Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. М. Р. Гама, В. В. Юринский, Показательное неравенство для всплесковой оценки плотности, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2006, том 51, выпуск 4, 674–690

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp19>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 15:19:41

© 2006 г. ГАМА Ж. М. Р.*, ЮРИНСКИЙ В. В.*

ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ВСПЛЕСКОВОЙ ОЦЕНКИ ПЛОТНОСТИ¹⁾

Статья посвящена выводу показательной оценки для хвоста распределения L^p -нормы невязки между неизвестной одномерной плотностью распределения и ее «нелинейной» всплесковой (вэйвлетной) оценкой, использующей срезки коэффициентов.

Предполагается, что в рассматриваемых кратномасштабных разложениях масштабирующая функция и всплеск имеют компактные носители. Полученная в заметке показательная оценка сродни известному неравенству С. Н. Бернштейна для сумм независимых случайных величин. Она дополняет известные оценки для среднего интегрального риска. Вывод оценки использует почти полную независимость эмпирических приближений к коэффициентам всплескового разложения для базисных всплесков одного и того же уровня разрешения в случае, когда носители их разделены достаточным расстоянием.

Ключевые слова и фразы: оценивание плотности, большие отклонения, всплесковые оценки, пороговая срезка коэффициентов, показательные неравенства.

1. Введение

Ниже рассматривается задача оценки неизвестной плотности вероятности по выборке, состоящей из независимых одинаково распределенных наблюдений с этой плотностью. Хорошо известно, что всплесковые оценки плотности (ВОП) оказываются чрезвычайно эффективными в этой ситуации.²⁾

Существует обширная литература, посвященная асимптотическому анализу эффективности ВОП с помощью характеристик, выражаемых

* Departamento de Matemática, Universidade da Beira Interior, Rua Marquês d'Ávila e Bolama, 6201-001 Covilhã, Portugal; e-mail: jgama@mat.ubi.pt, yurinsky@ubi.pt

¹⁾ Работа выполнена при поддержке фонда *Fundação para a Ciência e a Tecnologia (Portugal)* через посредство *Centro de Matemática da Universidade da Beira Interior, Sub-Projecto DECONT*.

²⁾ Терминология, относящаяся к всплескам (вэйвлетам), следует [5].

моментами подходящих норм невязки между оценкой и искомой плотностью. Этот подход позволил установить оптимальные скорости сходимости оценок, равномерные при выборе неизвестной плотности из классов плотностей, удовлетворяющих специфическим условиям регулярности, и привел к достаточно глубокому пониманию эффектов, вызывающих радикальное уменьшение интегрального риска ВОП при исключении из линейной проекционной оценки [2, гл. 12] «несущественных» компонент, для которых эмпирические коэффициенты кратномасштабного разложения не достигают предписанных пороговых значений (см., например, [8], [12]).

Несколько иной подход был использован в [11], [9]. В этих работах свойства ВОП анализируются в ситуациях, где ставится цель восстановить индивидуальную плотность распределения, изменяющуюся с увеличением объема выборки и сочетающую гладкую «фоновую» составляющую и растущее число менее регулярных элементов, существенно влияющих на высокочастотную часть кратномасштабного разложения плотности (в [11] такими элементами являются скачки, а в [9] — сужающиеся при увеличении выборки колоколообразные пики искомой плотности). В цитированных работах анализ эффективности основывался на вычислении математического ожидания интеграла квадрата невязки [11] или ее математического ожидания в точках, где находятся пики, возмущающие гладкую фоновую плотность [9]. Этот анализ дал интересную дополнительную информацию о характере сходимости нелинейной ВОП к нерегулярной искомой плотности.

Главный результат настоящей заметки приведен ниже в теореме 1.1 и относится к стандартной «пороговой» ВОП, использующей так называемую «жесткую срезку» коэффициентов³⁾, т.е. полное исключение из кратномасштабного разложения исходной проекционной оценки компонент, у которых модули коэффициентов не достигают некоторых пороговых значений. При довольно слабых ограничениях на неизвестную плотность распределения f эта теорема доставляет экспоненциальное неравенство для «хвоста» распределения погрешности ВОП $\|\tilde{f} - f\|_p$, где $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве $L^p(\mathbf{R})$, $p \geq 2$. Оно сродни классическому неравенству С. Н. Бернштейна [1], адаптированному к большим отклонениям сумм независимых случайных векторов [16, § 3.3], хотя существенно нелинейная природа сжатия данных при преобразовании проекционной оценки в ВОП, использующую срезки коэффициентов, мешает непосредственному применению этого последнего. При доказательстве теоремы 1.1 основным инструментом является рандомизация объема выборки с тем, чтобы полнее использовать практическую независимость коэффициентов кратномасштабного разложения проекционной

³⁾ «Hard thresholding».

оценки плотности, которая служит основой при построении «нелинейной» пороговой ВОП — этот прием использовался ранее, например, в работах [4] об оценивании функции регрессии двумерного распределения и [15] о ядерных оценках двумерных плотностей.

Мы сосредоточиваем внимание преимущественно на случайных составляющих невязки между ВОП и искомой плотностью, для которых вероятности больших отклонений определяются некоторыми грубыми характеристиками распределения и всплескового базиса. Влияние более тонких свойств плотности и кратномасштабного базиса на математическое ожидание и моменты пороговой ВОП исследовано с достаточной полнотой (см. [8], [12] и приведенную в этих работах библиографию, а также [11], [9]). По этой причине мы отделяем в теореме 1.1 случайные составляющие погрешности оценки от детерминированных и ограничиваемся немногими замечаниями относительно поведения этих последних.

Основной результат. ВОП, рассматриваемые ниже, основываются на кратномасштабном разложении [7], [14], [5] неизвестной плотности в $L^2(\mathbf{R})$

$$f = \sum_k \alpha_{J_*,k} \phi_{J_*,k} + \sum_{j>J_*} \sum_k \beta_{jk} \psi_{jk}, \quad (1.1)$$

где коэффициентами служат математические ожидания $\alpha_{J_*,k} = \mathbf{E} \phi_{J_*,k}(X)$ и $\beta_{jk} = \mathbf{E} \psi_{jk}(X)$ (здесь X — случайная величина с плотностью f , а сокращение $\sum_k$ заменяет, как и всюду ниже, выражение $\sum_{k \in \mathbf{Z}}$). Кратномасштабное разложение (1.1) порождается масштабирующей функцией (шапочкой) ϕ и всплеском (вэйвлетом) ψ , используя ортонормальный базис, состоящий из функций

$$\phi_{J_*,k}(x) = \lambda_{J_*}^{-1/2} \phi(\lambda_{J_*}^{-1}(x - x_{J_*,k})), \quad \psi_{jk}(x) = \lambda_j^{-1/2} \psi(\lambda_j^{-1}(x - x_{jk})), \quad (1.2)$$

где $\lambda_j = (A2^j)^{-1}$ и $x_{jk} = k\lambda_j$ при $j \geq J_*$.

Оценка плотности строится по выборке объема n , состоящей из независимых одинаково распределенных случайных величин X_j с плотностью распределения f из (1.1). Эта выборка определяет средние

$$\begin{aligned} a_{J_*,k} &= a_{J_*,k}(X_1, \dots, X_n) = \overline{\phi_{J_*,k}(X)} = \frac{1}{n} (\phi_{J_*,k}(X_1) + \dots + \phi_{J_*,k}(X_n)), \\ b_{jk} &= b_{jk}(X_1, \dots, X_n) = \overline{\psi_{jk}(X)} = \frac{1}{n} (\psi_{jk}(X_1) + \dots + \psi_{jk}(X_n)). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Приведенные выше средние являются несмещенными оценками соответствующих коэффициентов в (1.1). Линейная ВОП [12, § 10.2] (или, в другой терминологии, проекционная оценка плотности, использующая ортонормальную систему $(\phi_{J_*,k}, \psi_{j,\ell})$, см. [6] и [2, гл. 12]), задается разложением (1.1) с конечным числом уровней, $J_* < j \leq J^*$, в котором $\alpha_{J_*,k}$ и β_{jk} заменены соответственно на $a_{J_*,k}$ и b_{jk} .

Пороговая ВОП с жесткой срезкой $\tilde{f}$ получается из линейной оценки исключением компонент, у которых модули коэффициентов b_{jk} из (1.3) не достигают некоторого заданного порогового значения $\delta_j = \delta_j(n) > 0$, $j > J_*$:

$$\tilde{f}(x) = \sum_k a_{J_*,k} \phi_{J_*,k}(x) + \sum_{J_* < j \leq J^*} \sum_k \tilde{b}_{jk} \psi_{jk}(x), \quad (1.4)$$

где⁴⁾ $\tilde{b}_{jk} = b_{jk} 1\{|b_{jk}| \geq \delta_j\}$ и $1\{|b_{jk}| \geq \delta_j\} = \begin{cases} 1, & |b_{jk}| \geq \delta_j, \\ 0, & |b_{jk}| < \delta_j. \end{cases}$

Мы будем сравнивать оценку (1.4) со случайным элементом $L^2(\mathbf{R}) \cap L^p(\mathbf{R})$, $p \geq 2$, который не является оценкой плотности и получается исключением из линейной ВОП компонент с малыми математическими ожиданиями коэффициентов β_{jk} (ниже $\gamma > 0$ — параметр, который может варьироваться по выбору):

$$\hat{f}_n(x) = \sum_k a_{J_*,k} \phi_{J_*,k}(x) + \sum_{J_* < j \leq J^*} \sum_k b_{jk} 1\{|\beta_{jk}| \geq (1 + 2\gamma) \delta_j\} \psi_{jk}(x). \quad (1.5)$$

Невязка между искомой плотностью и пороговой ВОП может быть представлена в виде

$$\tilde{f} - f = (\tilde{f} - \hat{f}) + (\hat{f} - \mathbf{E}\hat{f}) + \hat{B}_1 + \hat{B}_{J^*}, \quad \hat{f} = \hat{f}_n, \quad (1.6)$$

с неслучайными последними слагаемыми

$$\begin{aligned} \hat{B}_1 &= - \sum_{J_* < j \leq J^*} \sum_k \beta_{jk} 1\{|\beta_{jk}| < (1 + 2\gamma) \delta_j\} \psi_{jk}, \\ \hat{B}_{J^*} &= \sum_{j > J^*} \sum_k \beta_{jk} \psi_{jk} = f - \sum_k \alpha_{J_*,k} \phi_{J_*,k}(x) - \sum_{J_* < j \leq J^*} \sum_k \beta_{jk} \psi_{jk}(x). \end{aligned}$$

Мы будем оценивать вероятности больших отклонений для случайных слагаемых правой части (1.6).

В дальнейшем масштабирующая функция и всплески в (1.4) предполагаются ограниченными и имеющими компактные носители: существуют константы $\Phi_1 > 0$ и $K \in \mathbf{N}$ такие, что

$$\begin{aligned} \|\phi\|_\infty &= \sup_x |\phi(x)| \leq \Phi_1, & \text{supp}(\phi) \cap \text{supp}(\phi \circ T_K) &= \emptyset, \\ \|\psi\|_\infty &= \sup_x |\psi(x)| \leq \Phi_1, & \text{supp}(\psi) \cap \text{supp}(\psi \circ T_K) &= \emptyset, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $g \circ T_K(x) = g(x + K)$ обозначает функцию, полученную из g сдвигом.

Искомая плотность распределения удовлетворяет условию

$$\exists q_* \geq p \geq 2 \quad \|f\|_{q_*} = \left(\int_{\mathbf{R}} f^{q_*}(x) dx \right)^{1/q_*} < \infty. \quad (1.8)$$

⁴⁾ Индикаторы множеств обозначаются $1_A(x)$, $1\{x \in A\}$ и т.д.

Ниже мы уделяем основное внимание существенно нелинейной случайной составляющей невязки $\tilde{f} - \hat{f}$. Для линейных комбинаций всплесков одного уровня разрешения мы будем использовать известные неравенства между $L^p(\mathbf{R})$ -нормой функции и l^p -нормой $|\eta|_p = (\sum_k |\eta_k|^p)^{1/p}$ последовательности ее коэффициентов (см. [8, лемма 1] или [14, т. 1]): при $p \geq 1$

$$\begin{aligned} c_1 \lambda_{J^*}^{-(1/2-1/p)} |\eta|_p &\leq \left\| \sum_k \eta_k \phi_{J^*k} \right\|_p \leq c_2 \lambda_{J^*}^{-(1/2-1/p)} |\eta|_p, \\ c_1 \lambda_j^{-(1/2-1/p)} |\eta|_p &\leq \left\| \sum_k \eta_k \psi_{jk} \right\|_p \leq c_2 \lambda_j^{-(1/2-1/p)} |\eta|_p, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где константы c_i зависят от p и выбора всплескового базиса.

З а м е ч а н и е 1.1. Вследствие неравенства (1.9) первый неслучайный член в правой части (1.6) допускает оценку

$$\|\hat{B}_1\|_p \leq c_2 \mathbf{B}(\gamma, \delta), \quad \mathbf{B}(\gamma, \delta) = \sum_{J_* < j \leq J^*} \lambda_j^{-(1/2-1/p)} \mathbf{b}_j(\gamma, \delta_j), \quad (1.10)$$

где

$$\mathbf{b}_j(\gamma, \delta_j) = \left(\sum_k |\beta_{jk}|^p 1\{|\beta_{jk}| \leq (1+2\gamma)\delta_j\} \right)^{1/p}. \quad (1.11)$$

Мы будем использовать кроме введенных выше еще обозначения

$$\mathbf{B}^+ = \sum_{J_* < j \leq J^*} \lambda_j^{-(1/2-1/p)} \mathbf{b}_j^+, \quad \mathbf{b}_j^+ = \left(\sum_k |\beta_{jk}|^p \right)^{1/p}. \quad (1.12)$$

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Предположим, что $p \geq 2$ и выполнены условия (1.7), (1.8). Если для некоторых $\varkappa, \mathbf{v}^*, \bar{\mathbf{v}}^* > 0$ и любого целого $j \in (J_*, J^*]$ выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_j &= \lambda_j \max_{0 \leq s < K} \sum_k \mathbf{E} \psi_{j(s+Kk)}^2(X) \leq \bar{\mathbf{v}}^*, \\ \mathbf{v}_j &= \sup_k \mathbf{E} \psi_{jk}^2(X) \leq \mathbf{v}^*, \quad \frac{\delta_j}{\delta_{J^*}} \geq \varkappa, \end{aligned} \quad (1.13)$$

и

$$\frac{\Phi_1 \varkappa}{4 \mathbf{v}^*} \gamma \delta_{J^*} \lambda_{J^*}^{-1/2} \leq \ln 2, \quad (1.14)$$

где параметр γ из (1.5) таков, что $0 < \gamma < \frac{1}{4}$, то вероятность

$$\mathbf{P}_\varepsilon = \mathbf{P} \left\{ \|\tilde{f} - \hat{f}\|_p \geq c_2 \left(\varepsilon + \frac{2}{\gamma \sqrt{n}} \mathbf{B}^+ + (1+4\gamma) \mathbf{B}(\gamma, \delta) \right) \right\},$$

определенная с использованием постоянной c_2 из неравенства (1.9), допускает оценку

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbf{P}_\varepsilon \leq \frac{8}{3} \exp \left\{ - \frac{\varkappa \gamma^2 \delta_{J^*} \varepsilon n \lambda_{J^*}^{1/2-1/p}}{4 K^{1/p} \chi(p) \mathbf{v}^*} \left(1 - \frac{8 K^{1/p} \chi(p) \bar{\mathbf{v}}^*}{\gamma \varepsilon \lambda_{J^*}^{3/2-1/p} \sqrt{n}} \mu_n \right) \right\}, \quad (1.15)$$

где

$$\mu_n = \frac{1}{\kappa \gamma \delta_{J^*} \sqrt{n}} \exp \left\{ - \frac{(\kappa \gamma \delta_{J^*} \sqrt{n})^2}{8 \mathbf{v}^*} \right\},$$

$$\chi(p) = \begin{cases} \frac{1 - 2^{-(1/2-1/p)}}{1 - 2^{-(J^* - J_*)(1/2-1/p)}}, & p > 2, \\ J^* - J_*, & p = 2. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 1.2. Если выполнены условия (1.7) и (1.8), то можно положить

$$\bar{\mathbf{v}}^* = \Phi_1^2, \quad \mathbf{v}^* = \Phi_1^{2/q_*} \lambda_{J^*}^{-1/q_*} \|f\|_{q_*}. \quad (1.16)$$

с $\mathbf{v}^* = \|f\|_\infty$ в предположении, что плотность ограничена.

В предположениях замечания 1.2 первое неравенство в (1.13) получается применением неравенства Гёльдера к интегралу в равенстве $\mathbf{E} \psi_{jk}^2(X_\ell) = \int \psi_{jk}^2(x) f(x) dx$. Второе неравенство в (1.13) верно из-за того, что носители функций $\psi_{j(s+Kk)}^2$, $k \in \mathbf{Z}$, не имеют общих точек, а потому $\sum_k \psi_{j(s+Kk)}^2(X_\ell) \leq \Phi_1^2 \lambda_j^{-1}$.

З а м е ч а н и е 1.3. Величина μ_n из (1.15) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ не медленнее n^{-A} при любом выборе $A > 0$, если только $\gamma \delta_{J^*} \sqrt{n} \geq T \sqrt{\mathbf{v}^* \ln n}$ для достаточно большого T , $T \geq T_0(\gamma, \kappa, A)$.

Доказательство теоремы 1.1 завершается в разделе 4. В техническом отношении основу его составляют вычисления п. 3.1, основанные на рандомизации объема выборки с целью полнее использовать слабую зависимость между «далекими» коэффициентами $\tilde{b}_{jk}$ одного уровня решения $T \geq T_0(\gamma, \kappa)$ (более ранние примеры использования рандомизации со сходной целью можно найти в [15], [4]).

Вторая случайная составляющая невязки в разложении (1.6) представляется суммой одинаково распределенных независимых случайных векторов из пространства L^p и допускает показательную оценку, аналогичную классическому неравенству Бернштейна (доказательство ее приведено в п. 2.1). Ниже $\hat{f}_1(x)$ — случайный элемент, определенный формулой (1.6) с объемом выборки $n = 1$.

Теорема 1.2. Если $p \geq 2$, а число $\mathbf{V}_{\gamma\delta}$ выбрано так, что $\mathbf{E} \|\hat{f}_1\|_p^2 \leq \mathbf{V}_{\gamma\delta}$, то

$$\forall t > 0 \quad \mathbf{P} \left\{ \|\hat{f} - \mathbf{E} \hat{f}\|_p \geq (t + \tau_0) \left(\frac{\mathbf{V}_{\gamma\delta}}{n} \right)^{1/2} \right\} \leq 2 \exp \left\{ - \frac{1}{2} t^2 (1 + C_1^* K^{1/p} \Phi_1 t \rho_n)^{-1} \right\},$$

где $\rho_n = (\lambda_{J^*}^{(1-1/p)} \sqrt{n \mathbf{V}_{\gamma\delta}})^{-1}$, а положительные постоянные C_1^*, τ_0 зависят только от p (см. ниже (2.6) и (2.7)).

Для иллюстрации эффективности оценок теоремы 1.1 применим их в ситуациях, где известна оптимальная скорость сходимости пороговой ВОП.

Предположим, что неизвестная плотность распределения принадлежит классу Бесова $\tilde{B}(s, r, q)$, $s \in (m, m + 1]$, т.е. ее носитель содержится в интервале конечной длины $2L$ и

$$\|f\|_{s,r,q} = \|f\|_r + \|f^{(m)}\|_r + \left(\int_0^\infty t^{-(1+q(s-m))} \sup_{|h| \leq 1} \|\Delta_{ht}^2 f^{(m)}\|_r^q dt \right)^{1/q} \leq F_{s,r,q},$$

где $1 \leq r, q \leq \infty$, $m \in \mathbf{Z}_+$ и $sr > 1$, что гарантирует ограниченность плотности, а потому условие (1.8) выполнено с $q_* = \infty$.

(а) Если погрешность оценки измеряется L^2 -нормой невязки и $r = 2$, то удовлетворено неравенство $2 = r > 2/(2s + 1)$, и, тем самым, рассматривается регулярный случай (в терминологии [12, § 10.4]). Оптимальная скорость сходимости достигается для ВОП, у которых минимальный используемый уровень разрешения удовлетворяет условию $\lambda_{j_*}^{-1} \sim n^{1/(2s+1)}$, и имеет порядок $(\mathbf{E}\|\tilde{f} - f\|_2^2)^{1/2} \simeq n^{-s/(2s+1)}$. Мы будем сравнивать верхнюю оценку теоремы 1.1 для случая переменного порогового значения $\delta_j = D\sqrt{j/n}$, где $D > 0$ постоянно, с почти оптимальной верхней оценкой риска [12, теорема 10.4] для ВОП, использующей срезку с тем же пороговым значением:

$$(\mathbf{E}\|\tilde{f} - f\|_2^2)^{1/2} \leq C^* \mathbf{e}(n), \quad \mathbf{e}(n) = n^{-s/(2s+1)} (\ln n)^\beta, \quad \beta > 0.$$

Предположим, что $J^* - J_* \leq \alpha \log_2 n$, где число $\alpha > 0$ мало. В этом случае условия (1.13) выполняются с $\varkappa$, $\mathbf{v}^*$ и $\bar{\mathbf{v}}^*$, не зависящими от n . Условие (1.14) выполнено, поскольку $\lambda_{j_*}^{-1/2} \leq \lambda_{j_*}^{-1/2} n^\alpha$, а потому бесконечно мала последовательность $\delta_{j_*} \lambda_{j_*}^{-1/2} \leq C(1/(2s + 1) + \alpha)(\ln n)^{1/2} n^{-1/2+1/(2s+1)+\alpha}$. Выбирая достаточно большим параметр D , можно добиться, чтобы величина μ_n из (1.15) сходилась к нулю быстрее любой заданной отрицательной степени n при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим вероятность появления невязки с нормой больше $\varepsilon = \varepsilon(n) = t\mathbf{e}(n)$, т.е. почти того же порядка, что оптимальная скорость сходимости. При этом выборе масштаба невязки

$$\begin{aligned} \delta_{j_*} \varepsilon \lambda_{j_*}^{1/2-1/2} n (J^* - J_*)^{-1} &\sim C t n^{1-1/2-s/(2s+1)} (\log n)^{1/2+\beta-1} \\ &= C t n^{1/(4s+2)} (\ln n)^{\beta-1/2} \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

и $\mathbf{p}_\varepsilon(\varepsilon) \leq \frac{8}{3} \exp\{-C' t n^{1/(4s+2)} (\ln n)^{\beta-1/2}\}$, что указывает на пренебрежимость вклада составляющей $\|\tilde{f} - \hat{f}\|_2$ в погрешность рассматриваемой ВОП.

(б) Предположим теперь, что погрешность оценки плотности оценивается L^p -нормой в так называемом «разреженном» случае, когда

$1/s < r < p/(2s+1)$ и, с необходимостью, $p > 2$. Оптимальная скорость сходимости в этом случае есть [12, теоремы 10.3 и 10.4]

$$e(n) = (\mathbf{E}\|\tilde{f} - f\|_p^p)^{1/p} \simeq \left(\frac{1}{n} \ln n\right)^{\alpha_2}, \quad \alpha_2 = \frac{s - 1/r + 1/p}{2s + 1 - 2/r}.$$

Она отвечает выбору порогового значения срезки коэффициентов $\delta_j = D\sqrt{j/n} \sim D(n^{-1} \ln n)^{1/2}$ при крайних уровнях разрешения $\lambda_{j_*}^{-1} \sim (n(\ln n)^{p/r-1})^{\alpha_2/s}$ и $\lambda_{j_*}^{-1} \sim (n/\ln n)^{\alpha_2/s'}$, где $s' = s - 1/r + 1/p$.

Если выбранный масштаб погрешности ВОП задан равенством $\varepsilon = te(n)$, то при указанном выше выборе остальных параметров выполняется асимптотическое соотношение $\delta_{j_*} \hat{\varepsilon} n \sim Ct \ln n$ при $n \rightarrow \infty$, а оценка теоремы 1.1 ведет себя как

$$\mathbf{P}_\varepsilon \leq \nu_1 \exp\{-\nu_2 t \ln n\}, \quad \nu_1, \nu_2 > 0.$$

Как и выше, последовательность μ_n в (1.15) сходится к нулю быстрее любой отрицательной степени n , если D достаточно велико, причем условие (1.14) выполнено, поскольку $\delta_{j_*} \lambda_{j_*}^{-1/2} \sim (n^{-1} \ln n)^{(1-\alpha_2/s')/2}$ и $(1 - \alpha_2/s')/2 = (s - 1/r)/(2(s - 1/r) + 1) > 0$.

2. Разделение составляющих невязки

Мы пользуемся стандартными обозначениями уровней разрешения и соответствующих операторов проектирования в схеме кратномасштабного анализа, основанной на функциях (ϕ, ψ) , обозначая $H_{j_*}^{\gamma\delta}$ подпространство $L^2(\mathbf{R})$, которое содержит случайный элемент $\hat{f}$, определенный в (1.5):

$$\begin{aligned} V_J &= \mathcal{K}_J L^2(\mathbf{R}) = \left\{ h : h = \sum_k \eta_k^0 \phi_{J_*k} + \sum_{J_* < j \leq J} \sum_k \eta_{jk} \psi_{jk} \right\}, \quad J_* \leq J \leq J^*, \\ W_j &= (\mathcal{K}_j - \mathcal{K}_{j-1}) L^2(\mathbf{R}) = \left\{ h : h = \sum_k \eta_{jk} \psi_{jk} \right\}, \quad j > J_*, \\ H_{j_*}^{\gamma\delta} &= \mathcal{K}_{j_*}^{\gamma\delta} V_{J_*} = \left\{ h : h = \sum_{J_* < j \leq J^*} \sum_k \eta_{jk} 1\{|\beta_{jk}| > (1 + 2\gamma)\delta_j\} \psi_{jk} \right\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Величины β_{jk} в определении $H_{j_*}^{\gamma\delta}$ суть коэффициенты разложения (1.1) искомой плотности. Подпространство $H_{j_*}^{\gamma\delta}$ конечномерно; то же заключение верно в отношении V_{J_*} , если плотность f имеет компактный носитель.

2.1. Линейное приближение к пороговой ВОП. Условие (1.8) обеспечивает возможность представления плотности f кратномасштабным разложением (1.1). Пороговая ВОП (1.4) и случайный вектор $\hat{f}$

из (1.5) получаются проектированием из среднего

$$\bar{\xi} \equiv \frac{1}{n} (\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_k a_{J_*k} \phi_{J_*k} + \sum_{J_* < j \leq J^*} \sum_k b_{jk} \psi_{jk} \in V_{J^*}. \quad (2.2)$$

независимых одинаково распределенных случайных векторов

$$\xi_\ell = \xi(X_\ell) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \phi_{J_*k}(X_\ell) \phi_{J_*k} + \sum_{J_* < j \leq J^*} \sum_k \psi_{jk}(X_\ell) \psi_{jk} \in V_{J^*}. \quad (2.3)$$

Математическое ожидание этого последнего — проекция в $L^2(\mathbf{R})$ плотности f на подпространство V_{J^*} :

$$\mathbf{E}\bar{\xi} = \sum_k \alpha_{J_*k} \phi_{J_*k} + \sum_{J_* < j \leq J^*} \sum_k \beta_{jk} \psi_{jk} = \mathcal{K}_{J^*} f. \quad (2.4)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \xi_\ell^{(J_*)} &= (\phi_{jk}(X_\ell)), & \mathbf{E}\xi_\ell^{(J_*)} &= (\alpha_{jk} = \mathbf{E}\phi_{J_*k}(X_\ell)), \\ \xi_\ell^{(j)} &= (\psi_{jk}(X_\ell)), & \mathbf{E}\xi_\ell^{(j)} &= (\beta_{jk} \equiv \mathbf{E}\psi_{jk}(X_\ell)), \end{aligned} \quad (2.5)$$

последовательности коэффициентов, соответствующие проекциям векторов ξ_ℓ и $\mathbf{E}\xi_\ell$ на отдельные уровни разрешения. Все эти последовательности принадлежат $l^2(\mathbf{Z}) \cap l^p(\mathbf{Z})$, а случайные векторы $\xi_\ell^{(j)} \in l^p(\mathbf{Z})$, $j = J_*, \dots, J^*$, ограничены с вероятностью 1. Действительно, по условию (1.7) никакая точка из $\mathbf{R}$ не может принадлежать носителям более чем $2K - 1$ базисных функций одного уровня разрешения j , поэтому

$$\forall x \quad \sum_k |\phi_{J_*k}(x)|^p \leq 2K \Phi_1^p \lambda_{J_*}^{-p/2}, \quad \sum_k |\psi_{jk}(x)|^p \leq 2K \Phi_1^p \lambda_j^{-p/2}.$$

Следовательно, $|\xi_\ell^{(j)}|_p \leq (2K)^{1/p} \Phi_1 \lambda_j^{-1/2}$ и $\|(\mathcal{K}_j - \mathcal{K}_{j-1})\xi\|_p \leq c_2(2K)^{1/p} \Phi_1 \lambda_j^{-(1-1/p)}$ (см. (1.9)). В соединении с равенством $\lambda_{j+1}^{-1} = 2\lambda_j^{-1}$ приведенные оценки показывают, что

$$\begin{aligned} \|\xi_\ell\|_p &= \left\| \sum_k \phi_{J_*k}(X_\ell) \phi_{J_*k} + \sum_{J_* < j \leq J^*} \sum_k \psi_{jk}(X_\ell) \psi_{jk} \right\|_p \\ &\leq c_2(2K)^{1/p} \Phi_1 \left(\lambda_{J_*}^{-(1-1/p)} + \sum_{J_* < j \leq J^*} \lambda_j^{-(1-1/p)} \right) \leq \frac{1}{2} H, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $H = C_1^* K^{1/p} \Phi_1 \lambda_{J_*}^{-(1-1/p)}$, а константа $C_1^* = c_2 2^{1+1/p} (1 - 2^{-(1-1/p)})$ зависит лишь от p .

Мы будем сравнивать значения ВОП $\tilde{f}$, определенной в (1.4), со значениями $\hat{f} = \hat{f}_n$ из (1.5). Как $\tilde{f}$, так и $\hat{f}$ задаются конечными линейными комбинациями базисных всплесков и могут рассматриваться как случайные векторы в $L^p(\mathbf{R})$.

Случайный вектор $\hat{f}$ является проекцией выборочного среднего (2.2) на $V_{J_*} \oplus H_{J_*}^{\gamma^\delta}$, получающейся исключением компонент $\bar{\xi}$ с малыми математическими ожиданиями, а его математическое ожидание — соответствующая проекция плотности f . Во введенных выше обозначениях второе слагаемое правой части (1.6) есть $\hat{f} - \mathbf{E}\hat{f} = (\mathcal{K}_{J_*} + \mathcal{K}_{J_*}^{\gamma^\delta})(\bar{\xi} - \mathbf{E}\bar{\xi})$.

Известно [10], что при $p \in [2, \infty)$ банаховы пространства $\mathcal{X} = L^p, l^p$ принадлежат к типу $\mathcal{G}$. Именно, существует отображение $g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^*$ такое, что $\|g(x)\|_{p'} = \|x\|_p$, $p' = 1/(1 - 1/p)$, и $\langle x, g(x) \rangle = \|x\|_p^2$, $\|g(x) - g(y)\|_{p'} \leq G\|x - y\|_p$ для любых $x, y \in \mathcal{X}$. В банаховом пространстве типа $\mathcal{G}$

$$\mathbf{E}\|\xi_1 + \dots + \xi_n\|^2 \leq G \sum_{\ell=1}^n \mathbf{E}\|\xi_\ell\|^2, \quad (2.7)$$

если случайные векторы ξ_ℓ , $\ell = 1, \dots, n$, независимы и центрированы, $\mathbf{E}\xi_\ell = 0$. (При $\mathcal{X} = L^p, l^p$ константа выписывается явно: $G = 2p - 3$.)

Доказательство теоремы 1.2. Вследствие (2.7) справедливо неравенство $\mathbf{E}\|\hat{f} - \mathbf{E}\hat{f}\|_p \leq (\mathbf{E}\|\hat{f} - \mathbf{E}\hat{f}\|_p^2)^{1/2} \leq n^{-1}\tau_0 B$, где $\tau_0 = \sqrt{G}$ и $B^2 = n\mathbf{V}_{\gamma\delta}$. Поскольку $\|\xi_\ell - \mathbf{E}\xi_\ell\|_p \leq H$ в соответствии с (2.6), теорема следует из известного неравенства для сумм независимых векторов в банаховом пространстве [16, теорема 3.3.1].

2.2. Оценка невязки с использованием мягкой срезки. При оценке слагаемого $\|\tilde{f} - \hat{f}\|_p$ в (1.6) оказывается удобным использовать кратномасштабные разложения с коэффициентами, полученными применением «мягкой срезки»

$$|b_{jk} - \beta_{jk}|_{\gamma\delta_j} = \max\{|b_{jk} - \beta_{jk}| - \gamma\delta_j, 0\}, \quad (2.8)$$

где функция $|x|_\alpha = \max\{|x| - \alpha, 0\}$, $\alpha > 0$, выпукла. Следующая лемма представляет собой адаптацию предложения 10.3 книги [12]. Выкладки приведены для удобства читателя.

Лемма 2.1. Для любого $\gamma \in (0, \frac{1}{4})$ проекция разности $\tilde{f} - \hat{f}$ на отдельный уровень разрешения допускает оценку

$$\|(\mathcal{K}_j - \mathcal{K}_{j-1})(\tilde{f} - \hat{f})\|_p \leq c_2(\gamma^{-1}\mathbf{w}_j + (1 + 4\gamma)\mathbf{b}_j(\gamma, \delta_j))\lambda_j^{-(1/2-1/p)}, \quad (2.9)$$

где $\mathbf{w}_j = (\sum_k |b_{jk} - \beta_{jk}|_{\gamma\delta_j}^p)^{1/p}$, константа c_2 — та же, что в (1.9), а величина $\mathbf{b}_j(\gamma, \delta_j)$ определена в (1.11). Кроме того, для $\mathbf{W} = \sum_{J_* < j \leq J^*} \lambda_j^{-(1/2-1/p)}\mathbf{w}_j$ и $\mathbf{B}(\gamma, \delta)$ формулы (1.10) выполняется неравенство

$$\|\tilde{f} - \hat{f}\|_p \leq c_2\gamma^{-1}\mathbf{W} + c_2(1 + 4\gamma)\mathbf{B}(\gamma, \delta). \quad (2.10)$$

Доказательство. Определим множество $K_j^\gamma = \{k: |\beta_{jk}| < (1 + 2\gamma)\delta_j\}$ и обозначим $\Delta_{jk} = \tilde{b}_{jk} - b_{jk}1_{\{|\beta_{jk}| \geq (1+2\gamma)\delta_j\}}$ отдельную координату кратномасштабного разложения вектора $\mathcal{K}_j(\tilde{f} - \hat{f})$. Легко видеть, что $|\Delta_{jk}| = |b_{jk}|1_{\{|b_{jk}| \geq \delta_j\}}$, если $k \in K_j^\gamma$, и $|\Delta_{jk}| = |b_{jk}|1_{\{|b_{jk}| < \delta_j\}}$, если $k \notin K_j^\gamma$, так что вследствие (1.9)

$$\|(\mathcal{K}_j - \mathcal{K}_{j-1})(\tilde{f} - \hat{f})\|_p \leq c_2\lambda_j^{-(1/2-1/p)}(S_1 + S_2)^{1/p},$$

где $S_1 = \sum_{k \in K_j^\gamma} |b_{jk}|^p 1_{\{|b_{jk}| \geq \delta_j\}}$ и $S_2 = \sum_{k \notin K_j^\gamma} |b_{jk}|^p 1_{\{|b_{jk}| < \delta_j\}}$.

Чтобы облегчить выкладки, воспользуемся на время сокращениями $b = b_{jk}$, $\beta = \beta_{jk}$ и $\gamma\delta = \gamma\delta_j$.

Рассмотрим сначала одно слагаемое суммы S_1 , для которого выполняются неравенства $|b| > \delta$ и $|\beta| \leq (1 + 2\gamma)\delta$.

Если $|b - \beta| < 2\gamma\delta$, то $|b| \leq |\beta| + 2\gamma\delta \leq |\beta| + 2\gamma|b|$, поэтому $|b| \leq (1 - 2\gamma)^{-1}|\beta| \leq (1 + 4\gamma)|\beta|$.

Если $|b - \beta| \geq 2\gamma\delta$, то $|b| \leq |\beta| + |b - \beta| \leq |\beta| + 2|b - \beta|_{\gamma\delta}$, поскольку $|b - \beta| \leq \gamma\delta + |b - \beta|_{\gamma\delta}$.

Результатом приведенного рассуждения оказывается оценка $|\Delta_{jk}| \leq (1 + 4\gamma)|\beta_{jk}| + 2|b_{jk} - \beta_{jk}|_{\gamma\delta_j}$ для $k \in K_j^\gamma$.

Для слагаемых S_2 ограничения на b и β суть $|b| \leq \delta$ и $|\beta| \geq (1 + 2\gamma)\delta$. В этом случае $|b - \beta| \geq 2\gamma\delta \geq 2\gamma|b|$, а потому

$$|\Delta_{jk}| \leq \frac{1}{2\gamma} |b_{jk} - \beta_{jk}| 1_{\{|b_{jk} - \beta_{jk}| \geq 2\gamma\delta_j\}} \leq \frac{1}{\gamma} |b_{jk} - \beta_{jk}|_{\gamma\delta}, \quad k \notin K_j^\gamma.$$

Используя то обстоятельство, что $S_1^{1/p}$ и $S_2^{1/p}$ являются l^p -нормами подпоследовательностей координат вектора из $l^p(\mathbf{Z})$, занумерованных числами из непересекающихся подмножеств $\mathbf{Z}$, мы можем сделать заключение о справедливости неравенства

$$(S_1 + S_2)^{1/p} \leq \max \left\{ 2, \frac{1}{\gamma} \right\} \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} |b_{jk} - \beta_{jk}|_{\gamma\delta_j}^p \right)^{1/p} + (1 + 4\gamma) \left(\sum_{k \in K_j^\gamma} |\beta_{jk}|^p \right)^{1/p},$$

которое влечет первую из оценок леммы. Оценка (2.10) получается применением неравенства треугольника в пространстве l^p .

3. Производящие функции

3.1. Рандомизация объема выборки. Целью этого пункта является вывод оценок для производящей функции случайной величины $\mathbf{w}_j$ из (2.9). Для гауссовского случайного вектора с тем же ковариационным оператором, что ξ_1 , все координаты кратномасштабного разложения слабо коррелированы и, следовательно, почти независимы. Выборочные средние $a_{J_*k} = \overline{\phi_{J_*k}(X)}$ и $b_{jk} = \overline{\psi_{jk}(X)}$ обладают сходными свойствами. Для использования того, что они почти независимы, удобно применить рандомизацию объема выборки (этот подход использовался, например, при исследовании асимптотического поведения ядерных оценок функции регрессии [4] и плотности [15] двумерных распределений).

Рассмотрим бесконечную последовательность $(X_\ell, \ell \in \mathbf{N})$ независимых одинаково распределенных наблюдений с плотностью распределения f из (1.1) и целочисленную случайную величину

$$N: \Omega \rightarrow \mathbf{Z}_+, \quad (3.1)$$

распределенную по закону Пуассона со средним $\mathbf{E}N = n$ и независимую от $(X_\ell, \ell \in \mathbf{N})$. Известно (см. [13, § 1.2] или [3, § 1.5]), что случайная мера, заданная на борелевских множествах равенством

$$\nu(B) = \sum_{0 < \ell \leq N} 1\{X_\ell \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}),$$

определяет в $\mathbf{R}$ пуассоновский точечный процесс с мерой интенсивности $\mu(B) = n \int_B f(x) dx$. Для ограниченной измеримой функции $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, обладающей компактным носителем, значения характеристического функционала и функционала Лапласа точечного процесса ν выражаются формулой (где, соответственно, $z = i$ или $z = 1$)

$$\begin{aligned} \Phi(zg) &= \mathbf{E} \exp \{z \langle g, \nu \rangle\} = \exp \left\{ n \int (e^{zg(x)} - 1) f(x) dx \right\}, \\ \langle g, \nu \rangle &= \int g(x) d\nu(x) = \sum_{0 < \ell \leq N} g(X_\ell). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из (3.2) немедленно следует, что случайные величины $\langle g_k, \nu \rangle$, $k = 1, \dots, m$, независимы, если носители функций $g_\ell: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ не пересекаются, — действительно, в этом случае

$$\mathbf{E} \exp \left\{ i \sum_{k=1}^m \tau_k \langle g_k, \nu \rangle \right\} = \prod_{k=1}^m \mathbf{E} \exp \{ i \tau_k \langle g_k, \nu \rangle \},$$

поскольку $\exp \{ i \sum_{k=1}^m \tau_k g_k(x) \} - 1 = \sum_{k=1}^m (\exp \{ i \tau_k g_k(x) \} - 1)$.

Воспользуемся обозначениями (3.2), чтобы определить

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{j,s}^p &= \sum_k \left| \frac{1}{n} \langle \psi_{j(s+Kk)}, \nu \rangle - \beta_{j(s+Kk)} \right|_{\gamma_{\delta_j}}^p, \\ \mathbf{u}_j^p &= \sum_k \left| \frac{1}{n} \langle \psi_{jk}, \nu \rangle - \beta_{jk} \right|_{\gamma_{\delta_j}}^p. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Лемма 3.1. При всяком $h > 0$ суммы в формулах (2.9.) (2.10) удовлетворяют неравенству

$$\mathbf{E} \exp \{ h \mathbf{W} \} \leq \frac{8}{3} \exp \left\{ \frac{2h}{\sqrt{n}} \mathbf{B}^+ \right\} \max_{J_* < j \leq J_*} \mathbf{E} \exp \{ \hat{h} \mathbf{u}_j \}, \quad (3.4)$$

где $\hat{h} = h \lambda_{J_*}^{-(1/2-1/p)} \chi(p)$, а величина $\chi(p)$ та же, что в теореме 1.1. Кроме того,

$$\mathbf{E} \exp \{ \hat{h} \mathbf{u}_j \} \leq \max_{0 \leq s < K} \mathbf{E} \exp \{ \hat{h} K^{1/p} \mathbf{u}_{j,s} \}. \quad (3.5)$$

З а м е ч а н и е 3.1. Заметим, что в (3.3) случайные величины $n^{-1} \langle \psi_{j(s+Kk)}, \nu \rangle - \beta_{j(s+Kk)}$, $k \in \mathbf{Z}$, независимы, поскольку носители функций $\psi_{j(s+Kk)}$ не имеют общих точек.

Доказательство леммы 3.1. Определим для $j \in \mathbf{N} \cap (J_*, J^*]$ и $k \in \mathbf{Z}$ последовательность

$$Z_{0,jk} = 0, \quad Z_{t,jk} = Z_{t-1,jk} + (\psi_{jk}(X_t) - \beta_{jk}), \quad t = 1, 2, \dots$$

Для каждой пары (j, k) последовательность $Z_{t,jk}$, $t \in \mathbf{Z}_+$, является мартингалом по отношению к потоку σ -алгебр $\mathcal{F}_t = \sigma(X_\ell, \ell \leq t)$ вследствие независимости X_ℓ . Функция $|n^{-1}x|_{\gamma\delta_j}$ выпукла, а потому для каждой пары (j, k) последовательность $t \mapsto |n^{-1}Z_{t,jk}|_{\gamma\delta_j}$ образует субмартингал. Последовательности (ниже $t = 0, 1, 2 \dots$)

$$\mathbf{Z}(t) = \sum_{J_* < j \leq J^*} \lambda_j^{1/2-1/p} \left(\sum_k \left| \frac{1}{n} Z_{t,jk} \right|_{\gamma\delta_j}^p \right)^{1/p}, \quad \exp\{h\mathbf{Z}(t)\} \quad (3.6)$$

также являются субмартингалами благодаря выпуклости нормы l^p и показательной функции.

По построению $|n^{-1}Z_{n,jk}|_{\gamma\delta_j} = |b_{jk} - \beta_{jk}|_{\gamma\delta_j}$ и $\mathbf{Z}(n) = \mathbf{W}$, а потому

$$\mathbf{E} \exp\{h\mathbf{W}\} \leq \mathbf{E} \exp\{h\mathbf{Z}(t)\}, \quad t \geq n.$$

Для выборки случайного объема (3.1) из независимости N и $(X_\ell, \ell \in \mathbf{N})$ следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp\{h\mathbf{W}\} &= \mathbf{E} \exp\{h\mathbf{Z}(n)\} \leq \sum_{n \leq t \leq n+2\sqrt{n}} \mathbf{E} \exp\{h\mathbf{Z}(t)\} \frac{\mathbf{P}\{N=t\}}{\mathbf{p}} \\ &\leq \frac{8}{3} \mathbf{E} \exp\{h\mathbf{Z}(N)\} 1\{0 \leq N-n \leq 2\sqrt{n}\}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{p} = \mathbf{P}\{n \leq N \leq n+2\sqrt{n}\} \geq \frac{3}{8}$. Оценка для $\mathbf{p}$ вытекает из неравенства Чебышёва в форме $\mathbf{P}\{|N - \mathbf{E}N| \leq 2\sqrt{n}\} \geq \frac{3}{4}$. Действительно,

$$\mathbf{p} \geq 1 - \mathbf{P}\{|N - \mathbf{E}N| > 2\sqrt{n}\} - \mathbf{q} \geq \frac{3}{4} - \mathbf{q},$$

где $\mathbf{q} = \sum_{k=1}^M \mathbf{P}\{N = n-k\}$ и $M = [2\sqrt{n}]$. Отсюда можно заключить, что $2\mathbf{p} \geq \frac{3}{4}$, поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \sum_{k=1}^M \frac{n^{n-k} e^{-n}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{n^{n+k} e^{-n}}{(n+k)!} \frac{(n+k)! n^{-(2k+1)}}{(n-k-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \frac{n^{n+k} e^{-n}}{(n+k)!} \prod_{\ell=1}^k \left(1 - \frac{\ell^2}{n^2} \right) \leq \mathbf{p} = \sum_{k=0}^M \frac{n^{n+k} e^{-n}}{(n+k)!}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $|a+b|_t \leq |a|_t + |b|_t$, $a, b \in \mathbf{R}$, $t > 0$, для мягкой срезки (2.8). Пользуясь обозначениями (3.2), можно представить коэффициенты многоуровневого разложения (3.6) при $t = N$ в виде

$$\left| \frac{1}{n} Z_{N,jk} \right|_{\gamma\delta_j} = \left| \frac{1}{n} \langle \psi_{jk}, \nu \rangle - \frac{N}{n} \beta_{jk} \right|_{\gamma\delta_j} \leq \left| \frac{1}{n} \langle \psi_{jk}, \nu \rangle - \beta_{jk} \right|_{\gamma\delta_j} + \left| \frac{N-n}{n} \beta_{jk} \right|.$$

Из (1.12) и неравенства треугольника в l^p следует, что при $n \leq N \leq n + 2\sqrt{n}$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(N) &= \sum_{J_* < j \leq J^*} \lambda_j^{-(1/2-1/p)} \left(\sum_k \left| \frac{1}{n} \langle \psi_{jk}, \nu \rangle - \frac{N}{n} \beta_{jk} \right|_{\gamma\delta_j}^p \right)^{1/p} \\ &\leq \sum_{J_* < j \leq J^*} \lambda_j^{-(1/2-1/p)} \left(\mathbf{u}_j + \frac{N-n}{n} \mathbf{b}_j^+ \right) \\ &\leq \sum_{J_* < j \leq J^*} \lambda_j^{-(1/2-1/p)} \left(\mathbf{u}_j + \frac{2}{\sqrt{n}} \mathbf{b}_j^+ \right). \end{aligned}$$

Мы заключаем отсюда, что при $h > 0$ и $\mathbf{U} = \sum_{J_* < j \leq J^*} \lambda_j^{-(1/2-1/p)} \mathbf{u}_j$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp\{h\mathbf{W}\} &\leq \frac{8}{3} \mathbf{E} \exp\{h\mathbf{Z}(N)\} 1\{0 \leq N-n \leq 2\sqrt{n}\} \\ &\leq \frac{8}{3} \exp\left\{\frac{2h}{\sqrt{n}} \mathbf{B}^+\right\} \mathbf{E} \exp\{h\mathbf{U}\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Чтобы закончить доказательство (3.4), представим величину $\mathbf{U}$ в правой части (3.7) в виде

$$\mathbf{U} = \lambda_{J^*}^{-(1/2-1/p)} \chi(p) \sum_{J_* < j \leq J^*} \alpha_j \mathbf{u}_j, \quad \sum_{J_* < j \leq J^*} \alpha_j = 1,$$

с $\alpha_j = (\lambda_{J^*}/\lambda_j)^{1/2-1/p}/\chi(p) = 2^{-(1/2-1/p)(J^*-j)}/\chi(p)$ и воспользуемся выпуклостью показательной функции, чтобы прийти к неравенству

$$\mathbf{E} \exp\left\{h \sum_{J_* < j \leq J^*} \lambda_j^{-(1/2-1/p)} \mathbf{u}_j\right\} \leq \sum_{J_* < j \leq J^*} \alpha_j \mathbf{E} \exp\{\widehat{h} \mathbf{u}_j\}.$$

Неравенство (3.5) следует из выпуклости функции $\exp\{\widehat{h}|\mathbf{x}|_p\}$, $\mathbf{x} \in l^p$:

$$\mathbf{E} \exp\{\widehat{h} \mathbf{u}_j\} = \mathbf{E} \exp\left\{\widehat{h} K^{1/p} \left(\frac{1}{K} \sum_{s=0}^{K-1} \mathbf{u}_{j,s}^p\right)^{1/p}\right\} \leq \frac{1}{K} \sum_{s=0}^{K-1} \mathbf{E} \exp\{\widehat{h} K^{1/p} \mathbf{u}_{j,s}\}.$$

3.2. Производящие функции «редких» сумм. Мы выведем сначала оценку для производящей функции отдельной координаты разложения (3.3) из формулы (3.2), описывающей функционал Лапласа для пуассоновского точечного процесса ν .

Лемма 3.2. Если выполнены условия (1.7), то при $h > 0$

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \exp\left\{h \left| \frac{1}{n} \langle \psi_{jk}, \nu \rangle - \beta_{jk} \right|_{\gamma\delta_j} \right\} \\ &\leq 1 + \frac{2h \mathbf{v}_{jk} \mathcal{E}_j^2(h)}{\gamma\delta_j n} \exp\left\{-h\gamma\delta_j + \frac{h^2}{n} \left(1 + \frac{1}{2} \mathcal{E}_j(h)\right) \mathbf{v}_{jk}\right\}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{E}_j(h) = \exp\{\Phi_1 h \lambda_j^{-1/2} n^{-1}\}$ и $\mathbf{v}_{jk} = \int_{\mathbf{R}} \psi_{jk}^2(x) f(x) dx$.

Заметим, что $\mathcal{E}_j(h) \leq \mathcal{E}_{J^*}(h)$, если $j \leq J^*$. Оценка производящей функции моментов «редкой» суммы $\mathbf{u}_{j,s}$ приведена в следующей лемме.

Лемма 3.3. В обозначениях леммы 3.1 и леммы 3.2

$$\mathbf{E} \exp\{h \mathbf{u}_{j,s}\} \leq \exp \left\{ \frac{2h \bar{\mathbf{v}}_j \mathcal{E}_j^2(h)}{\gamma \delta_j n \lambda_j} \exp \left\{ -h \gamma \delta_j + \frac{h^2}{n} \left(1 + \frac{1}{2} \mathcal{E}_j(h) \right) \mathbf{v}_j^* \right\} \right\},$$

если $\max_{\ell} \mathbf{v}_{j\ell} \leq \mathbf{v}_j^*$ и $\lambda_j \max_s \sum_k \mathbf{v}_{j(s+Kk)} \leq \bar{\mathbf{v}}_j$ (см. (1.13)).

Доказательство леммы 3.3. Применим грубую верхнюю оценку $|\eta|_p \leq |\eta|_1$ в форме

$$\mathbf{u}_{j,s} \leq \sum_k \left| \frac{1}{n} \langle \psi_{j(s+Kk)}, \nu \rangle - \beta_{j(s+Kk)} \right|_{\gamma \delta_j}$$

и воспользуемся независимостью слагаемых в правой части (см. замечание 3.1), чтобы прийти к неравенству

$$\mathbf{E} \exp\{h \mathbf{u}_{j,s}\} \leq \prod_k \mathbf{E} \exp \left\{ h \left| \frac{1}{n} \langle \psi_{j(s+Kk)}, \nu \rangle - \beta_{j(s+Kk)} \right|_{\gamma \delta_j} \right\}, \quad (3.8)$$

справедливому при всяком s и $h > 0$. Неравенство леммы вытекает теперь из оценки леммы 3.2 и неравенства $1 + x \leq e^x$.

Доказательство леммы 3.2. Ниже мы пользуемся сокращениями $\psi = \psi_{jk}$, $\zeta = n^{-1} \langle \psi_{jk}, \nu \rangle - \beta_{jk}$, $\delta = \delta_j$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{jk}$ и $A_+ = \{|\zeta| > \gamma \delta_j\}$. Легко видеть, что при $h \geq 0$

$$|\exp\{h|\zeta|_{\gamma \delta}\} - 1| \leq e^{-h\gamma \delta} 1_{A_+} |\exp\{h|\zeta|\} - 1| \leq e^{-h\gamma \delta} \frac{|\zeta|}{\gamma \delta} |\exp\{h|\zeta|\} - 1|.$$

Соединяя приведенное выше неравенство с оценками $|e^x - 1| \leq |x|e^{|x|}$ и $\exp\{|x|\} \leq 2 \operatorname{ch} x$, заключаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp\{h|\zeta|_{\gamma \delta}\} &\leq 1 + \frac{he^{-h\gamma \delta}}{\gamma \delta} \mathbf{E} \zeta^2 \exp\{h|\zeta|\} \leq 1 + \frac{2he^{-h\gamma \delta}}{\gamma \delta} \mathbf{E} \zeta^2 \operatorname{ch}\{h\zeta\} \\ &= 1 + \frac{2he^{-h\gamma \delta}}{\gamma \delta} \frac{d^2}{dh^2} \mathbf{E} \operatorname{ch}\{h\zeta\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Производящую функцию в правой части (3.9) можно выразить явно с помощью формулы (3.2) и равенства $\beta_{jk} = \mathbf{E} \langle \psi_{jk}, \nu \rangle = \int \psi(x) f(x) dx$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \operatorname{ch}\{h\zeta\} &= \frac{1}{2} (\mathbf{E} \exp\{h\zeta\} + \mathbf{E} \exp\{-h\zeta\}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\exp \left\{ n \Psi \left(\frac{1}{n} h \right) \right\} + \exp \left\{ n \Psi \left(-\frac{1}{n} h \right) \right\} \right), \end{aligned}$$

где $\Psi(\tau) = \int (\exp\{\tau \psi(x)\} - 1 - \tau \psi(x)) f(x) dx$.

Формула Тейлора для показательной функции и неравенство $|\psi(x)| \leq \psi = \Phi_1 \lambda_j^{-1/2}$, являющееся следствием (1.2) и (1.7), доставляют для Ψ и ее производных следующие оценки:

$$\begin{aligned} |\Psi(\pm \tau)| &\leq \frac{1}{2} \tau^2 \int e^{\tau |\psi(x)|} \psi^2(x) f(x) dx \leq \frac{1}{2} \tau^2 e^{\tau \psi} \mathbf{v}, \\ |\Psi'(\pm \tau)| &= \left| \pm \int \psi (e^{\pm \tau \psi(x)} - 1) f(x) dx \right| \leq \tau e^{\tau \psi} \mathbf{v}, \\ |\Psi''(\pm \tau)| &= \left| \int \psi^2 e^{\pm \tau \psi(x)} f(x) dx \right| \leq e^{\tau \psi} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Из явного выражения производной в (3.9) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dh^2} \mathbf{E} \operatorname{ch}\{h\zeta\} &\leq \max_{\tau=\pm h/n} \left\{ e^{n\Psi(\tau)} \left(\frac{1}{n} \Psi''(\tau) + (\Psi'(\tau))^2 \right) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ \frac{1}{2n} h^2 e^{\psi h/n} \mathbf{v} \right\} (e^{\psi h/n})^2 \frac{1}{n} \mathbf{v} \left(1 + \frac{1}{n} h^2 \mathbf{v} \right). \end{aligned}$$

Чтобы придти к неравенству леммы, остается соединить неравенство $1 + n^{-1}h^2\mathbf{v} \leq \exp\{n^{-1}h^2\mathbf{v}\}$ с вышеприведенными оценками.

4. Доказательство теоремы 1.1

По неравенству (2.10) леммы 2.1 и показательному неравенству Маркова при $h > 0$

$$\mathbf{p}_\varepsilon \leq \mathbf{P} \left\{ \mathbf{W} \geq \gamma\varepsilon + \frac{2}{\sqrt{n}} \mathbf{B}^+ \right\} \leq \exp \left\{ -h \left(\frac{2}{\sqrt{n}} \mathbf{B}^+ + \gamma\varepsilon \right) \right\} \mathbf{E} \exp\{h\mathbf{W}\}.$$

Лемма 3.1 приводит эту оценку к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_\varepsilon &\leq \frac{8}{3} \exp\{-h\gamma\varepsilon\} \max_j \mathbf{E} \exp\{\widehat{h}\mathbf{u}_j\} \\ &\leq \frac{8}{3} \exp\{-h\gamma\varepsilon\} \max_j \max_s \mathbf{E} \exp\{K^{1/p} \widehat{h} \mathbf{u}_{j,s}\}, \end{aligned}$$

где $\widehat{h} = h\lambda_{J^*}^{-(1/2-1/p)}\chi(p)$.

Заменим теперь h на $H = K^{1/p}\widehat{h}$, а ε на $\widehat{\varepsilon} = \gamma\varepsilon\lambda_{J^*}^{(1/2-1/p)}(K^{1/p}\chi(p))^{-1}$. Используя лемму 3.3 и условие (1.13), приходим к оценке

$$\mathbf{p}_\varepsilon \leq \frac{8}{3} \max_{J^* < j \leq J^*} \exp\{-H\widehat{\varepsilon}\} \exp \left\{ \frac{2H\overline{\mathbf{v}}^* \mathcal{E}_j^2(H)}{\kappa\gamma\delta_{J^*} n \lambda_{J^*}} \exp\{U_j(H)\} \right\},$$

где $\mathcal{E}_j(H) = \exp\{\Phi_1 H \lambda_j^{-1/2} n^{-1}\} \leq \mathcal{E}_{J^*}(H)$ и по условию (1.13)

$$\begin{aligned} U_j(H) &= -H\gamma\delta_j + \frac{1}{n} H^2 \left(1 + \frac{1}{2} \mathcal{E}_j(H) \right) \mathbf{v}^* \\ &\leq H \left(-\kappa\gamma\delta_{J^*} + \frac{1}{n} H \left(1 + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{J^*}(H) \right) \mathbf{v}^* \right). \end{aligned}$$

Остается выбрать подходящее значение параметра H , с тем чтобы удовлетворить сначала неравенству $\mathcal{E}_{J^*}(H) \leq 2$. Выбор, который используется ниже, есть $H = (4\mathbf{v}^*)^{-1} \kappa\gamma\delta_{J^*} n$. При условии (1.14) он гарантирует выполнение неравенств $\mathcal{E}_{J^*}(H) \leq 2$ и

$$U_j(H) \leq H \left(-\kappa\gamma\delta_{J^*} + \frac{2\mathbf{v}^*}{n} H \right) = -\frac{(\kappa\gamma\delta_{J^*} \sqrt{n})^2}{8\mathbf{v}^*}.$$

Эти последние приводят к оценке теоремы:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\leq \frac{8}{3} \exp\{-H\widehat{\varepsilon}\} \exp \left\{ \frac{8H\overline{\mathbf{v}}^*}{\kappa\gamma\delta_{J^*} n \lambda_{J^*}} \exp \left\{ -\frac{(\kappa\gamma\delta_{J^*} \sqrt{n})^2}{8\mathbf{v}^*} \right\} \right\} \\ &= \frac{8}{3} \exp \left\{ -\frac{\kappa\gamma\delta_{J^*} n \varepsilon \lambda_{J^*}^{(1/2-1/p)}}{4K^{1/p} \chi(p) \mathbf{v}^*} \left(1 - \frac{8K^{1/p} \chi(p) \overline{\mathbf{v}}^*}{\varepsilon \lambda_{J^*}^{3/2-1/p} \sqrt{n}} \mu_n \right) \right\}. \end{aligned}$$

Авторы искренне признательны рецензенту за тщательное чтение рукописи и в особенности за указание примеров использования рандомизации объема выборки в работах [4], [15] и кандидатской диссертации В. В. Статулявичюса (Вильнюс, 1986).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернштейн С. Н. Теория вероятностей. М.—Л.: Гостехиздат, 1946, 556 с.⁵⁾
2. Леврой Л., Дьёрфи Л. Непараметрическое оценивание плотности. L_1 -подход. М.: Мир, 1988, 407 с.
3. Керстан Й., Маттес К., Мекке Й. Безгранично делимые точечные процессы. М.: Наука, 1982, 391 с.
4. Надабая Э. А. Предельное распределение квадратического уклонения непараметрических оценок функции регрессии. — Сообщ. АН ГССР, 1974, т. 74, № 1, с. 33–36.
5. Новиков И. Я., Стечкин С. Б. Основы теории всплесков. — Успехи матем. наук, 1998, т. 53, № 6, с. 53–128.
6. Ченцов Н. Н. Оценка неизвестной плотности распределения по наблюдениям. — Докл. АН СССР, 1962, т. 147, № 1, с. 45–48.
7. Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992, 357 p.
8. Donoho D. L., Johnstone I. M., Kerkyacharian G., Picard D. Density estimation by wavelet thresholding. — Ann. Statist., 1996, v. 24, № 2, p. 508–539.
9. Fan J., Hall P., Martin M., Patil P. Adaptation to high spatial inhomogeneity using wavelet methods. — Statist. Sinica, 1999, v. 9, № 1, p. 85–102.
10. Fortet R., Mourier E. Les fonctions aléatoires comme éléments aléatoires dans les espaces de Banach. — Studia Math., 1955, v. 15, № 1, p. 62–79.
11. Hall P., McKay I., Turlach B. A. Performance of wavelet methods for functions with many discontinuities. — Ann. Statist., 1996, v. 24, № 6, p. 2462–2476.
12. Härdle W., Kerkyacharian G., Picard D., Tsybakov A. Wavelets, Approximation, and Statistical Applications. New York: Springer-Verlag, 1998, 265 p. (Lecture Notes in Statist., v. 129.)
13. Karr A. F. Point Processes and Their Statistical Inference. New York: Dekker, 1986, 490 p. (Probab. Pure Appl., v. 2.)
14. Meyer Y. Ondelettes et Opérateurs. V. I–III. Paris: Hermann, 1990–1991, 538 p.
15. Rosenblatt M. A quadratic measure of deviation of two-dimensional density estimates and a test of independence. — Ann. Statist., 1975, v. 3, № 1, p. 1–14.
16. Yurinsky V. Sums and Gaussian Vectors. Berlin: Springer-Verlag, 1995, 305 p. (Lecture Notes in Math., v. 1617.)

Поступила в редакцию
5.IX.2005

⁵⁾ См. также воспроизведение исходной публикации: Бернштейн С. Н. Об одном видоизменении неравенства Чебышёва и о погрешности формулы Лапласа. — Собр. соч., т. 4. М.: Наука, 1964, с. 71–79.