Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Енгибарян, Уравнение восстановления в многомерном пространстве, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 4, 779–785

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp193>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:09:08

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 2004 г.

ЕНГИВАРЯН Н. Б.*

УРАВНЕНИЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ
В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается уравнение восстановления в многомерном пространстве (УВМП)

$$f(x) = g(x) + \int_{\mathbf{R}^n} K(x-t) f(t) dt,$$

где K — плотность распределения в $\mathbf{R}^n$. При $g \in L_1(\mathbf{R}^n)$ и предположении о конечности ненулевого вектора — первого момента K доказаны существование и единственность решения УВМП в специальном классе функций. Построена плотность восстановления, изучены ее свойства. Результатам дана вероятностная интерпретация на примере одной задачи случайного блуждания в $\mathbf{R}^n$.

Ключевые слова и фразы: восстановление, многомерное пространство, разрешимость, коллективное движение.

1. Введение. Рассмотрим следующее интегральное уравнение свертки в n -мерном пространстве $\mathbf{R}^n$:

$$f(x) = g(x) + \int_{\mathbf{R}^n} K(x-t) f(t) dt. \quad (1.1)$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n)$ — точки в $\mathbf{R}^n$; $dx = dx_1 \cdots dx_n$ — элемент объема (мера Лебега); g и f — заданная и искомая функции в $\mathbf{R}^n$. Ядро K удовлетворяет следующим условиям критичности:

$$0 \leq K \in L_1(\mathbf{R}^n), \quad \int_{\mathbf{R}^n} K(x) dx = 1, \quad (1.2)$$

т.е. K является плотностью распределения в $\mathbf{R}^n$.

При $n > 1$ уравнение (1.1) с условием (1.2) является уравнением восстановления в многомерном пространстве (УВМП). Оно представляет интерес в теории вероятностей и в математической физике. В теории вероятностей это уравнение связано с задачами о предельном поведении суммы одинаково распределенных независимых случайных векторов (см. [1]–[3]). Если $n = 1$, то (1.1) представляет собой уравнение восстановления (УВ) на всей прямой (см. [1]–[5]).

Вопросы существования решения УВМП не поддаются адекватному изучению методами гармонического анализа. Эти методы более действенны в вопросах единственности. В настоящей работе, с помощью результатов работы автора [5] по УВ на всей прямой, простыми средствами будут получены результаты по разрешимости и свойствам решений уравнения (1.1), (1.2). Вводится специальный класс функций, в котором устанавливается существование и единственность решения УВМП при $g \in L_1(\mathbf{R}^n)$ и наличии конечного первого момента у K . В разделе 6 этим результатам дается простая вероятностная интерпретация на примере одного стохастического процесса.

* Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В. А. Амбарцумяна Национальной академии наук Армении, 378433 Бюракан, Армения; e-mail: yengib@bao.sci.am

2. Предварительные замечания.

2.1. Обозначения. Обозначим через $L_{loc}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{n-1})$ линейное топологическое пространство функций на $\mathbf{R}^n$, интегрируемых на $[a, b] \times \mathbf{R}^{n-1}$ для произвольного конечного промежутка $[a, b]$. Введем банахово пространство $L_{\infty,1}(\mathbf{R}^n)$ функций на $\mathbf{R}^n$ с конечной нормой

$$\|f\| = \operatorname{ess\,sup}_{x_1} \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |f(x_1, x_2, \dots, x_n)| dx_2 \cdots dx_n.$$

Обозначим через $ML \subset L_{loc}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{n-1})$ класс функций в $\mathbf{R}^n$, обладающих свойством

$$h(x_1) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |f(x_1, x_2, \dots, x_n)| dx_2 \cdots dx_n = h_0(x_1) + h_1(x_1),$$

где $h_0 \in M(\mathbf{R}) \equiv L_{\infty}(\mathbf{R})$, $h_1 \in L_1(\mathbf{R})$. Имеем $L_{\infty,1}(\mathbf{R}^n) \subset ML$.

2.2. Оператор К. О необратимости $I - K$. Перепишем уравнение (1.1) в операторном виде:

$$(I - K)f = g, \quad (2.1)$$

где I — единичный оператор, а K — интегральный оператор:

$$(Kf)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} K(x-t) f(t) dt.$$

Оператор K действует в банаховых пространствах $L_p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, причем в любом из этих пространств $\|K\| = 1$. Нетрудно показать, что аналогичный факт имеет место в случае банаховых пространств $L_{\infty,1}(\mathbf{R}^n)$. Оператор K переводит класс ML в себя.

Пусть в условиях (1.2) уравнение (1.1) обладает решением $f \in L_1(\mathbf{R}^n)$. Интегрируя (1.1) по x в $\mathbf{R}^n$, получаем равенство

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbf{R}^n} g(x) dx + \int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx.$$

Отсюда приходим к следующему необходимому условию разрешимости (1.1) в $L_1(\mathbf{R}^n)$:

$$\int_{\mathbf{R}^n} g(x) dx = 0,$$

поэтому оператор $I - K$ необратим справа в пространстве $L_1(\mathbf{R}^n)$. Из этого условия, в частности, следует, что в случае неотрицательной ненулевой функции g уравнение (1.1), (1.2) не имеет решений в $L_1(\mathbf{R}^n)$.

Заметим, что однородное уравнение

$$\varphi(x) = \int_{\mathbf{R}^n} K(x-t) \varphi(t) dt \quad (2.2)$$

обладает очевидными решениями $\varphi(x) = c = \operatorname{const}$.

3. Вопросы единственности.

3.1. О нулях символа оператора $I - K$. Введем преобразование Фурье ядра K :

$$\bar{K}(s) = \int_{\mathbf{R}^n} K(x) \exp(isx) dx, \quad s \in \mathbf{R}^n.$$

Здесь $sx = s_1x_1 + \dots + s_nx_n$ — скалярное произведение векторов s и x .

Из (1.2) имеем $\bar{K}(0) = 1$. Покажем, что символ $1 - \bar{K}(s)$ оператора $I - K$ не имеет других нулей в $\mathbf{R}^n$. Имеем $\operatorname{Re} [1 - \bar{K}(s)] = 2 \int_{\mathbf{R}^n} K(x) \sin^2(\frac{1}{2} sx) dx \geq 0$. Пусть $s \neq 0$. Из равенства $\operatorname{Re} [1 - \bar{K}(s)] = 0$ следует, что $K(x) \sin^2(\frac{1}{2} sx) = 0$ почти для всех $x \in \mathbf{R}^n$. Это равенство невозможно, так как K — ненулевая функция, а система гиперплоскостей $\{sx = 2\pi k, k \in \mathbf{Z}\}$ имеет нулевую общую меру в $\mathbf{R}^n$. Следовательно,

$$\operatorname{Re} [1 - \bar{K}(s)] > 0, \quad s \neq 0. \quad (3.1)$$

3.2. Единственность в пространстве $L_{\infty,1}(\mathbf{R}^n)$. Рассмотрим однородное уравнение (2.2) при

$$\varphi \in L_{\infty,1}(\mathbf{R}^n). \quad (3.2)$$

Введем функции

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x_1, s_2, \dots, s_n) &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \varphi(x) \exp[i(s_2 x_2 + \dots + s_n x_n)] dx_2 \dots dx_n, \\ \tilde{K}(x_1, s_2, \dots, s_n) &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} K(x) \exp[i(s_2 x_2 + \dots + s_n x_n)] dx_2 \dots dx_n, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$(s_2, \dots, s_n) \in \mathbf{R}_{n-1}$. Из (3.2) следует, что функция $\tilde{\varphi}(x_1, s_2, \dots, s_n)$ почти для всех x_1 принадлежит винеровской алгебре преобразований Фурье функций из $L_1(\mathbf{R}^{n-1})$, стало быть, она непрерывна по $s_2, \dots, s_n$ на $\mathbf{R}_{n-1}$. Из (3.2) и оценки

$$|\tilde{\varphi}(x_1, s_2, \dots, s_n)| \leq \int_{\mathbf{R}^{n-1}} |\varphi(x)| dx_2 \dots dx_n$$

следует, что $\tilde{\varphi}(x_1, s_2, \dots, s_n)$ как функция от x_1 принадлежит комплексному пространству ограниченных функций $M(\mathbf{R}) = L_{\infty}(\mathbf{R})$.

Применяя к уравнению (2.2) преобразование Фурье по переменным $x_2, \dots, x_n$, приходим к следующему уравнению на всей прямой, в котором $s_2, \dots, s_n$ играют роль параметров:

$$\tilde{\varphi}(x_1, s_2, \dots, s_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}(x_1 - t_1, s_2, \dots, s_n) \tilde{\varphi}(t_1, s_2, \dots, s_n) dt_1. \quad (3.4)$$

Символом уравнения (3.4) служит функция $1 - \bar{K}(s)$ (как функция от s_1). Согласно (3.1), этот символ не вырождается при любом ненулевом наборе параметров $s_2, \dots, s_n$. Из известной теоремы Винера (см. [4]) следует, что тогда уравнение (3.4) имеет только тривиальное решение в $M(\mathbf{R})$. Правая часть равенства (3.4), как свертка ограниченной и интегрируемой функций, непрерывна по x_1 (см. [4]), поэтому $\tilde{\varphi}(x_1, s_2, \dots, s_n) = 0$, $s_2^2 + \dots + s_n^2 > 0$.

Так как функция $\tilde{\varphi}(x_1, s_2, \dots, s_n)$ непрерывно зависит от $s_2, \dots, s_n$, то для всех x_1 имеем $\tilde{\varphi}(x_1, s_2, \dots, s_n) = 0$, $(s_2, \dots, s_n) \in \mathbf{R}_{n-1}$. Так как преобразование Фурье взаимно однозначно отображает $\mathbf{R}^{n-1}$ на соответствующую винеровскую алгебру (см. [6]), то для всех x_1 имеем $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ почти для всех $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n-1}$.

3.3. Единственность в классе ML . Способ усреднения, примененный в доказательстве леммы 2.2 работы автора [5], дает возможность перенести единственность решения уравнения (1.1) в $L_{\infty,1}(\mathbf{R}^n)$ на более широкий класс ML .

Пусть $\varphi \in ML$ — решение уравнения (2.2). Введем свертку $\psi = \omega * \tilde{\varphi}$ (по переменной x_1), где $\tilde{\varphi}$ определяется согласно (3.3), а ω — характеристическая функция отрезка $[a, b]$. Тогда $\psi(x_1, s_2, \dots, s_n)$ — абсолютно непрерывная ограниченная функция по x_1 .

Из (3.4) имеем следующее однородное уравнение для ψ :

$$\psi(x_1, s_2, \dots, s_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}(x_1 - t_1, s_2, \dots, s_n) \psi(t_1, s_2, \dots, s_n) dt_1.$$

Согласно доказанному в предыдущем пункте, $\psi(x_1, s_2, \dots, s_n) = 0$. Из произвольности отрезка $[a, b]$ следует, что $\tilde{\varphi}(x_1, s_2, \dots, s_n) = 0$. Поэтому $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ п.в. в $\mathbf{R}^n$.

Нами доказана следующая теорема единственности.

Теорема 3.1. Уравнение (2.2) в условиях (1.2) обладает в классе ML только тривиальным решением.

4. Существование решения. Рассмотрим уравнение (1.1) с условиями (1.2) при

$$0 \leq g \in L_1(\mathbf{R}^n). \quad (4.1)$$

В вопросе его изучения важную роль играет следующий вектор — первый момент распределения K :

$$\nu = \int_{\mathbf{R}^n} x K(x) dx. \quad (4.2)$$

Будем считать, что все скалярные интегралы в (4.2) сходятся абсолютно, тем самым все компоненты вектора $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ конечны. Предполагается также, что этот вектор ненулевой:

$$|\nu| = (\nu_1^2 + \dots + \nu_n^2)^{1/2} > 0. \quad (4.3)$$

Разрешимость уравнения (1.1) при сделанных выше предположениях легко может быть установлена с использованием результатов работы автора [5] по разрешимости УВ на всей прямой.

Предположим сначала, что $\nu_1 > 0$.

Рассмотрим следующее УВ на всей прямой:

$$\varphi(x_1) = h(x_1) + \int_{-\infty}^{\infty} W(x_1 - t_1) \varphi(t_1) dt_1, \quad (4.4)$$

где $h(x_1) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} g(x) dx_2 \dots dx_n$, $W(x_1) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} K(x) dx_2 \dots dx_n$.

Из (1.2) следует, что ядро W удовлетворяет условиям критичности (консервативности)

$$0 \leq W \in L_1(\mathbf{R}), \quad \int_{-\infty}^{\infty} W(x) dx = 1.$$

Согласно (4.2), первым моментом ядра W служит первая компонента ν_1 вектора ν .

Основным решением уравнения (4.4) назовем предел итераций (φ_m) , определяемых посредством

$$\varphi_{m+1}(x_1) = h(x_1) + \int_{-\infty}^{\infty} W(x_1 - t_1) \varphi_m(t_1) dt_1, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad \varphi_0 = 0. \quad (4.5)$$

Эти итерации обладают следующими свойствами, которые проверяются индукцией по m : $0 \leq \varphi_m \in L_1(\mathbf{R})$, $\varphi_m(x) \uparrow$ по m . Согласно [5, теорема 4.1], существует основное решение уравнения (4.4), причем

$$\begin{aligned} \varphi &= \psi + \rho, \quad \psi \in M(\mathbf{R}), \quad \rho \in L_1(\mathbf{R}), \quad \psi(-\infty) = 0, \\ \psi(+\infty) &= \nu_1^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1) dx_1 = \nu_1^{-1} \int_{\mathbf{R}^n} g(x) dx. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Имеем $\varphi_m(x_1) \leq \varphi(x_1)$. Итерации (φ_m) сходятся в топологии $L_{loc}(\mathbf{R})$, т.е. в $L_1(a, b)$ для всякого $[a, b] \subset \mathbf{R}$.

Если $h \in L_1(\mathbf{R}) \cap M(\mathbf{R})$, $h(\pm\infty) = 0$, то в представлении (4.6) можно взять $\rho = 0$.

Рассмотрим теперь итерации для (1.1), аналогичные итерациям (4.5):

$$f_{m+1}(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - t) f_m(t) dt, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad f_0 = 0. \quad (4.7)$$

Индукцией по m проверяется, что $0 \leq f_m \in L_1(\mathbf{R}^n)$, $f_m(x) \uparrow$ по m . Интегрируя равенства (4.7) по $x_2, \dots, x_n$, приходим к соотношениям $((\varphi_m)$ определяются согласно (4.5)):

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \varphi_m(x_1) \leq \varphi(x). \quad (4.8)$$

Из (4.8) и перечисленных выше свойств последовательности (φ_m) с учетом теоремы Б. Леви о монотонной сходимости в L_1 (см. [7]) следует сходимость итераций (f_m) в $L_{loc}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{n-1})$ (т.е. в $L_1([a, b] \times \mathbf{R}^{n-1})$ для всякого $[a, b] \subset \mathbf{R}$) к функции $f \in ML$.

Законность предельного перехода в (4.7) устанавливается следующим способом. Из (4.7) и неравенства $f_m \leq f$ следует, что

$$f_{m+1}(x) \leq g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - t) f(t) dt,$$

поэтому

$$f(x) \leq g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - t) f(t) dt. \quad (4.9)$$

С другой стороны, из (4.7) имеем $f(x) \geq g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - t) f_m(t) dt$, откуда следует неравенство, противоположное к (4.9). Итак, $f \in ML$ представляет собой основное решение уравнения (1.1). От требования неотрицательности g можно легко избавиться. С учетом теоремы единственности 3.1 мы приходим к следующей лемме.

Лемма 4.1. Пусть в УВ (1.1) $g \in L_1(\mathbf{R}^n)$ и $\nu_1 > 0$. Тогда существует основное решение $f \in ML$ уравнения, которое является единственным его решением в классе ML . Оно обладает свойствами:

$$\begin{aligned} f &\geq 0; \quad \varphi = \psi + \rho, \quad \rho \in L_1(\mathbf{R}), \quad \psi \in M(\mathbf{R}), \\ \psi(-\infty) &= 0, \quad \psi(+\infty) = \nu_1^{-1} \int_{\mathbf{R}^n} g(x) dx, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $\varphi(x_1) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$ является основным решением уравнения (4.4).

5. Основная теорема. Плотность восстановления.

5.1. Общий случай $|\nu| > 0$. Основная теорема. Рассмотрим теперь УВ (1.1), (1.2) при $g \in L_1(\mathbf{R}^n)$ в общем случае $|\nu| > 0$. Ниже будет показано, что путем подходящего вращения координатной системы в $\mathbf{R}^n$ можно обеспечить выполнение всех условий леммы 4.1. Более того, будет решена задача о минимизации величины $\psi(+\infty)$ в новой системе координат. Тогда формула вида (4.10) даст наиболее точное описание поведения решения уравнения (1.1) в бесконечности.

Рассмотрим вращение координатной системы в $\mathbf{R}^n$, определяемое ортогональной матрицей A , $\det A = 1$. Пусть $B = A^{-1}$. Замена переменных $y = Ax$ оставляет инвариантным вид уравнения (1.1). Действительно, обозначим

$$\tilde{f}(y) = f(By), \quad \tilde{g}(y) = g(By), \quad \tilde{K}(y) = K(By).$$

Из (1.1) получаем

$$\tilde{f}(y) = \tilde{g}(y) + \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{K}(y - z) \tilde{f}(z) dz. \quad (5.1)$$

Имеем $\int_{\mathbf{R}^n} \tilde{K}(y) dy = 1$, $\int_{\mathbf{R}^n} \tilde{g}(y) dy = \int_{\mathbf{R}^n} g(x) dx$, $\tilde{\nu} \equiv \int_{\mathbf{R}^n} y \tilde{K}(y) dy = A\nu$.

Если матрица A такова, что первая компонента вектора $\tilde{\nu}$ положительна, то к уравнению (5.1) может быть применена лемма 4.1. Тогда будем иметь $\tilde{\psi}(+\infty) = \tilde{\nu}_1^{-1} \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{g}(y) dy$. Выберем матрицу A так, чтобы число $\tilde{\nu}_1$ было положительным и возможно наибольшим. По такому направлению значение предела $\tilde{\psi}(+\infty) = \tilde{\nu}_1^{-1} \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{g}(y) dy$ будет наименьшим. Для этого нужно, чтобы первая строка матрицы A была сонаправлена вектору ν :

$$a_{1j} = |\nu|^{-1} \nu_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (5.2)$$

тогда будем иметь $\tilde{\nu}_1 = |\nu|$, $\tilde{\nu}_j = 0$, $j = 2, \dots, n$. Применяя к уравнению (5.1) лемму 4.1, приходим к следующей теореме.

Теорема 5.1. Пусть $g \in L_1(\mathbf{R}^n)$ и ядро уравнения (1.1) удовлетворяет условию $|\nu| > 0$. Пусть ортогональная матрица A удовлетворяет условию (5.2) и $\det A = 1$. Тогда существует решение $f(x) = \tilde{f}(Ax)$ уравнения (1.1), где $\tilde{f} \in ML$ является основным решением уравнения (5.1) и обладает свойствами

$$\varphi = \psi + \rho, \quad \rho \in L_1(\mathbf{R}), \quad \psi \in M(\mathbf{R}), \quad \psi(-\infty) = 0, \quad \psi(+\infty) = |\nu|^{-1} \int_{\mathbf{R}^n} g(x) dx. \quad (5.3)$$

Здесь $\varphi(x_1) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$ является основным решением уравнения (4.4). Если $g \geq 0$, то $f \geq 0$.

5.2. Плотность восстановления. Одним из важных следствий теоремы 5.1 является существование резольвентной функции Γ уравнения (1.1) (плотности восстановления) при $\nu \neq 0$. Резольвента Γ определяется как решение УВ

$$\Gamma(x) = K(x) + \int_{\mathbf{R}^n} K(x - t) \Gamma(t) dt. \quad (5.4)$$

Если выполнены условия (1.2) и $\nu \neq 0$, то существует основное решение уравнения (5.4), причем Γ обладает свойствами, перечисленными в теореме 5.1, с учетом того, что $g = K \geq 0$, $\int_{\mathbf{R}^n} K(x) dx = 1$.

С помощью Γ может быть построено минимальное решение уравнения (1.1) по формуле

$$f(x) = g(x) + \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(x-t) g(t) dt \quad (5.5)$$

в случае сходимости п.в. интеграла в правой части (5.5). Формула (5.5) дает решение уравнения (1.1) не только при $g \in L_1(\mathbf{R}^n)$, но и в ряде случаев, когда $g \notin L_1(\mathbf{R}^n)$. Приведем один пример.

Пусть функция g удовлетворяет условию

$$\psi(x_1) \equiv \operatorname{ess\,sup}_{x_2, \dots, x_n} |g(x)| \in L_1(\mathbf{R}).$$

Тогда по формуле (5.5) определяется решение уравнения (1.1), обладающее свойством $\operatorname{ess\,sup}_{x_2, \dots, x_n} |f(x)| \in M(\mathbf{R}) + L_1(\mathbf{R})$

З а м е ч а н и е 1. Имеется следующее качественное различие между одномерным и многомерным случаями УВ (1.1). В одномерном случае $n = 1$ при $g \in L_1(\mathbf{R})$ и $\nu \neq 0$ существует решение уравнения в классе $M + L$, но оно не единственное. В многомерном же случае $n > 1$ при $\nu \neq 0$ имеет место существование и единственность решения уравнения в классе ML .

З а м е ч а н и е 2. Используя факторизационный подход работ автора [5] и [10], можно распространить теорему 5.1 на УВМП вида $f(x) = g(x) + \int_{\mathbf{R}^n} f(x-t) d\mu(t)$, где $d\mu$ — вероятностная мера на $\mathbf{R}^n$ абсолютно непрерывного типа (т.е. некоторая сверточная мера $d\mu$ содержит нетривиальную компоненту, обладающую плотностью).

З а м е ч а н и е 3. Теорема 5.1 допускает распространение на тот случай, когда после подходящего поворота координатной системы будут выполнены условия

$$\begin{aligned} \nu_1^+ &\equiv \int_0^\infty x_1 dx_1 \int_{\mathbf{R}^{n-1}} K(x) dx_2 \cdots dx_n = +\infty, \\ \nu_1^- &\equiv - \int_{-\infty}^0 x_1 dx_1 \int_{\mathbf{R}^{n-1}} K(x) dx_2 \cdots dx_n < +\infty. \end{aligned}$$

Тогда числу $|\nu|$ приписывается значение $+\infty$. Используя результаты работы [5], можно показать, что тогда теорема 5.1 останется в силе, если положить $|\nu|^{-1} = 0$.

6. Одна задача случайного блуждания. Для интерпретации полученных результатов рассмотрим следующую задачу случайного блуждания одинаковых частиц в n -мерном пространстве с дискретным временем $m = 0, 1, 2, \dots$. Если частица в некоторый момент времени m находится в точке x , то в следующий момент времени $m+1$ она с вероятностью $K(t) dt$ окажется в dt -окрестности точки $x+t$. В предположении наличия достаточно большого числа частиц в любом элементарном объеме дискретное распределение частиц в пространстве может быть приближенно заменено непрерывным распределением. На уровне строгости, применяемом в физической кинетике, можно ввести плотность $f_m(x)$ распределения частиц в точке x в момент времени m : $f_m(x) dx$ представляет собой количество частиц (в тех или иных единицах) в элементарном объеме dx .

Предполагается наличие стационарных первичных источников частиц. Их плотность $g(x)$ зависит от точки (но не от времени).

Вектор $f_0(x)$ представляет собой известное начальное распределение частиц.

Для строгой формулировки задачи придется привлечь соответствующие процедуры по сходимости вероятностных мер.

При сделанных предположениях имеет место следующее рекуррентное по времени соотношение:

$$f_{m+1}(x) = g(x) + \int_{\mathbf{R}^n} K(x-t) f_m(t) dt, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим следующие две задачи.

З а д а ч а 1. Найти стационарные распределения $f_0 = f$ частиц такие, чтобы имели место равенства $f_m = f$, $m \geq 0$.

Задача 2. Пусть $f_0 = 0$. Требуется найти предельное распределение f такое, что $f_m \rightarrow f$ (в том или ином смысле).

Построенное в разделе 4 основное решение уравнения (1.1) дает решение задачи 2 и единственное решение задачи 1 в классе ML .

Лемма 4.1 и теорема 5.1 имеют простую вероятностную интерпретацию в рамках описанной выше модели. Величина $\int g(x) dx$ представляет собой количество частиц, производимое источниками за единицу времени. В лемме 4.1 ν_1 является коллективной скоростью течения частиц — их ухода в бесконечность по направлению орта первой координатной оси. Согласно теореме 5.1, вектор $\nu \neq 0$ определяет как направление, так и скорость течения.

При $\nu = 0$ такое направление отсутствует, вследствие чего происходит бесконечное накопление частиц со временем в конечной части пространства при ненулевом первичном источнике g .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
2. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления. М.: Советское радио, 1967, 299 с.
3. Севастьянов Б. А. Теория восстановления. — Итоги науки и техники, сер. теория вероятн., матем. статист., теорет. кибернет., 1974, т. 11, с. 98–128.
4. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975, 443 с.
5. Yengibarian N. B. Renewal equation on the whole line. — Stochastic Process. Appl., 2000, v. 85, № 2, p. 237–247.
6. Прёсдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979, 493 с.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981, 543 с.
8. Енгибарян Н. Б., Арабаджян Л. Г. О факторизации кратных интегральных операторов Винера–Хопфа. — Докл. АН СССР, 1986, т. 291, № 1, с. 11–14.
9. Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б. Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. — Итоги науки и техники, сер. матем. анализ, 1984, т. 22, с. 175–240.
10. Енгибарян Н. Б. Уравнения восстановления на полуоси. — Изв. РАН, 1999, т. 63, № 1, с. 61–76.

Поступила в редакцию
30.VII.2002

© 2004 г.

КРУГЛОВ В. М.*

О НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ В СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ¹⁾

Обсуждаются известные неравенства для вероятностей больших уклонений для сумм бернуллиевских случайных величин. Доказаны более сильные варианты некоторых из упомянутых неравенств.

Ключевые слова и фразы: схема Бернулли, большие уклонения.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: vkrug@dataforce.net

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 02-01-01080, 02-01-00949, 01-01-00644.