Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Назаров, Я. Ю. Никитин, Логарифмическая асимптотика малых уклонений в L_2 -норме для некоторых дробных гауссовских процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 4, 695–711

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp189>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:41:09

© 2004 г.

НАЗАРОВ А. И.*, НИКИТИН Я. Ю.*

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ В L_2 -НОРМЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДРОБНЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ¹⁾

Найдена логарифмическая асимптотика L_2 -малых уклонов ряда гауссовских процессов, связанных с дробным броуновским движением, дробным процессом Орнштейна–Уленбека и их проинтегрированными аналогами. Рассматриваются также обобщения на многопараметрический случай.

Ключевые слова и фразы: дробное броуновское движение, дробный процесс Орнштейна–Уленбека, броуновское движение Леви, малые уклоны, спектральная асимптотика.

1. Введение. Проблема малых уклонов для норм гауссовских процессов интенсивно изучалась в последние годы, см., например, обзоры [1] и [2]. В настоящей работе мы рассматриваем простейший и наиболее изученный случай нормы в L_2 . Пусть $X(t)$, $0 \leq t \leq 1$, — центрированный гауссовский процесс с ковариацией $G_X(t, s) = \mathbf{E}X(t)X(s)$, $s, t \in [0, 1]$. Пусть ψ — суммируемый неотрицательный вес на $[0, 1]$. Положим

$$\|X\|_\psi = \left(\int_0^1 X^2(t) \psi(t) dt \right)^{1/2}$$

(индекс ψ будет опускаться при $\psi \equiv 1$) и рассмотрим

$$Q(X, \psi; \varepsilon) = \mathbf{P}\{\|X\|_\psi \leq \varepsilon\}.$$

Проблема состоит в нахождении асимптотики величины $Q(X, \psi; \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Часто эта задача оказывается слишком трудной, и тогда интересуются *логарифмической* асимптотикой, т.е. пытаются найти соотношение вида

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\theta} \ln Q(X, \psi; \varepsilon) = -C_X,$$

* С.-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Старый Петергоф, Университетский пр. 28, 198504 С.-Петербург, Россия; e-mail: an@AN4751.spb.edu, yanikit47@pisem.net

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 02-01-01099, 04-01-00716 и гранта НШ-2258.2003.01.

где C_X и θ — некоторые положительные константы. При этом C_X часто называют константой логарифмических малых уклонений.

Теоретически проблема асимптотики малых уклонений гауссовских процессов в L_2 была решена в [3], но неявным образом. Поэтому усилия многих авторов, начиная с [4]–[8], были посвящены упрощению выражения для $Q(X; \varepsilon) \equiv Q(X, 1; \varepsilon)$ (см. историю вопроса в [2] и [9]).

В силу классического разложения Карунена–Лозва имеет место равенство по распределению

$$\|X\|_\psi^2 = \int_0^1 X^2(t) \psi(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \xi_n^2, \quad (1.1)$$

где ξ_n , $n \in \mathbb{N}$ — стандартные независимые гауссовские случайные величины, а $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\sum_n \lambda_n < \infty$, являются собственными значениями интегрального уравнения

$$\lambda f(t) = \int_0^1 G_X(s, t) \sqrt{\psi(s) \psi(t)} f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Так мы приходим к эквивалентной проблеме описания асимптотического поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$ вероятности $\mathbf{P}\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \xi_n^2 \leq \varepsilon^2\}$. Ответ зависит от имеющейся информации о собственных числах λ_n . Основная трудность в том, что явные формулы для этих собственных чисел известны лишь для небольшого числа конкретных процессов (см. [2], [9] и [10]).

В недавней статье авторов [11] был предложен новый подход к вычислению *точной* асимптотики вероятностей малых уклонений для широкого класса проинтегрированных гауссовских процессов, основанный на спектральной асимптотике краевых задач для дифференциальных операторов высокого порядка. Эта статья была дополнена работой [12], где были найдены точные константы для асимптотики малых уклонений многих гауссовских процессов. Независимо от [11] и [12] близкие результаты были получены в [13] и [14].

Цель настоящей работы — получить в *явном виде* логарифмическую асимптотику малых уклонений в L_2 -норме для различных процессов, связанных с дробным броуновским движением (ДБД). Мы отсылаем читателя к монографии [15] за основными сведениями об этом процессе. Под процессом ДБД мы понимаем центрированный гауссовский процесс W^H на $(0, 1)$ с ковариацией

$$G_{W^H}(s, t) = \frac{1}{2} (s^{2H} + t^{2H} - |s - t|^{2H}), \quad (1.2)$$

где $H \in (0, 1)$ — так называемый индекс Херста. В случае $H = \frac{1}{2}$ ДБД превращается в обычное броуновское движение. Подчеркнем, что при

$H \neq \frac{1}{2}$ функция G_{WH} не является функцией Грина какой-либо краевой задачи, и поэтому метод, разработанный в [11], здесь неприменим.

Наш подход опирается на методы гильбертова пространства, и поэтому не годится для изучения дробных гауссовских процессов в случае равномерных и гёльдеровских норм, изучавшихся в ряде работ (см. [2, разделы 4.3 и 4.4], [22]). В большинстве работ этого типа доказывается лишь оценка малых уклонений вида

$$-K_1\varepsilon^{-\theta} \leq \ln \mathbf{P}\{\|W^H\| \leq \varepsilon\} \leq -K_2\varepsilon^{-\theta},$$

где $0 < K_1 \leq K_2 < \infty$ — некоторые неизвестные константы, а степень $\theta > 0$ зависит от H и от нормы $\|\cdot\|$. Типичный результат был получен в [16], [17] для супремум-нормы. Для его формулировки введем так называемый процесс Римана–Лиувилля

$$\xi_\gamma(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \int_0^t (t-s)^\gamma dW(s), \quad \gamma > -\frac{1}{2},$$

и две константы k_γ и $C_H \in (0, \infty)$, задаваемых формулами

$$\begin{aligned} k_\gamma &= -\inf_{\varepsilon > 0} \varepsilon^{2/(2\gamma+1)} \ln \mathbf{P}\left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} |\xi_\gamma(t)| \leq \varepsilon \right\}, \\ C_H &= k_{H-1/2} \left(\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right) \right)^{1/H} \\ &\quad \times \left((2H)^{-1} + \int_{-\infty}^0 ((1-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2})^2 ds \right)^{-1/(2H)} \end{aligned}$$

В этих обозначениях было доказано, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1/H} \ln \mathbf{P}\left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} |W^H(t)| \leq \varepsilon \right\} = -C_H.$$

Мы видим, что и этот результат носит неявный характер, поскольку значение константы k_γ остается неизвестным.

Более общие теоремы о поведении взвешенных L_q -норм при $1 \leq q \leq \infty$ получены в [18], см. также [19] и [40], в последней работе рассматривается сразу целый класс норм. Однако и в этих результатах отсутствуют явные выражения для констант малых уклонений.

В [2, раздел 6.3] отмечается, что «существует относительно мало случаев, когда константы малых уклонений могут быть выписаны явно или представлены аналитически». Наши результаты расширяют класс гауссовских процессов, для которых можно получить *явные аналитические* выражения для констант логарифмических малых уклонений в L_2 -норме.

Первый явный результат о логарифмической асимптотике вероятностей малых уклонений ДБД в L_2 -норме был получен Бронски [20],

который доказал, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1/H} \ln \mathbf{P}\{\|W^H\| \leq \varepsilon\} = -\frac{H}{(2H+1)^{(2H+1)/(2H)}} \left(\frac{\Gamma(2H+1) \sin(\pi H)}{(\sin(\pi/(2H+1)))^{2H+1}} \right)^{1/(2H)}. \quad (1.3)$$

Мы получаем ниже ряд новых результатов для взвешенных и проинтегрированных вариантов ДБД, а также для многопараметрических обобщений, а именно для ДБД Леви, которое, по-видимому, рассматривается в этом контексте впервые. Другой объект нашего исследования — дробный процесс Орнштейна–Уленбека (для краткости ОУ), а также его проинтегрированные и многопараметрические аналоги.

Наш метод отличается от подхода Бронски [20], он более универсален и значительно проще для приложений. Мы используем частный случай весьма общих теорем работы [21] о спектральной асимптотике интегральных операторов. Применяемое нами предложение 2.2 связывает спектральную асимптотику с главной особенностью ковариации на диагонали. Затем мы используем результат, связывающий скорость убывания спектра с логарифмической асимптотикой малых уклонений в норме L_2 , см. предложение 2.1.

Работа имеет следующую структуру. В п. 2 мы описываем вспомогательные результаты по спектральной асимптотике компактных самосопряженных операторов и по логарифмической асимптотике L_2 -малых уклонений гауссовских процессов. Мы применяем их в п. 3 для анализа взвешенных и проинтегрированных вариантов ДБД и дробного поля Леви. В п. 4 мы изучаем взвешенные, проинтегрированные и многопараметрические варианты дробного процесса ОУ, а п. 5 посвящен дальнейшим обобщениям на векторнозначные дробные процессы.

2. Основные математические средства. Мы начнем с описания логарифмической асимптотики малых уклонений гауссовских процессов, имеющих заданную скорость убывания собственных чисел. Оно было получено несколькими математиками (см. [5], [7] и [9]) для *в точности степенного* убывания собственных чисел, т.е. когда $\lambda_n = Cn^{-q}$, $q > 1$. Интересный для нас случай, когда скорость убывания известна приближенно, т.е. $\lambda_n = Cn^{-q}(1 + o(1))$, $q > 1$, нуждается в дополнительном исследовании. Эквивалентный результат сформулирован в недавнем обзоре [22, теорема 3.6] без доказательства.

Предложение 2.1. Пусть собственные значения λ_n из (1.1) удовлетворяют соотношению

$$\lambda_n = \left(\frac{C_q}{\pi n} \right)^q (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.1)$$

где $q > 1$ и $C_q > 0$ — некоторые константы. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2/(q-1)} \ln \mathbf{P}\{\|X\|_\psi \leq \varepsilon\} = -\frac{q-1}{2} \left(\frac{C_q}{q \sin(\pi/q)} \right)^{q/(q-1)}.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольно малое $\delta > 0$. Из соотношения (2.1) следует существование такого натурального $N = N(\delta)$, что для всех $n > N$ справедливо двойное неравенство

$$(1 - \delta) \left(\frac{C_q}{\pi n} \right)^q \leq \lambda_n \leq (1 + \delta) \left(\frac{C_q}{\pi n} \right)^q.$$

Следовательно, ввиду (1.1)

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{P} \left\{ \sum_{n=1}^N \lambda_n \xi_n^2 + (1 + \delta) \left(\frac{C_q}{\pi} \right)^q \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-q} \xi_n^2 \leq \varepsilon^2 \right\} &\leq \ln \mathbf{P}\{\|X\|_\psi \leq \varepsilon\} \\ &\leq \ln \mathbf{P} \left\{ \sum_{n=1}^N \lambda_n \xi_n^2 + (1 - \delta) \left(\frac{C_q}{\pi} \right)^q \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-q} \xi_n^2 \leq \varepsilon^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из [10, следствие 4] вытекает, что для любого натурального N имеет место соотношение

$$\ln \mathbf{P} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \xi_n^2 \leq \varepsilon^2 \right\} \sim \ln \mathbf{P} \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} \lambda_n \xi_n^2 \leq \varepsilon^2 \right\}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{P} \left\{ \sum_{n=1}^N \lambda_n \xi_n^2 + (1 \pm \delta) \left(\frac{C_q}{\pi} \right)^q \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-q} \xi_n^2 \leq \varepsilon^2 \right\} \\ \sim \ln \mathbf{P} \left\{ (1 \pm \delta) \left(\frac{C_q}{\pi} \right)^q \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-q} \xi_n^2 \leq \varepsilon^2 \right\} \\ \sim \ln \mathbf{P} \left\{ (1 \pm \delta) \left(\frac{C_q}{\pi} \right)^q \sum_{n=1}^{\infty} n^{-q} \xi_n^2 \leq \varepsilon^2 \right\}. \end{aligned}$$

Однако хорошо известно, (см., например, [9, следствие 4.2]), что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2/(q-1)} \ln \mathbf{P} \left\{ \left(\frac{C_q}{\pi} \right)^q \sum_{n=1}^{\infty} n^{-q} \xi_n^2 \leq \varepsilon^2 \right\} = -\frac{q-1}{2} \left(\frac{C_q}{q \sin(\pi/q)} \right)^{q/(q-1)}.$$

Применяя этот результат вместе с неравенствами, полученными выше, получаем

$$\begin{aligned} -(1 + \delta)^{1/(q-1)} &\leq \frac{2}{q-1} \left(\frac{q \sin(\pi/q)}{C_q} \right)^{q/(q-1)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2/(q-1)} \ln \mathbf{P}\{\|X\|_\psi \leq \varepsilon\} \\ &\leq -(1 - \delta)^{1/(q-1)}. \end{aligned}$$

Переход к пределу при $\delta \rightarrow 0$ завершает доказательство.

Заметим, что для описания *точной* асимптотики малых уклонений требуется значительно более подробная информация, а именно двучленная асимптотика λ_n с оценкой остаточного члена.

В качестве первого приложения предложения 2.1 рассмотрим процесс ДБД W^H с ковариацией (1.2). Точный спектр этого ядра при $H \neq \frac{1}{2}$ неизвестен. Тем не менее, асимптотика этого спектра была найдена Бронски [20], а также независимо Лушги и Пажесом в [23], [24]. Они доказали, что

$$\lambda_n(W^H) = \frac{\Gamma(2H+1) \sin(\pi H)}{(n\pi)^{2H+1}} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Применяя предложение 2.1 с

$$q = 2H + 1, \quad C(q) = (\Gamma(2H+1) \sin(\pi H))^{1/(2H+1)},$$

мы получаем соотношение (1.3), найденное в [20].

Следующее предложение является частным случаем общего результата М. Ш. Бирмана и М. З. Соломыка из [21], (см. также [25, приложение 7]). Мы сформулируем его в форме, подходящей для наших целей.

Предложение 2.2. Пусть E — ограниченное измеримое множество в $\mathbf{R}^d$. Рассмотрим интегральный оператор

$$(Tu)(x) = \int_E \|x - y\|^\eta a(x) \mathcal{R}(x, y) a(y) u(y) dy,$$

где $\eta > 0$, $\eta/2 \notin \mathbf{N}$, $a \in L_2(E)$ и $\mathcal{R} \in C^\beta(E \times E)$ — вещественные функции²⁾.

Тогда для положительных и отрицательных собственных значений λ_n^+ и λ_n^- оператора T , упорядоченных по убыванию модуля, справедливо соотношение: при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} n^{(d+\eta)/d} \lambda_n^{(\pm)} &\longrightarrow \pm \frac{\Gamma((d+\eta)/2)}{\pi^{\eta/2} \Gamma(-\eta/2) (\Gamma(d/2+1))^{(d+\eta)/d}} \\ &\times \left[\int_E (\mathcal{R}(x, x) a^2(x))_{\pm}^{d/(d+\eta)} dx \right]^{(d+\eta)/d} \end{aligned} \quad (2.3)$$

(здесь $f_{\pm} = \max(\pm f, 0)$).

З а м е ч а н и е 2.1. Если $\eta/2 \in \mathbf{N}$, то дробь в (2.3) равна нулю. В этом случае ядро не имеет особенностей на диагонали, и $n^{(d+\eta)/d} \lambda_n^{(\pm)} \rightarrow 0$.

Заметим, что для ядер, представляющих вероятностный интерес, мы знаем априори, что все собственные значения T положительны.

²⁾ Условие, наложенное на $\mathcal{R}$, означает, что $\mathcal{R}$ может быть продолжено на $\mathbf{R}^{2d}$ как C^β -функция.

В этом случае $\mathcal{R}(x, x)$ имеет постоянный знак, и, в силу хорошо известного равенства

$$\Gamma(-\eta/2) = -\frac{\pi}{\Gamma(1 + \eta/2) \sin(\pi\eta/2)},$$

формула (2.3) может быть переписана следующим образом:

$$n^{(d+\eta)/d} \lambda_n \rightarrow \frac{\Gamma((d+\eta)/2) \Gamma(1 + \eta/2) |\sin(\pi\eta/2)|}{\pi^{1+\eta/2} (\Gamma(d/2 + 1))^{(d+\eta)/d}} \times \left[\int_E (|\mathcal{R}(x, x)| a^2(x))^{d/(d+\eta)} dx \right]^{(d+\eta)/d}. \quad (2.4)$$

Третье утверждение, необходимое нам для дальнейшего, — это знаменитая теорема Г. Вейля [26] (см. также [25, лемма 1.17]).

Предложение 2.3. Пусть T_0 и T_1 — компактные самосопряженные операторы, причем $|\lambda_n(T_1)| = o(n^{-q})$, $q > 0$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^q \lambda_n^{(\pm)}(T_0 + T_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^q \lambda_n^{(\pm)}(T_0).$$

Это означает, в частности, что добавление конечномерных членов к исходному ядру не влияет на справедливость формулы (2.4).

3. Дробное броуновское движение и связанные с ним процессы. Прежде всего мы рассмотрим ДБД в L_2 -норме с весом.

Теорема 3.1. Пусть ψ — суммируемая неотрицательная функция на $[0, 1]$, и пусть $0 < H < 1$. Обозначим $J_s = \int_0^1 \psi(t)^{1/s} dt$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1/H} \ln \mathbf{P}\{\|W^H\|_\psi \leq \varepsilon\} = -\frac{J_{2H+1} H}{(2H+1) \sin(\pi/(2H+1))} \times \left(\frac{J_{2H+1} \Gamma(2H+1) \sin(\pi H)}{(2H+1) \sin(\pi/(2H+1))} \right)^{1/(2H)}. \quad (3.1)$$

Доказательство. В силу предложения 2.3 два первых члена в (1.2) не влияют на одночленную спектральную асимптотику. Поэтому мы можем рассматривать только ядро $-\frac{1}{2}|s-t|^{2H} \sqrt{\psi(s)\psi(t)}$, которое удовлетворяет условиям предложения 2.2 при $\eta = 2H$, $\mathcal{R} \equiv -\frac{1}{2}$, $a = \sqrt{\psi}$. Формула (2.3) дает тогда

$$\lambda_n \sim n^{-(2H+1)} J_{2H+1}^{2H+1} \frac{\Gamma(H + \frac{1}{2}) \Gamma(H+1) \sin(\pi H)}{2\pi^{H+1} (\Gamma(\frac{3}{2}))^{2H+1}}. \quad (3.2)$$

По формуле удвоения Лежандра (см., например, [27, формула 8.335.1])

$$\Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x} \sqrt{\pi} \Gamma(2x)$$

дробь в правой части (3.2) равна $\Gamma(2H + 1) \sin(\pi H) / \pi^{2H+1}$. Следовательно, мы можем применить предложение 2.1 при

$$q = 2H + 1, \quad C_q = J_{2H+1} [\Gamma(2H + 1) \sin(\pi H)]^{1/(2H+1)},$$

что приводит к (3.1).

З а м е ч а н и е 3.1. Ясно, что дробный броуновский мост $B^H(t) = W^H(t) - tW^H(1)$, центрированное ДБД $\bar{W}^H(t) = W^H(t) - \int_0^1 W^H(s) ds$ и аналогичные процессы имеют ковариации, отличающиеся от G_{WH} только конечномерными членами. Поэтому эти процессы имеют такую же логарифмическую асимптотику L_2 -малых уклонений.

В качестве примера рассмотрим простейший случай $H = \frac{1}{2}$. Формула (3.1) дает

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbf{P}\{\|W\|_\psi \leq \varepsilon\} = - \frac{(\int_0^1 \psi^{1/2}(x) dx)^2}{8}. \quad (3.3)$$

Формула (3.3) может быть также выведена из общих результатов в [28] и [19].

В [12, теорема 3.3] была, в частности, получена *точная* асимптотика вероятностей малых уклонений броуновского движения со степенным весом t^θ , $\theta > -2$ (см. также [10] и [29, §1.5]). Таким образом, вес ψ не обязан быть суммируемым. Еще один пример такой ситуации — вес Андерсона–Дарлингса $\psi(t) = (t(1-t))^{-1}$, также рассмотренный в [12]. Вопрос о том, каково точное условие на вес ψ в теореме 3.1, остается открытым.

Интересный процесс, называемый *смешанным ДБД*, был недавно исследован в [30]. Там рассматривался процесс

$$Y_{(\alpha)}^H(t) = W(t) + \alpha W^H(t),$$

где W — стандартный процесс броуновского движения, независимый от W^H , а $\alpha \neq 0$ — вещественная постоянная. Ковариация этого процесса равна $G_W(s, t) + \alpha^2 G_{WH}(s, t)$, так что мы можем применить предложение 2.3 и выписать явно логарифмическую асимптотику вероятностей малых уклонений.

Предложение 3.1. Пусть ψ и H такие же, как в теореме 3.1. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедлива асимптотика

$$\ln \mathbf{P}\{\|Y_{(\alpha)}^H\|_\psi \leq \varepsilon\} \sim \begin{cases} \ln \mathbf{P}\{\|W\|_\psi \leq \varepsilon\}, & \text{если } H > \frac{1}{2}; \\ \alpha^{1/H} \ln \mathbf{P}\{\|W^H\|_\psi \leq \varepsilon\}, & \text{если } H < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Обобщение этого факта на линейную комбинацию нескольких независимых ДБД с различными индексами Херста получается аналогично.

Рассмотрим теперь m -кратно проинтегрированный процесс ДБД (здесь каждое β_j равно нулю или единице, $0 \leq t \leq 1$)

$$(W^H)_m(t) \equiv (W^H)_m^{[\beta_1, \dots, \beta_m]}(t) = (-1)^{\beta_1 + \dots + \beta_m} \underbrace{\int_{\beta_m}^t \dots \int_{\beta_1}^{t_1}}_m W^H(s) ds dt_1 \dots.$$

Теорема 3.2. Пусть $m \in \mathbf{N}$. Тогда в обозначениях теоремы 3.1

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1/(m+H)} \ln \mathbf{P}\{\|(W^H)_m\|_\psi \leq \varepsilon\} \\ = - \frac{J_{2(m+H)+1} \cdot (m+H)}{(2(m+H)+1) \sin(\pi/(2(m+H)+1))} \\ \times \left(\frac{J_{2(m+H)+1} \Gamma(2H+1) \sin(\pi H)}{(2(m+H)+1) \sin(\pi/(2(m+H)+1))} \right)^{1/(2(m+H))}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} G_{(W^H)_m}(x, y) &\equiv \underbrace{\int_{\beta_m}^x \dots \int_{\beta_1}^{t_1}}_m \underbrace{\int_{\beta_m}^y \dots \int_{\beta_1}^{s_1}}_m G_{W^H}(t, s) dt dt_1 \dots ds ds_1 \dots \\ &= (-1)^{m+1} \frac{|x-y|^{2(m+H)}}{2(2H+1) \dots (2H+2m)} + \dots, \end{aligned}$$

где последнее многоточие обозначает конечномерные члены. Последовательно применяя предложение 2.3 и предложение 2.2 при

$$\eta = 2(m+H), \quad \mathcal{R} \equiv \frac{(-1)^{m+1}}{2(2H+1) \dots (2H+2m)}, \quad a = \sqrt{\psi},$$

получаем в силу (2.3), что

$$\lambda_n \sim \Gamma(2H+1) \sin(\pi H) \left(\frac{J_{2(m+H)+1}}{\pi n} \right)^{2(m+H)+1}.$$

Предложение 2.1 немедленно приводит теперь к (3.4).

Пусть теперь Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^d$ с $0 \in \bar{\Omega}$. Рассмотрим на Ω ДБД Леви $\mathcal{L}_d^H$, $0 < H < 1$, с ковариацией

$$G_{\mathcal{L}_d^H}(x, y) = \frac{1}{2} (\|x\|^{2H} + \|y\|^{2H} - \|x-y\|^{2H}), \quad x, y \in \bar{\Omega},$$

и положим

$$\|\mathcal{L}_d^H\|_{\psi, \Omega} = \left(\int_{\Omega} (\mathcal{L}_d^H)^2(x) \psi(x) dx \right)^{1/2}.$$

Теорема 3.3. Пусть ψ — суммируемая неотрицательная функция на Ω , и пусть $0 < H < 1$. Обозначим $J_s(\Omega) = \int_{\Omega} \psi(x)^{1/s} dx$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{d/H} \ln \mathbf{P}\{\|\mathcal{L}_d^H\|_{\psi, \Omega} \leq \varepsilon\} &= - \frac{J_{(d+2H)/d}(\Omega) H \pi^{1-d/2}}{(d+2H) \Gamma(d/2+1) \sin(\pi d/(d+2H))} \\ &\times \left(\frac{J_{(d+2H)/d}(\Omega) \Gamma(d/2+H) \Gamma(1+H) \sin(\pi H)}{(d+2H) \Gamma(d/2) \sin(\pi d/(d+2H))} \right)^{d/(2H)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Доказательство. Разложение (1.1) и предложение 2.1 имеют место и для многопараметрических гауссовских процессов. Поэтому нас в первую очередь интересует спектральная асимптотика интегрального оператора с ядром $G_{\mathcal{L}_d^H}(x, y) \sqrt{\psi(x)\psi(y)}$. Как и в теореме 3.1, можно применить предложение 2.2 с $\eta = 2H$, $\mathcal{R} \equiv -\frac{1}{2}$, $a = \sqrt{\psi}$. Формула (2.3) дает нам

$$\lambda_n \sim \left(\frac{J_{(d+2H)/d}(\Omega)}{n \Gamma(d/2 + 1)} \right)^{1+2H/d} \frac{\Gamma(d/2 + H) \Gamma(1 + H) \sin(\pi H)}{2\pi^{1+H}}.$$

Применяя предложение 2.1 с $q = 1 + 2H/d$, получаем (3.5).

Даже при $d = 2$, $H = \frac{1}{2}$ и $\psi \equiv 1$, что соответствует классическому недробному полю Леви (так называемому изотропному броуновскому полю) $\mathcal{L}_2$, полученный результат является новым и имеет вид

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^4 \ln \mathbf{P}\{\|\mathcal{L}_2\|_{\Omega} \leq \varepsilon\} = -\frac{\pi^2}{324 \sqrt{3}} (\text{mes } \Omega)^3. \quad (3.6)$$

4. Дробный процесс Орнштейна–Уленбека и связанные с ним процессы. Рассмотрим теперь дробный процесс ОУ $U_{(\alpha)}^H$ с ковариацией

$$G_{U_{(\alpha)}^H}(s, t) = \exp(-\alpha|s - t|^{2H}), \quad \alpha > 0, \quad 0 < H < 1. \quad (4.1)$$

Такая форма дробного процесса ОУ рассматривается, например, в [23]. Аналогично m -кратно проинтегрированному ДБД $(W^H)_m$ определяется и m -кратно проинтегрированный дробный процесс ОУ $(U^H)_m$.

Для работы с такими процессами нам понадобится следующая лемма, обобщающая предложение 2.2.

Лемма 4.1. Пусть E — ограниченное измеримое множество в $\mathbf{R}^d$. Рассмотрим интегральный оператор

$$(\tilde{T}u)(x) = \int_E \|x - y\|^\kappa \vartheta(\|x - y\|^\rho) a(x) \mathcal{R}(x, y) a(y) u(y) dy,$$

где $\rho, \kappa > 0$, $\kappa/2 \notin \mathbf{N}$, $a \in L_2(E)$ и $\mathcal{R}$ — вещественные функции, $\mathcal{R}(x, y) = \mathcal{R}(y, x)$. Предположим, что $\mathcal{R}$ имеет достаточную гладкость³⁾, и пусть

$$\vartheta(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j, \quad c_j \in \mathbf{R}, \quad c_0 \neq 0 \quad (4.2)$$

(ряд сходится при $|z| \leq \text{diam}(E) + \delta$, $\delta > 0$).

³⁾ Условие, налагаемое на $\mathcal{R}$, будет ясно из доказательства.

Тогда для положительных и отрицательных собственных значений оператора $\tilde{T}$, упорядоченных по убыванию модуля, при $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$n^{(d+\kappa)/d} \lambda_n^{(\pm)} \longrightarrow \pm \frac{c_0 \Gamma((d+\kappa)/2)}{\pi^{\kappa/2} \Gamma(-\kappa/2) (\Gamma(d/2+1))^{(d+\kappa)/d}} \times \left[\int_E (\mathcal{R}(x, x) a^2(x))_{\pm}^{d/(d+\kappa)} dx \right]^{(d+\kappa)/d}. \quad (4.3)$$

Если все собственные значения $\tilde{T}$ положительны, формулу (4.3) можно переписать в виде:

$$n^{(d+\kappa)/d} \lambda_n \longrightarrow \frac{\Gamma((d+\kappa)/2) \Gamma(1+\kappa/2) |c_0 \sin(\pi\kappa/2)|}{\pi^{1+\kappa/2} (\Gamma(d/2+1))^{(d+\kappa)/d}} \times \left[\int_E (|\mathcal{R}(x, x)| a^2(x))^{d/(d+\kappa)} dx \right]^{(d+\kappa)/d}. \quad (4.4)$$

Доказательство. Выберем $K \in \mathbf{N}$ так, что $K\rho > \kappa + d/2$, и введем в рассмотрение операторы T_j , $j = 0, 1, \dots, K-1$, определяемые следующим образом:

$$(T_0 u)(x) = \int_E \|x - y\|^{\kappa} \left(c_0 + \sum_{j=K}^{\infty} c_j \|x - y\|^{j\rho} \right) a(x) \mathcal{R}(x, y) a(y) u(y) dy;$$

$$(T_j u)(x) = \int_E c_j \|x - y\|^{\kappa+j\rho} a(x) \mathcal{R}(x, y) a(y) u(y) dy, \quad j > 0.$$

Если $\mathcal{R} \in C^{\beta}(E \times E)$, $\beta > \kappa + (K-1)\rho + d/2$, то все T_j удовлетворяют условиям предложения 2.2 с $\eta = \kappa + j\rho$. Тогда положительные и отрицательные собственные значения оператора T_0 , упорядоченные по убыванию модуля, имеют одночленную асимптотику (4.3), в то время как для $j > 0$ выполняется $n^{(d+\kappa)/d} \lambda_n(T_j) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $\tilde{T} = \sum_{j=0}^{K-1} T_j$, предложение 2.3 влечет за собой (4.3). Переход от (4.3) к (4.4) тривиален.

Теорема 4.1. Пусть $0 < H < 1$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, и пусть ψ — суммируемая неотрицательная весовая функция на $[0, 1]$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\ln \mathbf{P}\{\|(U_{(\alpha)}^H)_m\|_{\psi} \leq \varepsilon\} \sim (2\alpha)^{1/(2(m+H))} \ln \mathbf{P}\{\|(W^H)_m\|_{\psi} \leq \varepsilon\}. \quad (4.5)$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3.2, легко видеть, что

$$G_{(U_{(\alpha)}^H)_m}(x, y) = |x - y|^{2(m+H)} \sum_{j=0}^{\infty} c_j |x - y|^{2jH} + \dots,$$

где $c_0 = (-1)^{m+1} \alpha / [(2H+1) \cdots (2H+2m)]$, а многоточие заменяет конечномерные члены. Поэтому мы можем применить последовательно предложение 2.3, лемму 4.1 с $\kappa = 2(m+H)$, $\rho = 2H$, $\mathcal{R} \equiv 1$, $a = \sqrt{\psi}$ и, наконец, предложение 2.1, получая (4.5).

З а м е ч а н и е 4.1. Теоремы 3.2 и 4.1 показывают, что логарифмическая асимптотика вероятностей малых отклонений для процессов $(W^H)_m$ и $(U_{(\alpha)}^H)_m$ не зависит от пределов интегрирования β_j . В работе авторов [11] показано, что если ковариация централизованного гауссовского процесса X является функцией Грина краевой задачи с *разделенными* краевыми условиями, то *точная* асимптотика L_2 -малых отклонений для X_m не зависит от β_j ; асимптотика для различных β_j отличается лишь мультипликативной константой. В частности, это справедливо для проинтегрированного броуновского движения в теореме 3.2 и проинтегрированного процесса ОУ в теореме 4.1, что отвечает $H = \frac{1}{2}$. Мы предполагаем, что это справедливо для всех H .

З а м е ч а н и е 4.2. Лушги и Пажес нашли в [23] спектральную асимптотику интегрального оператора, связанного с обычным процессом ОУ (4.1), используя известный результат Розенблатта [31]. Их результат прекрасно согласуется со спектральной асимптотикой, вытекающей из леммы 4.1.

Дробные процессы ОУ можно ввести иначе, а именно с помощью преобразования Ламперти [32], примененного к процессу ДБД W^H :

$$\tilde{U}_{(\gamma)}^H(t) = e^{-2H\gamma t} W^H(e^{2\gamma t}),$$

где $\gamma > 0$ — некоторая константа. Хорошо известно, что классический процесс ОУ является образом обычного броуновского движения при преобразовании Ламперти, так что вполне естественно ввести стационарный аналог процесса ДБД. Этот подход использовался в [33] и [34]. В [35] преобразование Ламперти также применяется к процессу ДБД, причем получающийся при этом процесс интерпретируется как вариант обобщенного процесса ОУ.

Вычисляя ковариацию гауссовского процесса $\tilde{U}_{(\gamma)}^H(t)$, мы приходим к хорошо известной формуле (см., например, [33, теорема 3]):

$$\begin{aligned} G_{\tilde{U}_{(\gamma)}^H}(s, t) &= \frac{1}{2} \left(e^{2H\gamma|s-t|} + e^{-2H\gamma|s-t|} - (e^{\gamma|s-t|} - e^{-\gamma|s-t|})^{2H} \right) \\ &= \text{ch}(2H\gamma|s-t|) - \frac{1}{2} (2\text{sh}(\gamma|s-t|))^{2H}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ядро (4.6) отличается от ковариации (4.1) дробного процесса ОУ. Однако это ядро, равно как и ядро m -кратно проинтегрированного процесса, удовлетворяет условиям леммы 4.1, если пренебречь не влияющими на результат конечномерными членами. Поэтому справедливо следующее предложение.

Предложение 4.1. При $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\ln \mathbf{P} \{ \|(\tilde{U}_{(\gamma)}^H)_m\|_\psi \leq \varepsilon \} \sim (2\gamma)^{H/(m+H)} \ln \mathbf{P} \{ \|(W^H)_m\|_\psi \leq \varepsilon \},$$

где использованы те же обозначения, что и в теореме 4.1.

Еще один тип дробного процесса ОУ вводится в [35], [36] как стационарное решение уравнения Ланжевена, в котором шумом является процесс ДБД. Следует заметить, что у этого типа дробного процесса ОУ автоковариация убывает на бесконечности степенным образом, что резко отличается от других типов дробных процессов ОУ, рассмотренных выше. Тем не менее, главная особенность этого ядра точно такая же, как в (4.1) и (4.6) при подходящем выборе констант α или γ . Поэтому этот тип дробного процесса ОУ имеет ту же самую логарифмическую асимптотику L_2 -малых уклонений.

З а м е ч а н и е 4.3. Предложение 3.1 очевидным образом обобщается на линейную комбинацию дробных процессов ОУ.

Дробный (и обычный) процессы Орнштейна–Уленбека являются лишь двумя примерами центрированных гауссовских стационарных процессов. Еще один практически важный пример — это процесс с корреляционной функцией

$$G(\tau) = C \exp(-\alpha|\tau|) \cos(\omega\tau), \quad C > 0, \quad \alpha > 0, \quad \omega > 0,$$

описывающий, например, флуктуации интенсивности радиолокационного сигнала (см. [37, § 12]). Ясно, что техника вычисления логарифмической асимптотики вероятностей малых уклонений, развитая в настоящей работе, пригодна для значительно более широкого класса гауссовских стационарных процессов, лишь бы для их ковариации выполнялись условия леммы 4.1 или предложения 2.2. Примеры таких процессов имеются в [37].

Сформулируем многопараметрическое обобщение теоремы 4.1. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^d$. Рассмотрим многопараметрический дробный процесс ОУ $\mathcal{U}_{d,(\alpha)}^H$, $0 < H < 1$, с ковариацией

$$G_{\mathcal{U}_{d,(\alpha)}^H}(x, y) = \exp(-\alpha\|x - y\|^{2H}), \quad x, y \in \bar{\Omega}.$$

Предложение 4.2. Пусть ψ — суммируемый неотрицательный вес на Ω и $0 < H < 1$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\ln \mathbf{P}\{\|\mathcal{U}_{d,(\alpha)}^H\|_{\psi, \Omega} \leq \varepsilon\} \sim (2\alpha)^{d/(2H)} \ln \mathbf{P}\{\|\mathcal{L}_d^H\|_{\psi, \Omega} \leq \varepsilon\}.$$

Доказательство этого предложения аналогично доказательству теоремы 4.1.

З а м е ч а н и е 4.4. Теорема 3.3 и предложение 4.2 являются первыми результатами о L_2 -малых уклонениях дробных гауссовских полей. Первый результат такого рода для гауссовских полей был получен Чаки [8], рассмотревшим броуновский лист $\mathbf{W}(x_1, \dots, x_d)$ на единичном кубе I^d . Его результаты были позднее обобщены Ли [10] на более широкий класс случайных полей. Асимптотика малых уклонений для броу-

уновского листа резко отличается от (3.6). Для $d = 2$ она имеет вид

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln^{-2} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \ln \mathbf{P} \{ \| \mathbf{W}(x_1, x_2) \|_{L^2} \leq \varepsilon \} = -\frac{1}{8\pi^2}. \quad (4.7)$$

Подчеркнем, что наш подход позволяет обобщить формулу (4.7) для широкого класса гауссовских полей, включающих дробные броуновские листы. Полученные результаты изложены в препринте [38].

5. Дальнейшие обобщения. Результаты предыдущих разделов можно обобщить на векторнозначные центрированные дробные гауссовские процессы. Для этого мы сформулируем матричный вариант предложения 2.2 (см. [25, приложение 7]).

Предложение 5.1. Пусть E — ограниченное измеримое множество в $\mathbf{R}^d$. Рассмотрим интегральный оператор

$$(Tu)(x) = \int_E \|x - y\|^\eta A^T(x) \mathcal{R}(x, y) A(y) u(y) dy,$$

действующий в пространстве $L_2(E \rightarrow \mathbf{R}^k)$. Здесь $\eta > 0$, $\eta/2 \notin \mathbf{N}$, $A(x)$ — вещественная $(\ell \times k)$ -матрица, $A \in L_2(E)$, $\mathcal{R}(x, y) = \mathcal{R}(y, x)$ — вещественная симметричная $(\ell \times \ell)$ -матрица, $\mathcal{R} \in C^\beta(E \times E)$, $\beta > \eta + d/2$.

Пусть $\nu_r(x)$, $r = 1, \dots, k$, — собственные значения $(k \times k)$ -матрицы $A^T(x) \mathcal{R}(x, x) A(x)$. Тогда для положительных и отрицательных собственных значений λ_n^+ и λ_n^- оператора T , упорядоченных по убыванию модулей, при $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение:

$$\begin{aligned} n^{(d+\eta)/d} \lambda_n^{(\pm)} &\longrightarrow \pm \frac{\Gamma((d+\eta)/2)}{\pi^{\eta/2} \Gamma(-\eta/2) (\Gamma(d/2 + 1))^{(d+\eta)/d}} \\ &\times \left[\int_E \sum_{r=1}^k (\nu_r(x))_{\pm}^{d/(d+\eta)} dx \right]^{(d+\eta)/d}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Следующая лемма есть матричный вариант леммы 4.1 и может быть доказана тем же способом.

Лемма 5.1. Пусть E — ограниченное измеримое множество в $\mathbf{R}^d$. Рассмотрим интегральный оператор

$$(\tilde{T}u)(x) = \int_E \|x - y\|^\kappa A^T(x) \sum_{j=0}^{\infty} \|x - y\|^{j\rho} \mathcal{R}_j(x, y) A(y) u(y) dy, \quad (5.2)$$

где $\rho, \kappa > 0$, $\kappa/2 \notin \mathbf{N}$, $A(x)$ — вещественная $(\ell \times k)$ -матрица, $A \in L_2(E)$, $\mathcal{R}_j(x, y) = \mathcal{R}_j(y, x)$ — вещественные симметричные $(\ell \times \ell)$ -матрицы, $\mathcal{R}_j$ обладают достаточной гладкостью и хвосты рядов в (5.2) сходятся в пространстве $C^\beta(E \times E)$ для достаточно больших β . Обозначим через $\nu_r^{(0)}(x)$, $r = 1, \dots, k$, собственные значения матрицы

$A^T(x) \mathcal{R}_0(x, x) A(x)$. Тогда для положительных и отрицательных собственных значений оператора $\tilde{T}$, упорядоченных по убыванию модулей, справедливо соотношение: при $n \rightarrow \infty$

$$n^{(d+\kappa)/d} \lambda_n^{(\pm)} \rightarrow \pm \frac{\Gamma((d+\kappa)/2)}{\pi^{\kappa/2} \Gamma(-\kappa/2) (\Gamma(d/2+1))^{(d+\kappa)/d}} \times \left[\int_E \sum_{r=1}^k (\nu_r^{(0)}(x))_{\pm}^{d/(d+\kappa)} dx \right]^{(d+\kappa)/d}. \quad (5.3)$$

В качестве примера рассмотрим векторнозначный гауссовский процесс $X(t) \in \mathbf{R}^\ell$, $t \in [0, 1]$. Пусть его компоненты X_p , $p = 1, \dots, \ell$, являются ДБД с индексами Херста H_p . Пусть $A(t)$ — вещественная $(\ell \times k)$ -матрица, $A \in L_2(0, 1)$. Тогда существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1/H} \ln \mathbf{P} \{ \int_0^1 \|A^T(t) X(t)\|^2 dt \leq \varepsilon^2 \} = \mathcal{K} \in \mathbf{R}_-$, где $H = \min_p H_p$.

Введем $(\ell \times \ell)$ -матрицу кросс-ковариаций $G_{pq}(t, s) = \mathbf{E} X_p(t) X_q(s)$.

Рассмотрим случай, когда только одна (например, первая) компонента X_p имеет наименьший индекс Херста, т.е. $H_1 = H$, $H_p > H$ для $p \geq 2$. В силу положительной определенности оператора с матричным ядром $(G_{pq}(t, s))$ члены с наименьшей диагональной сингулярностью (порядка $2H$) образуют положительно полуопределенную матрицу. Поэтому G_{11} — единственный элемент с диагональной сингулярностью порядка $2H$. Из предложения 2.3, (5.1) и предложения 2.1 тогда следует, что⁴⁾

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1/H} \ln \mathbf{P} \left\{ \int_0^1 \|X_1(t) A^{(1)}(t)\|^2 dt \leq \varepsilon^2 \right\} \\ &= - \frac{J_{2H+1}^{(1)} H}{(2H+1) \sin(\pi/(2H+1))} \left(\frac{J_{2H+1}^{(1)} \Gamma(2H+1) \sin(\pi H)}{(2H+1) \sin(\pi/(2H+1))} \right)^{1/(2H)} \end{aligned}$$

(здесь $A^{(p)}$ есть p -й столбец матрицы A и введено обозначение $J_s^{(p)} = \int_0^1 |A^{(p)}(t)|^{2/s} dt$).

В случае независимых компонент матрица (G_{pq}) диагональна и мы можем вычислить $\mathcal{K}$ без предположения о единственности для минимального индекса Херста. Если столбцы матрицы A ортогональны, формула упрощается и принимает вид

$$\mathcal{K} = - \frac{H \sum_p J_{2H+1}^{(p)}}{(2H+1) \sin(\pi/(2H+1))} \left(\frac{\Gamma(2H+1) \sin(\pi H) \sum_p J_{2H+1}^{(p)}}{(2H+1) \sin(\pi/(2H+1))} \right)^{1/(2H)}$$

(здесь суммирование ведется по всем тем p , для которых $H_p = H$). В общем случае $\mathcal{K}$ также можно вычислить, если целиком известна матрица $(G_{pq}(t, s))$.

⁴⁾ М. А. Лифшиц сообщил нам, что этот факт следует также из общего результата Ли [39].

Аналогичные утверждения справедливы и для векторнозначных дробных процессов ОУ, а также для векторнозначных дробных гауссовских полей.

Авторы признательны М. А. Лифшицу и М. З. Соломяку за ценные консультации и Я. Ханнигу за присылку препринтов двух статей [13], [14]. Работа была написана, когда второй автор был приглашенным профессором в университете Боккони, Милан. Он выражает глубокую благодарность проф. М. Чифарелли за постоянную поддержку и интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lifshits M. A. Asymptotic behavior of small ball probabilities. — Probability Theory and Mathematical Statistics. Proceedings of the 7th international Vilnius conference. Ed. by B. Grigelionis et al. Utrecht/Vilnius: VSP/TEV, 1999, p. 453–468.
2. Li W. V., Shao Q.-M. Gaussian processes: Inequalities, small ball probabilities and applications. — Stochastic Processes: Theory and Methods. Ed. by C. R. Rao and D. Shanbhag. Amsterdam: North-Holland, 2001, p. 533–597 (Handbook of Statistics, v. 19).
3. Сытая Г. Н. О некоторых асимптотических представлениях гауссовской меры в гильбертовом пространстве. — Теория случайных процессов, 1974, в. 2, с. 93–104.
4. Hoffmann-Jørgensen J., Shepp L. A., Dudley R. M. On the lower tail of Gaussian seminorms. — Ann. Probab., 1979, v. 7, № 2, p. 319–342.
5. Ибрагимов И. А. О вероятности попадания гауссова вектора со значениями в гильбертовом пространстве в сферу малого радиуса. — Записки научн. семин. ЛОМИ, 1979, т. 85, с. 75–93.
6. Zolotarev V. M. Gaussian measure asymptotic in l_2 on a set of centered spheres with radii tending to zero. — 12th European Meeting of Statisticians, Varna, 1979, p. 254.
7. Золотарев В. М. Асимптотическое поведение гауссовской меры в l_2 . — Проблемы устойчивости стохастических моделей: Тр. семинара. Под ред. В. М. Золотарева и В. В. Калашникова. М.: ВНИИСИ, 1984, с. 54–58.
8. Csáki E. On small values of the square integral of a multiparameter Wiener process. — Statistics and Probability. Proceedings of the Third Pannonian Symposium on Mathematical Statistics (Visegrád, 1982). Boston: Reidel, 1984, p. 19–26.
9. Dunker T., Lifshits M. A., Linde W. Small deviations of sums of independent variables. — Progr. Probab., 1998, v. 43, p. 59–74.
10. Li W. V. Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms. — J. Theoret. Probab., 1992, v. 5, № 1, p. 1–31.
11. Nazarov A. I., Nikitin Ya. Yu. Exact small ball behavior of integrated Gaussian processes under L_2 -norm and spectral asymptotics of boundary value problems. — Probab. Theory Related Fields, 2004, v. 129, № 4, p. 469–494.
12. Назаров А. И. О точной константе в асимптотике малых уклонений в L_2 -норме некоторых гауссовских процессов. — Нелинейные уравнения и математический анализ. Новосибирск: Т. Рожковская, 2003, с. 179–214. (Пробл. матем. анализ, в. 26.)
13. Gao F., Hannig J., Lee T.-Y., Torcaso F. Exact L^2 small balls of Gaussian processes. — J. Theoret. Probab., 2004, v. 17, № 2, p. 503–520.
14. Gao F., Hannig J., Lee T.-Y., Torcaso F. Laplace transforms via Hadamard factorization with applications to small ball probabilities. — Electron J. Probab., 2003, v. 8, № 13, p. 1–20.
15. Embrechts P., Maejima M. Selfsimilar Processes. Princeton: Princeton Univ. Press, 2002, 111 p.
16. Li W. V., Linde W. Existence of small ball constants for fractional Brownian motions. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1998, v. 326, № 11, p. 1329–1334.

17. *Li W. V., Linde W.* Approximation, metric entropy and small ball estimates for Gaussian measures. — *Ann. Probab.*, 1999, v. 27, № 3, p. 1556–1578.
18. *Lifshits M. A., Linde W.* Small deviations of weighted fractional processes and average nonlinear approximation. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2004 (to appear).
19. *Lifshits M. A., Linde W.* Approximation and entropy numbers of Volterra operators with application to Brownian motion. — *Mem. Amer. Math. Soc.*, 2002, v. 157, № 745, p. 1–87.
20. *Bronski J. C.* Small ball constants and tight eigenvalue asymptotics for fractional Brownian motions. — *J. Theoret. Probab.*, 2003, v. 16, № 1, p. 87–100.
21. *Бурман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра слабо полярных интегральных операторов. — *Изв. АН СССР*, 1970, т. 34, № 6, с. 1143–1158.
22. *Фаталов В. Р.* Константы в асимптотиках вероятностей малых уклонений для гауссовских процессов и полей. — *Успехи матем. наук*, 2003, т. 58, № 4, с. 90–134.
23. *Luschgy H., Pagès G.* Sharp asymptotics of the functional quantization problem for Gaussian processes. — *Ann. Probab.*, 2004, v. 32, № 2, p. 1574–1599.
24. *Luschgy H., Pagès G.* Functional quantization of Gaussian processes. — *J. Funct. Anal.*, 2002, v. 196, № 2, p. 486–531.
25. *Бурман М. Ш., Соломяк М. З.* Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории. — *Труды X Математической школы*. Под ред. Ю. А. Митропольского и А. Ф. Шестопала. Киев, 1974, с. 5–189.
26. *Weyl H.* Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen. — *Math. Ann.*, 1912, v. 71, p. 441–479.
27. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971, 1108 с.
28. *Li W. V.* Small ball probabilities for Gaussian Markov processes under the L_p -norm. — *Stochastic Process. Appl.*, 2001, v. 92, № 1, p. 87–102.
29. *Deheuvels P., Martynov G.* Karhunen–Loève expansions for weighted Wiener processes and Brownian bridges via Bessel functions. — *Progr. Probab.*, 2003, v. 55, p. 57–93.
30. *Cheridito P.* Mixed fractional Brownian motion. — *Bernoulli*, 2001, v. 7, № 6, p. 913–934.
31. *Rosenblatt M.* Some results on the asymptotic behavior of eigenvalues for a class of integral equations with translation kernel. — *J. Math. Mech.*, 1963, v. 12, p. 619–628.
32. *Lamperti J. W.* Semi-stable stochastic processes. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1962, v. 104, p. 62–78.
33. *Barndorff-Nielsen O. E., Pérez-Abreu V.* Stationary and self-similar processes driven by Lévy processes. — *Stochastic Process. Appl.*, 1999, v. 84, № 2, p. 357–369.
34. *Cheridito P., Kawaguchi H., Maejima M.* Fractional Ornstein–Uhlenbeck processes. — *Electron J. Probab.*, 2003, v. 8, № 3, p. 1–14.
35. *Flandrin P., Borgnat P., Amblard P.-O.* From stationarity to self-similarity, and back: variations on the Lamperti transformation. — *Lecture Notes in Phys.*, 2003, v. 621, p. 88–117.
36. *Kleptsyna M. L., Le Breton A.* Statistical Analysis of the fractional Ornstein–Uhlenbeck type process. — *Statist. Inference Stoch. Process.*, 2002, v. 5, № 3, p. 229–248.
37. *Яглом А. М.* Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л.: Гидрометеиздат, 1981, 280 с.
38. *Karol' A. I., Nazarov A. I., Nikitin Ya. Yu.* Tensor products of compact operators and logarithmic L_2 -small ball asymptotics for Gaussian random fields. — *Studi Statistici* № 74. Milano: Istituto di Metodi Quantitativi, Università L. Bocconi, 2003, 30 p.
39. *Li W. V.* A Gaussian correlation inequality and its applications to small ball probabilities. — *Electron. Comm. Probab.*, 1999, v. 4, p. 111–118.
40. *Lifshits M. A., Simon Th.* Small deviations for fractional stable processes. Preprint № 177, Université d'Évry, 2003; arXiv: math.PR/0305092