt) d\mathbf{P}\{X_l < t\}} = \frac{I_2}{\varphi_{2s}(z) - R_0}, \\
E_3 &= \frac{\int_{y_-}^{y_+} (\lambda y)^{2k} d\mathbf{P}\{Y_l < y\}}{\int_{y_-}^{y_+} d\mathbf{P}\{Y_l < y\}} = \frac{\int_{t_-}^{t_+} (zt)^{2k} e_{2s}(zt) d\mathbf{P}\{X_l < t\}}{\int_{t_-}^{t_+} e_{2s}(zt) d\mathbf{P}\{X_l < t\}} = \frac{I_3}{\varphi_{2s}(z) - R_0}
\end{aligned}$$

($k = 2s + 1$). Остается лишь объяснить, почему в последних равенствах для E_2 и E_3 числитель может быть записан указанным образом. Нетрудно видеть, однако, что в рассматриваемых условиях это вытекает из возможности представить подынтегральное выражение числителей в виде ($n \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned}
(zt)^k e_{2s}(zt) &= (zt)^k + (zt)^{2s+2} \sum_1^{2s} \frac{(zt)^{l-1}}{l!} = (zt)^k + (zt)^{2s+2} O(1), \\
(zt)^{2k} e_{2s}(zt) &= (zt)^{2s+2} \left[(zt)^{2s} \sum_0^{2s} \frac{(zt)^l}{l!} \right] = (zt)^{2s+2} O(1),
\end{aligned}$$

поскольку $\sup_{t_- \leq t \leq t_+} zt = \lambda(m + \sigma\varepsilon) = O(\lambda\varepsilon) = O(1)$. Лемма доказана.

Теперь, чтобы сформулировать и доказать искомые асимптотические соотношения, а заодно и объяснить, откуда берется экзотическое условие (10), нам остается лишь убедиться в том, что в силу (21) при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
r_m &= o((\sqrt{n})^{-(1-\beta)(2s+2-m)}), & 0 \leq m \leq 2s+2, \\
R_m &= o((\sqrt{n})^{-(1-\beta)(2s+2-m)}), & 0 \leq m \leq 2.
\end{aligned} \tag{23}$$

В самом деле, поскольку $t_{\pm} = s_n(m \pm \sigma\varepsilon) \sim \pm s_n \varepsilon = \pm d(\sqrt{n})^{1-\beta}$, то $r_m = o((s_n \varepsilon)^{-(2s+2-m)}) = o((\sqrt{n})^{-(1-\beta)(2s+2-m)})$. Что же касается величины R_m , то достаточно заметить, скажем, что $\int_{t_+}^{\infty} z^k t^{m+k} d\mathbf{P}\{X_l < t\} = z^k o((s_n \varepsilon)^{-(2s+2-m-k)}) = o((\sqrt{n})^{-k\alpha - (1-\beta)(2s+2-m-k)})$, если $m+k \leq 2s+2$. Причем для последнего показателя неравенство $k(1-\alpha-\beta) - (1-\beta)(2s+2-m) \leq -(1-\beta)(2s+2-m)$ справедливо при всех $0 \leq k \leq 2s$ и ясно, что «все хорошо» при $m \leq 2$ (поскольку тогда $k \leq 2s \Rightarrow m+k \leq 2s+2$).

Следствие 2. В условиях (1), (2), (22) равномерно по λ из (9)

$$E_1 = \mathbf{E}(\lambda \sigma \bar{Y}_l | |\bar{Y}_l| \leq \varepsilon) = o(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty. \tag{24}$$

Если же выполнено и условие (10), то также при всех $1 \leq l \leq n$

$$\begin{aligned}
E_2 &= \mathbf{E}((\lambda Y_l)^{2s+1} | |\bar{Y}_l| \leq \varepsilon) = o(n^{-1}), & n \rightarrow \infty, \\
E_3 &= \mathbf{E}((\lambda Y_l)^{2(2s+1)} | |\bar{Y}_l| \leq \varepsilon) = o(n^{-1}), & n \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{25}$$

Доказательство. В силу (23) $R_0 = o((\sqrt{n})^{-(1-\beta)(2s+2)})$ и $R_1 = o((\sqrt{n})^{-(1-\beta)(2s+1)})$, а $\varphi_{2s}(z) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, при $\alpha > 0$. Поэтому $E_1 \sim -zR_1 \sim o((\sqrt{n})^{-\alpha-(1-\beta)(2s+1)})$. Для доказательства соотношения (24) остается заметить, что $-\alpha-(1-\beta)(2s+1) \leq -(1-\beta)(2s+2) < -2$ в силу (22).

Для доказательства же соотношения (25) достаточно показать, что

$$I_0 \equiv z^{2s+1}(\alpha_{2s+1} - r_{2s+1}) + z^{2s+2}(\alpha_{2s+2} - r_{2s+2}) = o(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty,$$

если выполнено условие (10). Но это очевидно, так как при $\alpha_{2s+1} \neq 0$ имеем $I_0 \sim z^{2s+1}\alpha_{2s+1} = O((\sqrt{n})^{-\alpha(2s+1)})$, т.е. $I_0 = o(n^{-1})$, если $\alpha > 2/(2s+1)$. Если же $\alpha_{2s+1} = 0$, то нетрудно показать, что $I_0 \sim z^{2s+2}\alpha_{2s+2} = O((\sqrt{n})^{-\alpha(2s+2)})$ и, следовательно, $I_0 = o(n^{-1})$, если $\alpha > 1/(s+1)$. Наконец, равенство $E_3 = o(n^{-1})$ также вытекает из (20). Следствие доказано.

5. Условные математические ожидания. Теперь мы готовы провести обоснование наиболее важного момента доказательства теоремы — асимптотического соотношения 2.5, а также оставшихся свойств 2.3.

5.1. *Ограниченность математических ожиданий $\mathbf{E}(\rho|\bar{A})$, т.е. свойство 2.5.* Сначала сформулируем и докажем один общий результат, а затем уже интересующий нас факт получим в следствии 3 как его частный случай. Предположим, что помимо последовательности н.о.р.с.в. $\xi = (\xi_l)_{l \geq 1}$ с $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\mathbf{D}\xi_1 = d^2$, определенных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и для которых, как и обычно, $S_n = \sum_1^n \xi_l$, $s_n^2 = \mathbf{D}S_n$, заданы последовательность борелевских подмножеств $(A_l)_{l \geq 1}$ на прямой и последовательность одномерных борелевских функций $(f_l(t))_{l \geq 1}$. Введем также обозначения:

$$\xi(n) = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n), \quad \mathcal{F}(y) = \prod_1^n f_n(y_l), \quad \rho = \mathcal{F}(\xi(n)),$$

$$A(n) = \{y \in \mathbf{R}^n: y_l \in A_n, 1 \leq l \leq n\}, \quad q = \mathbf{P}\{\xi_1 \in A_n\}, \quad p = \mathbf{P}\{\xi_1 \notin A_n\}.$$

Лемма 5. Если последовательность множеств $(A_l)_{l \geq 1}$, функция $f_n(t)$, события $G_l = \{\xi_l \in A_n\}$ и с.в. ξ_l таковы, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} 1) \quad p &= o(n^{-1}), & 2) \quad \mathbf{E}(f_n(\xi_l) | G_l) &\leq L_n = 1 + \frac{a_n}{n}, & t \in A_n, \\ 3) \quad f_n(t) &\leq D_n, & t &\notin A_n, \end{aligned} \quad (26)$$

причем $\lim a_n = a$, $\lim D_n = D$, где a и D — некоторые числа, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\rho | \xi(n) \notin A(n)) \leq De^a.$$

Доказательство. Разобьем событие $B = \{\xi(n) \notin A(n)\}$ на $2^n - 1$ непересекающихся подмножеств из $\mathcal{F}$:

$$B_{ij} = \{\xi_{l_s} \notin A_n, 1 \leq s \leq i; \xi_l \in A_n, l \neq l_s\}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq C_n^i.$$

Тогда $\mathbf{P}(B_{ij}) = p^i q^{n-i}$ и ясно также, что $\mathbf{E}(f_n(\xi_l) | \bar{G}_l) \leq D_n$. Поэтому

$$\mathbf{E}(\rho I(B_{ij})) = \prod_{s=1}^i \mathbf{E}(f_n(\xi_{l_s}) I(\bar{G}_{l_s})) \prod_{l \neq l_s} \mathbf{E}(f_n(\xi_l) I(G_l)) \leq (D_n p)^i (L_n q)^{n-i},$$

$$\mathbf{E}(\rho I(B)) \leq \sum_1^n C_n^i (D_n p)^i (L_n q)^{n-i} = (L_n q)^n \left[\left(1 + \frac{D_n p}{L_n q} \right)^n - 1 \right].$$

Но $\mathbf{P}(B) = 1 - q^n = q^n[(1 + p/q)^n - 1]$ и если $\bar{p} = np$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho | B) &\leq \frac{L_n^n [(1 + D_n p / (L_n q))^n - 1]}{(1 + p/q)^n - 1} \sim \frac{L_n^n (e^{D_n \bar{p} / L_n q} - 1)}{e^{\bar{p}/q} - 1} \\ &\sim L_n^n \left(\frac{D_n}{L_n} \right) \rightarrow D e^a, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

поскольку $\bar{p} = o(1)$. Лемма доказана.

Следствие 3. В условиях (1), (2), (9), (22) выполнено соотношение

$$2.5 \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\rho | \bar{A}) \leq g_s = (2s)! (t_m(s))^{-2s}. \quad (27)$$

Доказательство. Лемма 5 остается в силе, если вместо последовательности с.в. $(\xi_l)_{l \geq 1}$ рассматривать схему серий н.о.р.с.в. $(\xi_{ln})_{1 \leq l \leq n}$ при $n \geq 1$. Поэтому можно применить эту лемму к с.в. ρ из (16), полагая $\xi_{ln} = \bar{Y}_l$, $f_n(t) = e_{2s}(\lambda m) e_{2s}^{-1}(\lambda(m + \sigma t))$, $A_n = \{y \in \mathbf{R}: |y| \leq \varepsilon = (\sqrt{n})^{-\beta}\}$, и, следовательно, событие $\bar{A}$ будет дополнением события $A = \{\bar{Y} \in K_n(\varepsilon)\} = \{\xi(n) \in A(n)\}$. Таким образом, для доказательства соотношения (27) достаточно убедиться в том, что условия (26) выполняются при $a = 0$, $D = g_s$.

Мы знаем, что функция $e_{2s}^{-1}(t)$ достигает максимума в точке $t_m(s)$. Причем ее максимальное значение $g_s = (2s)! (t_m(s))^{-2s}$. Нетрудно видеть также, что максимальное значение функции $f_n(t)$ при $|t| > \varepsilon$ есть $D_n = e_{2s}(\lambda m) g_s \rightarrow g_s$, $n \rightarrow \infty$. Тем самым свойство (26.3) очевидно, как и (26.1), поскольку $p = \mathbf{P}\{|\bar{Y}_l| > \varepsilon\} = R_0 \varphi_{2s}^{-1}(z) = o(n^{-1})$ при $\beta < s/(s+1)$.

Чтобы убедиться в справедливости оставшегося свойства (26.2), используем п. 2 леммы 2, в соответствии с которым на множестве $\{|t| \leq \varepsilon\}$

$$f_n(t) = \exp \left(-\lambda \sigma t + \frac{b[(\lambda(m + \sigma t))^{2s+1} - (\lambda m)^{2s+1}]}{(2s+1)!} \right),$$

причем можно считать, что $b = \exp(\lambda(m + \theta\sigma\epsilon))$. Поэтому ($k = 2s + 1$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f_n(\bar{Y}_l) \mid |\bar{Y}_l| \leq \epsilon) &\sim \mathbf{E}(\exp(-\lambda\sigma\bar{Y}_l + (\lambda Y_l)^k (k!)^{-1}) \mid |\bar{Y}_l| \leq \epsilon) \\ &\sim \mathbf{E}([1 - \lambda\sigma\bar{Y}_l + (\lambda Y_l)^k (k!)^{-1}] \mid |\bar{Y}_l| \leq \epsilon) \\ &= 1 - E_1 + E_2(k!)^{-1} = 1 + o(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

если $\lambda\epsilon = o(1)$, т.е. $\alpha + \beta > 1$. Следствие доказано.

З а м е ч а н и е 3. Мы только что использовали условие $\alpha + \beta > 1$ вместо второго неравенства из (22). Дело в том, что оба эти неравенства сами по себе не нужны, они играют вспомогательную роль при установлении асимптотики (19), а для ее справедливости достаточно и более сильного неравенства.

5.2. *Сходимость условных математических ожиданий с.в. ϱI_A , т.е. свойства 2.3.* Начнем с того, что покажем: небольшое усиление

$$\alpha > \frac{1}{s+1} + \frac{2}{2s+1} \quad (10a)$$

условия (10) позволяет обосновать искомые свойства элементарно.

Лемма 6. *Если выполнены условия (10a) и (22), то свойства 2.3 имеют место при сохранении остальных свойств.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В разбиении события $H_{[0,\infty)}$ на три части из п. 2 при $T > n\epsilon$ вторая часть исчезает, поскольку $A \cap H_{[T,\infty)} = \emptyset$. Поэтому достаточно установить лишь, что $\mathbf{E}(\varrho I_A \mid H_t) \rightarrow 1$ равномерно по t , $0 \leq t \leq T \leq n\epsilon$. Иными словами, достаточно убедиться в том, что $\sum_1^n (\lambda Y_l)^{2s+1} = o(1)$ п.н. ($k = 2s + 1$), поскольку $a_l \sim 1/(2s+1)!$, $n \rightarrow \infty$.

Но $|\lambda Y_l| \leq \lambda(m + \sigma\epsilon) \sim \lambda\epsilon = O((\sqrt{n})^{1-\alpha-\beta})$, $n \rightarrow \infty$. Поэтому $\sum_1^n (\lambda Y_l)^{2s+1} = O((\sqrt{n})^{2+(2s+1)(1-\alpha-\beta)}) = o(1)$, если $\alpha + \beta > 1 + 2/(2s+1)$. Поскольку выполнено условие (22), т.е. $\beta < s/(s+1)$, ясно, что нужное асимптотическое соотношение можно обеспечить при выборе (10a).

Условие (10a) естественно назвать небольшим усилением, поскольку по-прежнему можно будет считать, что $\alpha \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$. Но, конечно, при этом формулировка теоремы будет относиться лишь к значениям $s \geq 2$, поскольку при $s = 1$ значение α не сможет быть меньше 1. А это нужно для того, чтобы интервал для λ из (9) увеличивался при $n \rightarrow \infty$.

Укажем далее на соображение, которое может привести к одному из простейших доказательств искомых свойств при условии (10). Дело в том, что

$$\mathbf{E}(\varrho I_A \mid H_t) = \mathbf{E}(\varrho \mid A \cap H_t) \mathbf{P}(A \mid H_t), \quad (28)$$

а с другой стороны, вектор $\bar{Y}$ и с.в. H асимптотически (при $n \rightarrow \infty$) независимы. Поэтому должны выполняться, скажем, соотношения

$$\mathbf{E}(\varrho \mid A \cup H_t) \sim \mathbf{E}(\varrho \mid A), \quad \mathbf{P}(A \mid H_t) \sim \mathbf{P}(A), \quad n \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Поэтому искомые свойства будут вытекать из леммы 3 и следующего утверждения, фактически доказанного в следствии 2.

Следствие 4. В условиях (1), (2), (9), (10)

$$\mathbf{E}(\varrho | A) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\mathbf{E}(\varrho | A) = \prod_1^n \mathbf{E}(\exp\{c_l(\lambda Y_l)^{2s+1}\} | |\bar{Y}_l| \leq \varepsilon).$$

А теперь мы попробуем обосновать искомые свойства при условии (10), без использования асимптотической независимости вектора $\bar{Y}$ от с.в. H , т.е. понятия, которое и определить-то непросто из-за того, что число компонент этого вектора бесконечно растет, а опираясь на его «отчетливую» асимптотическую вырожденность и следствие 2. Введем для этого последовательность серий н.о.р.с.в. $(\xi_{ln})_{1 \leq l \leq n}$, $n \geq 1$, с распределением $\mathbf{P}\{\xi_{ln} < y\} = \mathbf{P}\{(\lambda Y_l)^{2s+1} < y | |\bar{Y}_l| \leq \varepsilon\}$, и положим $\xi_n = \sum_1^n \xi_{ln}$. Можно сказать, что вспомогательная с.в. ξ_n определена на меняющемся вероятностном пространстве $(A, \mathcal{F}_A, \mathbf{P}_A)$, если исходная последовательность с.в. (X_l) задана на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $\mathcal{F}_A$ — сужение σ -алгебры $\mathcal{F}$ на множество A и $\mathbf{P}_A(d\omega) = \mathbf{P}(d\omega)/\mathbf{P}(A)$. Иными словами, с.в. ϱ на множестве A принимает те же значения, что и с.в. $e^{a\xi_n}$, но только «с вероятностями, в $1/\mathbf{P}(A)$ раз большими» (a — некоторая с.в. такая, что $a(2s+1)! \rightarrow 1$ п.н., $n \rightarrow \infty$).

Следствие 5. В условиях (1), (2), (9), (10)

$$\begin{aligned} 2.3 \quad \mathbf{E}(\varrho I_A | H_t) &\rightarrow 1, & n \rightarrow \infty, \text{ равномерно по } 0 \leq t \leq T \leq n\varepsilon; \\ \mathbf{E}(\varrho I_A | H_{[T, \infty)}) &\rightarrow 1, & n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Доказательство. Сначала покажем от противного, что

$$e^{\xi_n} \rightarrow 1 \quad \text{п.н. при } n \rightarrow \infty.$$

Пусть $\xi_n \nrightarrow 0$ п.н. Тогда $\mathbf{P}\{\liminf_n \xi_n \neq \limsup_n \xi_n\} > 0$ (на самом деле в силу закона 0 и 1 эта вероятность равна единице!), и поскольку $\mathbf{E}\xi_n = nE_2 \rightarrow 0$, то обязательно будет иметь место одно из следующих двух утверждений: либо $\mathbf{P}\{\liminf_n \xi_n < 0, \limsup_n \xi_n \geq 0\} > 0$, либо $\mathbf{P}\{\liminf_n \xi_n \leq 0, \limsup_n \xi_n > 0\} > 0$. Но в обоих случаях это войдет в противоречие с тем, что (см. следствие 2) $D\xi_n = n(E_3 - (E_2)^2) \sim nE_3 \rightarrow 0$ при условии (20) и, тем более, при более жестком условии (10).

С другой стороны, если указанная сходимость имеет место, то тем более имеет место аналогичная сходимость для условных математических ожиданий вида $\mathbf{E}(e^{\xi_n} | \sigma_n)$, $n \rightarrow \infty$, относительно произвольных

σ -алгебр σ_n , более грубых, чем σ -алгебра, порожденная вектором $\bar{Y}$. Поэтому $\mathbf{E}(e^{a\xi_n} | H) \rightarrow 1$ п.н. и, в частности, при любом $t \leq T$

$$\mathbf{E}(e^{a\xi_n} | H_t) = \frac{\mathbf{E}(\varrho I_A | H_t)}{\mathbf{P}(A)} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, первое свойство в 2.3 можно считать в силу 2.1 установленным при небольших и фиксированных T , поскольку равномерная сходимость для таких T объясняется просто.

Возьмем произвольное разбиение отрезка $[0, T)$ из леммы 7 ниже и соответствующее ему разбиение множества элементарных исходов $B(m)$: $\Omega = \sum_0^{m+1} B_i$, $B_i = \{H \in J_l(m)\}$, $1 \leq l \leq m$, $B_0 = \{H < 0\}$, $B_{m+1} = \{H \geq T\}$, $B_i \cup B_j = \emptyset$, $i \neq j$. Тогда в силу доказанного ступенчатая функция $\mathbf{E}(e^{a\xi_n} | B(m)) \rightarrow 1$ п.н., а наша функция $\mathbf{E}(e^{a\xi_n} | H_t)$ на отрезке $[0, T)$ «лежит» между ее внутренними ступеньками, каждая из которых «подтягивается» к 1 при $n \rightarrow \infty$. При этом для небольших T скорость сходимости к 1 у разных ступенек отличается немного. Чтобы обосновать второе свойство, достаточно в качестве σ -алгебры σ_n взять порождаемую и вовсе простым разбиением $B(1)$.

6. Условная вероятность. В силу (28) при получении основного, первого элемента представления теоремы (из трех в (15)) потребуется вычислять условную вероятность $\mathbf{P}(A | H_t)$ как функцию параметра t . Приведем некоторые соображения, позволяющие находить либо сами эти функции, либо оценки для них снизу, а также дадим пример такой функции. При этом для простоты, но не снижая общности, будем рассматривать отвлеченную ситуацию, т.е. интересоваться условной вероятностью вида

$$p_n(\varepsilon; t) = \mathbf{P}\left\{\frac{|\xi_l|}{s_n} \leq \varepsilon, \quad 1 \leq l \leq n \mid \frac{1}{s_n} \sum_1^n \xi_l = t\right\}, \quad (30)$$

где $(\xi_l)_{l \geq 1}$ — произвольная последовательность н.о.р.с.в. с $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\mathbf{D}\xi_1 = d^2$, полагая, как и обычно, $S_n = \sum_1^n \xi_l$, $s_n^2 = \mathbf{D}S_n$, — хотя интересующая нас вероятность $\mathbf{P}(A | H_t)$ явно касается схемы серий, т.е. $\bar{Y}_l = \xi_{ln}$.

6.1. Оценка снизу. Чтобы сформулировать и доказать следующее утверждение, введем еще несколько обозначений:

$$A = \{\omega \in \Omega: s_n^{-1} |\xi_l| \leq \varepsilon, \quad 1 \leq l \leq n\}, \quad B = B_{lm}(n) = \{\omega: s_n^{-1} S_n \in J_l(m)\},$$

$$J_l(m) = (t_{l-1}, t_l], \quad t_l = t_l(m) = T l m^{-1},$$

$$0 < T < \infty, \quad m \geq 1, \quad 1 \leq l \leq m,$$

$$\Phi_{lm} = \Phi(t_l) - \Phi(t_{l-1}), \quad \nu_n = \sup_t |\mathcal{F}_n(t) - \Phi(t)|, \quad \mathcal{F}_n(t) = \mathbf{P}\{S_n < s_n t\}.$$

Лемма 7. 1. При любых $T < \infty$, $m \geq 1$, $l \leq m$ и «больших» n

$$\mathbf{P}(A | B_{lm}(n)) \geq \mathbf{P}(A) - \frac{\gamma_n}{\Phi_{lm} - 2\nu_n}, \quad \gamma_n = 1 - \mathbf{P}(A). \quad (31)$$

2. Ступенчатая функция $\sum_{l=1}^m \mathbf{P}(A | B_{lm}(n)) I(t \in J_l(m))$ является усреднением плотности $p_n(\varepsilon; t)$ на всех интервалах нашего разбиения отрезка $[0, T)$, $T \leq n\varepsilon$. Поэтому если функция $p_n(\varepsilon; t)$ монотонно убывает при $t \geq 0$, то для нее можно получить простую оценку снизу.

Доказательство. 1. В силу теоремы Колмогорова (см. [4, гл. II, § 9, п. 1]) можно считать, что на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ одновременно заданы не только с.в. $(\xi_l)_{1 \leq l \leq \infty}$, но и независимые от них и так же распределенные с.в. $(\tilde{\xi}_l)_{1 \leq l \leq \infty}$. Поэтому можно ввести события $\tilde{A}$, построенные по с.в. $\tilde{\xi}_l$ по аналогии с A . Тогда нетрудно видеть, что $\mathbf{P}(\tilde{A}) = \mathbf{P}(A)$ и, кроме того,

$$|\mathbf{P}(\tilde{A}B) - \mathbf{P}(AB)| \leq \max(\mathbf{P}((\tilde{A} \setminus A)B), \mathbf{P}((A \setminus \tilde{A})B)) \leq \min(\gamma_n, \mathbf{P}(B)).$$

Если же и $\gamma_n < \mathbf{P}(B)$, то

$$\mathbf{P}(A | B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(\tilde{A}B) - [\mathbf{P}(\tilde{A}B) - \mathbf{P}(AB)]}{\mathbf{P}(B)} \geq \mathbf{P}(A) - \frac{\gamma_n}{\mathbf{P}(B)}.$$

Остается заметить, что $\mathbf{P}(B_{lm}(n)) = \Phi_{lm} + 2\theta\nu_n$.

2. Нетрудно видеть, что на любом элементе разбиения

$$\mathbf{P}(A | B_{lm}(n)) = \frac{\int_{t_{l-1}}^{t_l} p_n(\varepsilon; t) d\mathbf{P}\{S_n < s_n t\}}{\mathbf{P}(B_{lm}(n))}. \quad (32)$$

Тем самым, действительно, указанная ступенчатая функция является усреднением нашей плотности, и потому для получения оценки снизу остается лишь использовать оценку из п. 1. Лемма доказана.

6.2. *Рекуррентные соотношения.* Представляется целесообразным сначала установить рекуррентные соотношения для частного случая стандартно нормально распределенных с.в. $\xi_l \equiv N(0, 1)$, а уже затем получить искомые рекуррентные соотношения для произвольных ξ_l как простое следствие. Тем более, что рекуррентные соотношения в нормальном случае полезны по разным причинам с практической точки зрения.

Лемма 8. Если $d\mathbf{P}\{\xi_1 < t\} = \phi(t) dt$, $\phi(t) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-t^2/2)$, то

$$p_n(\varepsilon; t) = \int_{a_-}^{a_+} p_{n-1}\left(\varepsilon c_n; \frac{t}{c_n} - y\right) s_n \phi(s_n y) dy, \quad |t| \leq n\varepsilon \quad (n \geq 2), \quad (33)$$

и $p_1(\varepsilon; t) = I(|t| \leq \varepsilon)$; здесь $a_{\pm} = (\pm \varepsilon n - t)/(s_n s_{n-1})$, $c_n = s_n/s_{n-1}$, $I(A)$ — индикаторная функция множества A , $s_n^2 = n$.

Доказательство. Положим $A = K_n(\varepsilon) = \{\omega: |\xi_l| s_n^{-1} \leq \varepsilon, 1 \leq l \leq n\}$, $L_n(t) = \{\omega: s_n^{-1} \sum_1^n \xi_l = t\}$. Тогда, используя формулу полной вероятности и производя элементарные выкладки, последовательно получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{K_n(\varepsilon) \cap L_n(t)\} &= \int_{-\varepsilon s_n}^{\varepsilon s_n} \mathbf{P}\{K_{n-1}(\varepsilon c_n) \cap L_{n-1}(t_n(y))\} \phi(y) dy, \\ p_n(\varepsilon; t) &= \frac{\mathbf{P}\{K_n(\varepsilon) \cap L_n(t)\}}{\phi(t) dt} = \int_{-\varepsilon s_n}^{\varepsilon s_n} \left(\frac{\phi(t_n(y)) d(t_n(y))}{\phi(t) dt} \right) \\ &\quad \times \frac{\mathbf{P}\{K_{n-1}(\varepsilon c_n) \cap L_{n-1}(t_n(y))\}}{\phi(t_n(y)) d(t_n(y))} \phi(y) dy \\ &= c_n \int_{-\varepsilon s_n}^{\varepsilon s_n} p_{n-1}(\varepsilon c_n; t_n(y)) \phi(y_n(t)) dy \\ &= s_n \int_{a_-}^{a_+} p_{n-1}\left(\varepsilon c_n; \frac{t}{c_n} - v\right) \phi(s_n v) dv, \end{aligned}$$

если ввести обозначения $t_n(y) = (s_n t - y)/s_{n-1}$, $y_n(t) = (s_n y - t)/s_{n-1}$.

Отметим, что третье равенство в цепочке является следствием того, что $\phi(t_n(y)) \phi(y)/\phi(t) = \phi(y_n(t))$, поскольку $(t_n(y))^2 - t^2 + y^2 = (y_n(t))^2$. А четвертое возникает после замены переменных $y_n(t) = s_n v$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 4. Аргумент $t/c_n - y$ подынтегральной функции p_{n-1} в (33) лежит в интервале

$$c_n(t - \varepsilon) \leq \frac{t}{c_n} - y \leq c_n(t + \varepsilon);$$

скажем,

$$\frac{t}{c_n} - a_+ = \frac{(n-1)t - (n\varepsilon - t)}{s_n s_{n-1}} = \frac{n(t - \varepsilon)}{s_n s_{n-1}} = c_n(t - \varepsilon).$$

Теперь можно привести без доказательства искомое утверждение.

Следствие 6. Если у ξ_1 существует плотность, т.е. $d\mathbf{P}\{\xi_1 < t\} = f(t) dt$, и $d\mathbf{P}\{\sum_1^n \xi_l < s_n t\} = f_n(t) dt$, то при $n \geq 2$

$$p_n(\varepsilon; t) = c_n \int_{-\varepsilon s_n}^{\varepsilon s_n} p_{n-1}(\varepsilon c_n; t_n(y)) \frac{f_{n-1}(t_n(y)) f(y)}{f_n(t)} dy, \quad |t| \leq n\varepsilon; \quad (34)$$

$p_1(\varepsilon; t) = I(|t| \leq \varepsilon)$, а плотность $f_n(y)$ определяется рекуррентным соотношением

$$f_n(t) = \int f_{n-1}(t_n(y)) f(y) dy, \quad n \geq 2.$$

6.3. Конкретный пример и некоторые уточнения. Рассмотрим далее ситуацию нормально распределенных с.в. леммы 8. Покажем, что в этом случае искомая условная вероятность, по определению равная нулю

при $|t| > n\varepsilon$, может быть весьма просто записана с помощью функции распределения $\Phi(t)$ одномерной с.в. $N(0, 1)$ на интервале $|t| \leq n\varepsilon$.

Лемма 9. В условиях леммы 8 при любом $\varepsilon > 0$

$$p_n(\varepsilon; t) = \int_{A(n)} \prod_1^{n-1} [\phi(x_l) dx_l], \quad |t| \leq n\varepsilon, \quad (35)$$

где

$$A(n) = \{n\varepsilon_- \leq x_1 \sqrt{n-1} \leq n\varepsilon_+, |x_l| \leq 2\varepsilon \sqrt{n(l-1)l^{-1}}, l = 2, \dots, n-1\},$$

$$\varepsilon_- = tn^{-1} - \min[\varepsilon, (n-1)\varepsilon + t], \quad \varepsilon_+ = tn^{-1} + \min[\varepsilon, (n-1)\varepsilon - t].$$

Доказательство. Поскольку плотность с.в. $\xi_l/\sqrt{n}$ есть $\sqrt{n}\phi(t\sqrt{n})$, то

$$p_n(\varepsilon; t) \phi(t) dt = \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{B(1)} \exp\left\{-\frac{n}{2} \sum_1^n y_l^2\right\} dy_1 \cdots dy_n,$$

где $B(1) = \{|y_l| \leq \varepsilon, 1 \leq l \leq n; \sum_1^n y_l = t\}$. Далее сначала избавимся от элемента $\phi(t) dt$ в обеих частях приведенного равенства, используя представление

$$\begin{aligned} & \frac{n}{2} \left(\sum_1^{n-1} y_l^2 + \left(t - \sum_1^{n-1} y_l \right)^2 \right) \\ &= \frac{t^2}{2} + n \left(\sum_1^{n-1} \left(\frac{t}{n} - y_l \right)^2 + \sum_{i < j}^{n-1} \left(\frac{t}{n} - y_i \right) \left(\frac{t}{n} - y_j \right) \right), \end{aligned}$$

а затем проведем несколько замен переменных и получим:

$$\begin{aligned} p_n(\varepsilon; t) &= \sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{B(2)} \exp\left\{-n \left[\sum_1^{n-1} \left(\frac{t}{n} - y_l \right)^2 + \sum_{i < j}^{n-1} \left(\frac{t}{n} - y_i \right) \left(\frac{t}{n} - y_j \right) \right]\right\} dy_1 \cdots dy_{n-1} \\ &= (2\pi)^{-(n-1)/2} \sqrt{n} \int_{B(3)} \exp\left\{-\left(\sum_1^{n-1} z_l^2 + \sum_{i < j}^{n-1} z_i z_j \right)\right\} dz_1 \cdots dz_{n-1} \\ &= (2\pi)^{-(n-1)/2} \sqrt{n} \int_{B(4)} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(ny_1^2 + \sum_2^{n-1} y_l^2 \right)\right\} dy_1 \cdots dy_{n-1} \\ &= (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{A(n)} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_1^{n-1} x_l^2\right\} dx_1 \cdots dx_{n-1}, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$B(2) = \left\{ |y_l| \leq \varepsilon, 1 \leq l \leq n-1, \varepsilon_- \leq \sum_1^{n-1} \left(y_l - \frac{t}{n} \right) \leq \varepsilon_+ \right\},$$

$$B(3) = \left\{ \left| z_l + \frac{t}{\sqrt{n}} \right| \leq \varepsilon \sqrt{n}, \quad 1 \leq l \leq n-1, \quad \varepsilon_- \sqrt{n} \leq \sum_1^{n-1} z_l \leq \varepsilon_+ \sqrt{n} \right\},$$

$$B(4) = \left\{ \varepsilon_- \sqrt{n} \leq y_1 \sqrt{n-1} \leq \varepsilon_+ \sqrt{n}, \quad |y_l| \leq 2\varepsilon \sqrt{\frac{n(l-1)}{l}}, \quad l \geq 2 \right\}.$$

В самом деле, первое равенство в (36) возникает после сокращения, а замена $(y_l - t/n)\sqrt{n} = z_l$ позволяет записать второе равенство. Отметим лишь, что запись множества $B(3)$ легко вытекает из приведенной записи множества $B(2)$, причем ее форма объясняется проведенной заменой, а иначе можно было бы представить ее в виде $B(2) = \{|y_l| \leq \varepsilon, 1 \leq l \leq n-1, |t - \sum_1^{n-1} y_l| \leq \varepsilon\}$. Для перехода к третьему равенству используем ортогональное преобразование (см. [5, § 15, отдел 3, упражнение 1263]) $y_1 = (1/\sqrt{n-1}) \sum_1^{n-1} z_l$, $y_l = (1/\sqrt{(l-1)l}) [\sum_1^{l-1} z_i - (l-1)z_l]$, $l = 2, \dots, n-1$, при котором первая квадратичная форма в показателе экспоненты переходит во вторую. Что же касается множества $B(4)$, то для получения его записи достаточно использовать операции сложения неравенств и умножения их на число. Замену же, позволяющую прийти к последнему равенству, объяснять не надо. Лемма доказана.

Следствие 7. В условиях леммы 9:

- 1) $p_2(\varepsilon; t) = 2\Phi(2\varepsilon - |t|) - 1$, $|t| \leq 2\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$;
- 2) функция $p_n(\varepsilon; t)$ является четной и выпуклой на отрезке $|t| \leq n\varepsilon$ и, значит, монотонно убывающей на интервале $0 \leq t \leq n\varepsilon$;
- 3) $p_n(\varepsilon; t) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$ при фиксированном t , если $\varepsilon = ((2 \ln n)/n)^{1/2}$.

7. Сравнение с представлением при условии Крамера. Укажем теперь вид ПБУ при условии Крамера из [2], с которым предлагается сравнивать полученный результат, а также приведем соображения, позволяющие утверждать, что эти представления сближаются не только при увеличении числа n слагаемых нормированной суммы S_n/s_n , но и при «сближении» условия (2) с условием Крамера, т.е. при $s \rightarrow \infty$.

В [2] рассматривается та же последовательность н.о.р.с.в. (X_l) , удовлетворяющих условию (1). Однако там вместо условия (2) используется условие Крамера, причем в форме

$$\varphi(\lambda) \equiv \mathbf{E}e^{\lambda X_1} < \infty, \quad 0 \leq \lambda < \Delta, \quad (2a)$$

где $\Delta > 0$ — некоторое фиксированное число. Естественно, что, хотя взаимно однозначная связь параметров x и λ задается тем же равенством (5) и по-прежнему $\lambda\sigma = c\sigma(z)$, но определяющие эти соотношения элементы определяются несколько иначе:

$$m(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}, \quad \sigma^2(z) = \frac{\varphi''(z)\varphi(z) - \varphi'^2(z)}{\varphi^2(z)} = d^2\sigma^2.$$

Теорема 1 (см. [2]). Если выполнены условия (1), (2а), то при всех $0 < \lambda < s_n \Delta = d\Delta\sqrt{n}$ и соответствующих им значениях x из (5)

$$\mathbf{P}\{S_n > xs_n\} = \frac{\varphi^n(z) e^{-\lambda x}}{c\sigma(z)\sqrt{2\pi}} (1 + \delta_n(\lambda)), \quad (11a)$$

где

$$\delta_n(\lambda) = 2\theta\nu c\sigma(z) \sqrt{2\pi} - [1 - J(c\sigma(z))]. \quad (12a)$$

Итак, сами ПБУ (11), допустимые интервалы для λ , выражения для x и ошибки $\delta_n(\lambda)$ очень похожи. В то же время видны и отличия, появившиеся после замены условия (2а) на (2). Прокомментируем их кратко, учитывая, что хотя теорема и сформулирована для фиксированных n , но ее форма скорее предназначена для ситуаций, когда $n \rightarrow \infty$.

Как и в (12а), в выражении (12) по-прежнему присутствуют две составляющих ошибки: первое слагаемое характеризует «близость» с.в. H к предельному нормальному закону, т.е. должно стремиться к 0 при $n \rightarrow \infty$, а второе слагаемое отражает зависимость ошибки от параметра λ и должно стремиться к 0 при $\lambda \rightarrow \infty$. Как показано в [2], именно так обстоят дела в случае условия Крамера. Можно ли сказать то же сейчас?

Прежде всего, ясно, что элементы Δ_n могут быть сделаны сколь угодно малыми увеличением λ , T и n (поскольку $\mathbf{P}(\bar{A}) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$). Понятно и то, что коэффициент $\delta_1 e^{\mu_1}$ при $J(\cdot)$ стремится к 1 при том же выборе тех же параметров. Однако не все так гладко.

Дело в том, что $c\sigma(z) \sim \lambda$, поскольку $z \rightarrow 0$, а λ может возрастать вместе с n . Поэтому желательно также иметь $\lambda\Delta_n \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ (остающееся слагаемое $c\sigma(z)\nu = O(z) \rightarrow 0$). Но оказалось, что этого несложно добиться некоторым увеличением α . Точнее говоря, для первого слагаемого в Δ_n это имеет место, поскольку $\lambda e^{-\lambda\sigma T} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Второе же слагаемое будет удовлетворять нашему требованию при $\alpha > 3/(2s+3)$. В самом деле, в доказательстве леммы 3 соотношение $1-p = o(1)$ вытекало из неравенства $(2s+2)\beta - 2s < 0$. Теперь же требуется иметь $\lambda(1-p) = o(1)$. Поэтому достаточно положить $(2s+2)\beta - 2s + 1 - \alpha < 0$ и вспомнить, что $1 - \alpha \leq \beta$.

Проблема сближения ПБУ при $s \rightarrow \infty$, по-видимому, требует специального исследования. Однако и сейчас можно отметить два соображения. Первое касается только что рассмотренной проблемы сближения ошибок, в отношении которой ясно, что при $s \rightarrow \infty$ сохранению свойства $\delta_n(\lambda) = o(1)$ может помешать лишь второе слагаемое в Δ_n . Да и то лишь потому, что оценка леммы 5 слишком груба (представляется, что в тех же условиях $\mathbf{E}(\rho/\bar{A}) \sim 1$, $n \rightarrow \infty$, для любого s). Тем не менее и с оценкой $\mathbf{E}(\rho/\bar{A}) = O(\sqrt{s})$ можно получить желаемое. Скажем, если положить $\sqrt{s} = O((\sqrt{n})^{1-\alpha})$, то проблему решает выбор $\alpha > 2/(s+2)$.

Еще один момент касается перехода области задания $\lambda < C(\sqrt{n})^{1-\alpha}$ в предельную $\lambda < d\Delta\sqrt{n}$. Так вот, с помощью теоремы 2 из [2] легко выявляется причина, по которой на месте C естественно ожидать появления величины $d\Delta$. Остальное же понятно: в силу (10) можно считать, что $\alpha \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$.

Заключение. Конечно, громоздкое доказательство является недостатком, поскольку в нем «легче» где-то допустить ошибку и не заметить ее. Более того, интересный вопрос задал анонимный рецензент, которым он вообще ставил под сомнение справедливость утверждения теоремы. Правда, реальность противоречия между формулой (11) и указанным в замечании рецензента следствием из давней работы И. Ф. Пинелиса несколько сама была поставлена под сомнение тем, что автору не удалось найти его доказательства. Поэтому выскажем ряд соображений, все-таки позволивших автору принять твердое решение опубликовать эту работу.

Прежде всего, представляется, что рассматриваемая здесь проблема весьма важна для всей проблематики БУ и потому уже давно стоило ее поднять в открытой печати. Поэтому даже если допустить, что предлагаемый результат ошибочен, то «сообща легче найти ошибку» и тем самым, возможно, либо уточнить условия существования искомого представления, либо понять причину того, что оно не существует, т.е. решить серьезную проблему. А это, в принципе, наша общая цель.

Во-вторых, автор постарался заметно упростить первоначальный вариант доказательства и тщательно его проверить. Наконец, в третьих, подчеркнем на наш взгляд основной элемент, который отличает предложенное ПБУ от «крамеровского» и который позволяет верить, что данный результат верен. Дело в том, что сами выражения ПБУ (11) и (11a) действительно «асимптотически примерно одинаковы», но не следует забывать, что эта «одинаковость» относится к интервалу $0 < \lambda < C(\sqrt{n})^{1-\alpha}$, составляющему при $\alpha > 0$ в пределе «нулевую» долю от интервала $0 < \lambda < d\Delta\sqrt{n}$, для которого установлено ПБУ (11a).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуленев С. В. О больших отклонениях, I. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 1, с. 34–54.
2. Жуленев С. В. Большие отклонения. Простейшая ситуация. — Вестн. Моск. ун-та, 2005, № 1, с. 16–25.
3. Саулс Л., Статулявичус В. Предельные теоремы о больших отклонениях. Вильнюс: Мокслас, 1989, 206 с.
4. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980, 578 с.
5. Проскураков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1970, 384 с.

Поступила в редакцию
18.VII.2001