Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Боровков, Распространение хаоса в сетях обслуживания, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 3, 449–460

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1943>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:11:25

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.

Выходит 4 раза в год

Москва • Наука • ТВП

Том 42

Выпуск 3, 1997 год

июль, август, сентябрь

© 1997 г.

БОРОВКОВ К. А.*

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ХАОСА В СЕТЯХ ОБСЛУЖИВАНИЯ¹⁾

Для замкнутых марковских сетей обслуживания с возрастающим числом узлов рассматриваются явления гидродинамического предельного перехода. Предполагается, что очереди в различных узлах асимптотически ведут себя как независимые простые очереди. Для случая, когда дисциплина обслуживания «максимально однородна», получены оценки скорости сходимости.

Ключевые слова и фразы: гидродинамический предельный переход, сеть обслуживания.

1. **Введение.** Термин «распространение хаоса» ввел, по-видимому, М. Кац более 40 лет назад (ср. [15]). Это понятие относится к следующей ситуации в статистической механике. При рассмотрении системы, состоящей из большого числа n частиц, «если взять «хаотическое» начальное распределение частиц, эволюция системы согласно описывающим ее уравнениям, вообще говоря, разрушит это свойство независимости. Однако если сфокусировать свое внимание на маргинальном распределении первых k частиц, то оно по-прежнему окажется приблизительно произведением распределений. Так что в этом смысле независимость (хаос) распространяется [во времени]...» [10]. С другой стороны, на самом деле эволюция системы сама производит и воспроизводит ту самую независимость, что была предположена для начального распределения. Теоретически, это, по-видимому, наиболее трудно доказуемый факт, и в статистической механике он существует в виде так

*Department of Mathematics and Statistics, University of Melbourne, Parkville VIC 3052, Australia.

¹⁾Работа частично поддержана Фондом Гумбольдта.

называемой эргодической гипотезы. Так, для одноатомного совершенного газа в равновесии эргодическая гипотеза Максвелла постулирует, что ни одна из констант движения, за исключением полной энергии, не «оказывает предпочтения» ни одной из областей в фазовом пространстве, что приводит к равномерному распределению на соответствующей сфере в $3m$ -мерном пространстве скоростей. Это, как хорошо известно, в свою очередь влечет за собой, что компоненты скоростей оказываются асимптотически независимы и нормально распределены при $m \rightarrow \infty$ (см., например, обсуждение в [5]).

Для неравновесного случая «предположение о хаосе» — о том, что решение имеет продакт-форму (что соответствует максимуму энтропии) — позволяет замкнуть иерархию эволюционных уравнений, что приводит в уравнению Больцмана для индивидуальных распределений частиц. Таким образом, эта гипотеза оказывается «непротиворечащей уравнениям, описывающим эволюцию системы во времени» [15].

Вполне можно ожидать, что подобное явление должно иметь место и для поведения других (в том числе немеханических) систем, состоящих из большого числа «слабо зависимых» элементов. Типичным и важным примером такой системы являются сети обслуживания, состоящие из большого числа узлов и используемые для моделирования, скажем, больших компьютерных систем, когда «вызовы» направляются, по завершению их обслуживания на каком-либо узле, на другие узлы более или менее равномерным образом. Тогда можно ожидать, что небольшие группы узлов будут вести себя приблизительно как группы независимых очередей с независимыми входными потоками. Система будет таким образом проявлять тенденцию к распаду.

В доказательстве такого «предположения о хаосе» есть два ключевых шага. Во-первых, показать, что распределение вектора, описывающего состояние небольшой группы узлов в большой сети в равновесии, близко к произведению распределений. Это по сути аналог «гипотезы о хаосе» в статистической механике. Замечательной особенностью сетей с показательными временами обслуживания является то, что равновесное распределение для них известно в явной форме и имеет продакт-форму (см., например, [9], [8], [11] и теорему 1 ниже). Для открытых сетей, когда вызовы могут покидать систему и попадать в нее извне, такое распределение является в точности распределением вектора с независимыми компонентами. В настоящей работе мы рассматриваем только замкнутые сети; в этом случае равновесное распределение сосредоточено на дискретном симплексе, и независимость не имеет места. Однако асимптотическая независимость для небольших групп узлов, когда полное число узлов стремится к бесконечности, может быть без труда доказана в случае максимального подобия (см. ниже теорему 2).

Второй шаг — установление собственно распространения хаоса. То есть, надо доказать, что процессы, описывающие поведение очередей на

узлах, независимы. Коль скоро приближенная независимость «начальных условий» доказана (или предположена в форме гипотезы о хаосе) для некоторой группы узлов, желаемое свойство процессов может быть выведено из асимптотической независимости входных потоков. Последнее свойство было установлено для сетей с показательными временами обслуживания ([1]; см. теорему 3 ниже) и симметричными очередями [14]. Входные процессы оказываются близкими к независимым пуассоновским процессам, и доказательство этого факта использует мартингальную технику и то свойство сетей такого типа, что для них компенсаторы входных потоков могут быть выписаны в явной и удобной для анализа форме.

В настоящей работе мы делаем оба шага в случае сетей со свойством максимального подобию и с показательными временами обслуживания и устанавливаем оценки в метрике полной вариации для расстояния между распределениями процессов, описывающих поведение узлов, и независимыми процессами рождения и смерти, соответствующими стационарным очередям типа $M/M/1$ (теорема 4). Мы также доказываем сходимость эмпирических мер, порожденных траекториями процессов длин очередей.

2. Основные результаты. Рассмотрим последовательность (замкнутых) сетей Гордона–Ньюэлла $\{\mathcal{N}_m\}_{m \geq 1}$ увеличивающегося размера $m \rightarrow \infty$. Каждая из сетей $\mathcal{N}_m$ определяется множеством $J = J_m = \{1, \dots, m\}$ ее узлов, на которых находится и обслуживается согласно дисциплине «первым прибыл — первым обслуживается» фиксированное число $M = M_m$ вызовов. Предполагается, что времена обслуживания образуют независимые последовательности $T_j = \{\tau_{j,i}\}_{i \geq 1}$, $j \in J$, независимых одинаково и показательно распределенных случайных величин со средними

$$E\tau_{j,1} = a_j^{-1}$$

(для краткости мы опускаем здесь и в последующем нижний индекс m , указывающий порядковый номер сети). Каждый вызов, покидающий узел $i \in J$, направляется на некоторый узел $j \in J$, который выбирается независимым образом согласно маршрутной неприводимой стохастической матрице

$$P = \{p_{ij}\}_{i,j=1,\dots,m}, \quad p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j \in J} p_{ij} = 1.$$

Положим $p_0 = \max_{i,j \in J} p_{ij}$.

Пусть

$$n_J = n_J(t) = (n_1(t), \dots, n_m(t)) \in s_{(M)}^{m-1} = \left\{ x_J \in \mathbf{Z}_+^m : \sum_{j=1}^m x_j = M \right\}$$

есть вектор, чьи компоненты $n_j(t)$ суть числа вызовов, находящихся в момент времени t на соответствующих узлах $j \in J$ нашей сети. Для подмножества узлов $K \subset J$ мы будем использовать условное обозначение

$$b_K = (b_j, j \in K)$$

для соответствующего подвектора b_J .

Напомним, что процесс $n_J(t)$, $t \geq 0$, является марковским в силу предположения о показательности времен обслуживания. Более того, процесс этот эргодичен, и его стационарное распределение известно в явном виде и имеет следующую «продукт-форму».

Теорема 1 (Гордон–Ньюэлл [8]). *Равновесное распределение $\pi(x_J)$, $x_j \in s_{(M)}^{m-1}$, для сети $\{N_m\}$ имеет продукт-форму*

$$\pi(x_J) = B_M \prod_{j=1}^m \left(\frac{\alpha_j}{a_j} \right)^{x_j}, \quad (1)$$

где $\alpha_J = (\alpha_j)$ есть стационарное распределение для матрицы P :

$$\alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j = 1, \quad \alpha_J P = \alpha_J.$$

Нормирующий множитель B_M играет важную роль при вычислении основных характеристик сети. Так, стационарное (маргинальное) распределение длины очереди на n -м узле задается формулой

$$P\{n_j \geq k\} = \left(\frac{\alpha_j}{a_j} \right)^k \frac{B_M}{B_{M-k}}, \quad k = 0, 1, \dots, M,$$

а интенсивность входного процесса на j -м узле есть

$$\alpha_j^{(M)} = \alpha_j \frac{B_M}{B_{M-1}}. \quad (2)$$

Однако задача вычисления B_M для больших M и m становится довольно сложной (см., например, [12]).

Обратимся теперь к вопросу о том, «насколько независимы» величины n_j для малых групп узлов $K \subset J$ при распределении (1). Проще всего начать со случая «максимального подобия», т.е. когда предполагается, что все интенсивности обслуживания равны друг другу:

$$a_j = a, \quad j \in J,$$

а матрица P является дважды стохастической. Последнее свойство влечет за собой, что соответствующее стационарное распределение на J является равномерным:

$$\alpha_j = \alpha = \frac{1}{m}, \quad j \in J.$$

В этом случае нормирующий множитель B_M можно легко найти. Из (1) следует, очевидно, что

$$B_M^{-1} = |s_{(M)}^{m-1}| \left(\frac{\alpha}{a}\right)^M \quad (3)$$

($|A|$ есть число элементов в множестве A), и равновесное распределение вектора n_J оказывается равномерным на $s_{(M)}^{m-1}$. Это соответствует статистике Бозе–Эйнштейна в статистической механике, которая описывает фотоны и некоторые другие объекты (см., например, [6, § II.5]). Хорошо известно, что в этом случае маргинальные распределения низких порядков близки к распределениям независимых геометрически распределенных случайных величин q_j с общим параметром $g = M/(M+m)$:

$$P\{q_j = r\} = (1-g)g^r, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Следующее предложение дает оценку в метрике полной вариации

$$d(X, Y) = \sup_A |P\{X \in A\} - P\{Y \in A\}|,$$

X, Y суть случайные элементы,

для расстояния между интересующими нас случайными векторами (т.е. их распределениями), а именно между маргиналами равномерного распределения на дискретном симплексе и произведениями геометрических распределений.

Теорема 2 (Дьяконис–Фридман [5]). *Если $|K| = k$, то в состоянии равновесия*

$$d(n_K(t), q_K) \leq \frac{m^2}{(m-k-1)(m-k-2)} - 1.$$

Отметим, что из (2) и (3) следует, что равновесные входные интенсивности равны

$$\alpha_j^{(M)} = \frac{1}{m} \frac{B_M}{B_{M-1}} = \frac{aM}{M+m-1} \approx ga$$

при больших $M+m$. Обозначим через $q_j(t)$, $j \in J$, независимые стационарные очереди типа $M/M/1$ со входными интенсивностями ga и интенсивностями обслуживания a . Хорошо известно, что $q_j(t)$ есть стационарный процесс рождения и смерти с интенсивностями рождения и смерти ga и a , соответственно, и что $q_j(t)$ имеет геометрическое распределение с параметром g . Стало быть, теорема 2 оценивает расстояние между равновесным распределением вектора $n_K(t)$ в случае максимального подобия и стационарным распределением группы независимых систем типа $M/M/1$ с подходящими параметрами.

Далее, обозначим через

$$\xi_j^t = \{\xi_j(s): s \in [0, t]\}, \quad j \in J, \quad t \geq 0,$$

входной процесс для узла j . Здесь $\xi_j(s)$ есть число вызовов, прибывших на этот узел (включая и те, которые были направлены после ухода с узла j немедленно на тот же самый узел) в течение интервала времени $[0, s]$.

Пусть теперь

$$\eta_j^t = \{\eta_j(s): s \in [0, t]\}, \quad j \in J, \quad t \geq 0,$$

суть независимые пуассоновские процессы с интенсивностями $\alpha_j^{(M)}$. Оба процесса ξ_j и η_j — считающие, и хорошо известно, что такие процессы полностью определяются своими компенсаторами. Более того, расстояние в метрике полной вариации между распределениями двух считающих процессов может быть оценено интегралом от расстояния между плотностями их компенсаторов. В случае сетей Гордона–Ньюэлла эта плотность легко выписывается, что приводит к следующей оценке для распределений входных процессов на различных узлах.

Теорема 3 (Браун–Поллет [1]). *Для сети Гордона–Ньюэлла в равновесии справедливо неравенство*

$$d(\xi_K^t, \eta_K^t) \leq t \sum_{i \in K} \left(\sum_{j \in J} a_j^2 p_{ji}^2 \right)^{1/2}, \quad K \subseteq J.$$

В случае непоказательных времен обслуживания этот подход позволяет получать подобные оценки, когда цепь состоит из симметричных очередей (см. [14]).

Таким образом, если, скажем, a_j ограничены при $m \rightarrow \infty$ (обслуживание не слишком быстрое) и p_0 мало (вызовы распределяются «равномерно»), то совместное распределение небольшого набора ξ_K входных процессов на конечном интервале времени близко к распределению набора η_K независимых пуассоновских процессов.

Наш первый результат — следующая оценка для расстояния между распределениями k -мерных траекторий $n_K^t = \{n_K(s): s \in [0, t]\}$ и $q_K^t = \{q_K(s): s \in [0, t]\}$.

Теорема 4. *Для равновесной сети Гордона–Ньюэлла в случае максимального подобия при $k = |K| < (2/y)m + 2$, $y = 2 + mp_0 e^{2at}$ справедливо неравенство*

$$d(n_K^t, q_K^t) \leq \frac{ky}{m} \left[1 + k \left(1 - \frac{2}{y} \right) + \left(1 + \frac{2}{k} \right) \left(1 - \frac{k+2}{2m} y \right)^{-2} \right] + k t a p_0^{1/2}.$$

Поскольку n_K^t есть функция от $n_K(0)$, ξ_K^t и T_K , для доказательства теоремы достаточно установить, ввиду вышесформулированных результатов, «почти факторизацию» совместного распределения пары $n_K(0)$ и ξ_K^t (т.е. доказать, что они асимптотически независимы).

В нашей схеме все очереди на узлах аппроксимируются идентичными стационарными процессами q_j^t , и естественно поставить задачу о том, что происходит «в среднем по сети» (ср. постановку задачи в [7]). Фиксируем $k \geq 1$ и $t \in (0, \infty)$, положим $N = \binom{m}{k}$ и обозначим через

$$\mu^t = \frac{1}{N} \sum_{|K|=k} \delta_{n_K^t}$$

эмпирическое распределение (в пространстве Скорохода $D^k[0, t]$ непрерывных справа $\mathbf{R}^k$ -значных функций на $[0, t]$, имеющих пределы слева), порожденное множеством всех k -наборов узлов. Здесь n_K^t есть точка в $D^k[0, t]$, δ_x обозначает вырожденное распределение в точке $x \in D^k[0, t]$. Обозначим $Q_{a,g}^{t,k}$ распределение набора $\{q_1^t, \dots, q_k^t\} \in D^k[0, t]$ независимых стандартных процессов рождения и смерти (с интенсивностями рождения и смерти ag и a соответственно) на интервале времени $[0, t]$.

Предположим теперь, что задана последовательность $\{\mathcal{N}_m\}_{m \geq 1}$ сетей с максимальным подобием увеличивающегося размера, таких что

$$\frac{M}{m+M} \rightarrow g > 0, \quad a_m \rightarrow a > 0, \quad p_0 \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Теорема 5. Если соотношения (4) выполнены для последовательности сетей Гордона–Ньюэлла с максимальным подобием, то при фиксированных k и t

$$\mu^t \xrightarrow{P} Q_{a,g}^{t,k} \quad \text{при } m \rightarrow \infty$$

в топологии слабой сходимости относительно дискретной топологии в $D^k[0, t]$.

Другими словами, для любой измеримой ограниченной функции $f: D^k[0, t] \rightarrow \mathbf{R}$, справедливо соотношение

$$\int f d\mu^t \xrightarrow{P} \int f dQ_{a,g}^{t,k}. \quad (5)$$

Это, в свою очередь, эквивалентно сходимости

$$\mu^t(A) \xrightarrow{P} Q_{a,g}^{t,k}(A)$$

для каждого измеримого $A \in D^k[0, t]$.

3. Доказательства.

Доказательство теоремы 4. Траектория n_j^t процесса длины очереди $n_j(s)$ на интервале времени $[0, t]$ есть функция от $n_j(0)$, ξ_j^t и T_j :

$$n_j^t = F^t(n_j(0), \xi_j^t, T_j). \quad (6)$$

Явный вид отображения F^t задается формулой

$$n_j(s) = n_j(0) + \xi_j(s) - h_j(b_j(s)),$$

где $h_j = \max\{r: \tau_{j,1} + \dots + \tau_{j,r} \leq t\}$ есть процесс восстановления для последовательности $T_j = \{\tau_{j,i}\}_{i \geq 1}$, а $b_j(s)$ есть процесс времени занятости:

$$b_j(s) = \int_0^s 1_{\{n_j(u) > 0\}} du,$$

1_A — индикатор события A . Мы уже знаем, что среди аргументов F^t в правой части (6), величины $n_j(0)$ для разных j почти независимы и близки к геометрическим случайным величинам (теорема 2), а ξ_j^t близки к независимым пуассоновским процессам η_j^t (теорема 3). Поскольку T_j независимы по определению, нам надо на самом деле оценить лишь, «насколько независимы» наборы $\{n_j(0)\}_K$ и $\{\xi_j^t\}_K$. Для этой цели мы воспользуемся тем хорошо известным фактом, что

$$\begin{aligned} d((n_K(0), \xi_K^t), (q_K(0), \xi_K^t)) \\ = \sup_{0 \leq f \leq 1} (Ef(n_K(0), \xi_K^t) - Ef(q_K(0), \xi_K^t)). \end{aligned} \quad (7)$$

Верхняя грань здесь берется по множеству всех измеримых функций f , принимающих значения в $[0, 1]$, а $q_K(0)$ и ξ_K^t предполагаются независимыми.

Вначале мы оценим, насколько далеко распространяется «возмущение», вызванное работой узла $j \in J$. Определим случайное множество $S_i^t \subseteq J$, $i \in J$, следующим образом: узел $j \in S_i^t$ тогда и только тогда, когда существует такая цепочка

$$i = i_1, i_2, \dots, i_l, i_{l+1} = j, \quad (8)$$

что для каждого $r = 1, \dots, l \geq 1$ некоторый вызов переходит с узла i_r на i_{r+1} в некоторый момент времени $z_r \in (z_{r-1}, t]$, $z_0 = 0$. Ясно, что если $j \notin S_i^t$, то при заданных начальных значениях $n_j(0)$ функционирование узла i никак не сказывается на работе узла j в течение интервала времени $[0, t]$.

Заметим теперь, что функционирование узла i может оказать влияние на работу узлов из нашего фиксированного набора K только на событиях $D_i^t = \{S_i^t \cap K \neq \emptyset\}$. На дополнении A^t к объединению $D^t = \cup_{i \in K} D_i^t$ вектор входных процессов ξ_K^t есть функция от $n_{J \setminus K}(0)$, $T_{J \setminus K}$ и $H_{J \setminus K}$, где

$$H_j = \{\nu_{j,i}\}_{i \geq 1}, \quad j \in J, \quad (9)$$

суть независимые последовательности «направляющих» независимых и одинаково распределенных случайных величин $\nu_{j,i}$, управляющих переходами вызовов с узла j :

$$P\{\nu_{j,i} = k\} = p_{jk}, \quad k \in J.$$

Очевидно, что

$$P(D^t) \leq k \max_{i \in K} P(D_i^t) \leq k G_t, \quad (10)$$

где

$$G_t = \max_{i \in J, c_J \in S_{(M)}^{m-1}} P\{D_i^t \mid n_J(0) = c_J\}.$$

Пусть ζ_i есть первый момент времени, когда какой-либо вызов покидает узел i . Событие D_i^t может произойти, когда либо $\nu_{i,1} \in K$, либо имеет место «цепочка переходов» вида (8) из i или из $\nu_{i,1}$ на $j \in K$ в течение интервала времени $(\zeta_i, t]$. Поэтому по формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P(D_i^t) &= P\{D_i^t; \nu_{i,1} \in K\} + P\{D_i^t; \nu_{i,1} \notin K\} \\ &\leq k p_0 + 2 \int_0^t G_{t-s} P\{\zeta_i \in ds\} \leq k p_0 + 2a \int_0^t G_{t-s} ds. \end{aligned} \quad (11)$$

Последняя оценка следует из того факта, что распределение величины ζ_i минорируется показательным распределением длительности обслуживания, плотность которого не превосходит a , и того, что G_{t-s} убывает по s . Теперь (11) влечет за собой очевидным образом, что

$$G_t \leq k p_0 + 2a \int_0^t G_s ds,$$

откуда следует с помощью стандартного рассуждения (ср., например, лемму 4.15 в [13]), что

$$G_t \leq k p_0 e^{2at}, \quad (12)$$

и, стало быть, с учетом (10), что

$$P(D^t) \leq k^2 p_0 e^{2at}. \quad (13)$$

Обозначим теперь через

$$R_t = \{i \in J: S_i^t \cap K \neq \emptyset\}$$

(случайное) множество всех узлов $i \in J$, «выходные потоки» с которых могут повлиять на работу узлов из K в течение интервала времени $[0, t]$. Ясно, что $R_t \subseteq J \setminus K$ на событии A^t .

По определению, на событии $\{R_t = R\}$ входные процессы

$$\xi_K^t = \Phi_R^t(n_R(0), T_R, H_R)$$

суть функции лишь указанных аргументов. Возвращаясь к (7), имеем:

$$\begin{aligned} E f(n_K(0), \xi_K^t) &= E(f; A^t) + E(f; D^t) \\ &\leq \sum_{R \subseteq J \setminus K} E(f; R_t = R) + P(D^t). \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку индикатор $1_{\{R_t=R\}} = \Psi_R^t(n_R(0), T_R, H_R)$ есть функция лишь от указанных случайных величин, в силу формулы полной вероятности

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f; R_t = R) &= \mathbf{E}\{f(n_K(0), \Phi_R^t(n_R(0), T_R, H_R)) \Psi_R^t(n_R(0), T_R, H_R)\} \\ &= \sum_{c_K, c_R} \varphi_R^t(c_K, c_R) \mathbf{P}\{n_K(0) = c_K, n_R(0) = c_R\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\varphi_R^t(c_K, c_R) = \mathbf{E}\{f(c_K, \Phi_R^t(c_R, T_R, H_R)) \Psi_R^t(c_R, T_R, H_R)\}.$$

Заметим теперь, что для независимых $q_K(0)$ и $n_R(0)$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{P}\{n_K(0) = c_K, n_R(0) = c_R\}}{\mathbf{P}\{q_K(0) = c_K, n_R(0) = c_R\}} &= \frac{\mathbf{P}\{n_K(0) = c_K | n_R(0) = c_R\}}{\mathbf{P}\{q_K(0) = c_K\}} \\ &= \frac{\binom{m-k-r+M-t_2-t_1-1}{M-t_2-t_1}}{\binom{m-r+M-t_2-1}{M-t_2}} \frac{1}{(1-g)^k g^{t_1}} \leq \frac{(m-r)^2}{(m-r-k-2)^2} \end{aligned} \quad (16)$$

при $t_1 = \sum_{j \in K} c_j$, $t_2 = \sum_{j \in R} c_j$, $r = |R|$, $r < m - k - 2$, и $g = M/(M+m)$. Последние два соотношения в (16) нетрудно вывести из доказательства теоремы 4.1 и леммы 3.1f) в [5].

Стало быть, мы имеем из (15), что при $R \subseteq J \setminus K$

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\{f(n_K(0), \xi_K^t); R_t = R\} \\ &\leq \frac{(m-r)^2}{(m-r-k-2)^2} \sum_{c_K, c_R} \varphi_R^t(c_K, c_R) \mathbf{P}\{q_K(0) = c_K, n_R(0) = c_R\} \\ &= \frac{(m-r)^2}{(m-r-k-2)^2} \mathbf{E}(f(q_K(0), \xi_K^t); R_t = R), \end{aligned}$$

и, следовательно, для любого $h > 0$ соотношение (7) влечет за собой неравенство

$$\begin{aligned} &d((n_K(0), \xi_K^t), (q_K(0), \xi_K^t)) \\ &\leq \mathbf{P}(D^t) + \mathbf{P}\{|R_t| > h\} + \left(\frac{(n-h)^2}{(m-h-k-2)^2} - 1 \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь, в силу неравенства Чебышева,

$$\mathbf{P}\{|R_t| > h\} \leq h^{-1} \mathbf{E}|R_t| \leq \frac{mk}{h} p_0 e^{2at}, \quad (18)$$

ибо

$$\mathbf{E}|R_t| = \sum_{i \in J} \mathbf{P}(D_i^t) \leq mk p_0 e^{2at}$$

из (12), и легко видеть, что

$$\frac{(m-h)^2}{(m-h-k-2)^2} - 1 \leq \frac{2(k+2)(m-h)}{(m-h-k-2)^2}. \quad (19)$$

Выбирая $h = m(y - 2)/y$ при $y = 2 + mp_0 e^{2at}$ (что близко к значению, при котором правые части в (18) и (19) равны), получаем отсюда и из (13) и (17)–(19) оценку

$$d((n_K(0), \xi_K^t), (q_K(0), \xi_K^t)) \leq \frac{ky}{m} \left[k \left(1 - \frac{2}{y} \right) + 1 + \left(1 + \frac{2}{k} \right) \left(1 - \frac{k+2}{2m} y \right)^{-2} \right]. \quad (20)$$

Теперь мы выводим из (6), «наследственного свойства» метрики полной вариации и неравенства треугольника, что

$$\begin{aligned} d(n_K^t, q_K^t) &= d(F_K^t(n_K(0), \xi_K^t, T_K), F_K^t(q_K(0), \eta_K^t, T_K)) \\ &\leq d((n_K(0), \xi_K^t), (q_K(0), \eta_K^t)) \\ &\leq d((n_K(0), \xi_K^t), (q_K(0), \xi_K^t)) + d((q_K(0), \xi_K^t), (q_K(0), \eta_K^t)) \\ &= d((n_K(0), \xi_K^t), (q_K(0), \xi_K^t)) + d(\xi_K^t, \eta_K^t). \end{aligned}$$

Оценка (20) вместе с утверждением теоремы 3 завершают доказательство теоремы 4.

Доказательство теоремы 5. Нам надо показать, что для любой ограниченной измеримой функции f , $|f| < c < \infty$, и любого $\varepsilon > 0$

$$P \left\{ \left| \int f d\mu^t - \int f dQ_{a,g}^{t,k} \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0.$$

По неравенству Чебышева эта вероятность не превосходит

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{-2} E \left(\frac{1}{N} \sum_{K \subset J, |K|=k} f(n_K^t) - E f(q_K^t) \right)^2 \\ &= \varepsilon^{-2} N^{-2} \sum_{K \cap L \neq \emptyset, |K|=|L|=k} e_{K,L} + \varepsilon^{-2} N^{-2} \sum_{K \cap L = \emptyset, |K|=|L|=k} e_{K,L}, \quad (21) \end{aligned}$$

где

$$e_{K,L} = E \left((f(n_K^t) - E f(q_K^t)) (f(n_L^t) - E f(q_L^t)) \right).$$

Простая комбинаторная выкладка показывает, что первая сумма состоит из

$$\begin{aligned} N^2 - N \binom{m-k}{k} &= N^2 \left(1 - \frac{((m-k)!)^2}{(m-2k)!m!} \right) \\ &= N^2 \left(1 - \frac{(m-2k+1) \cdots (m-k)}{(m-k+1) \cdots m} \right) = o(N^2) \quad \text{при } m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

слагаемых, чьи абсолютные величины не превосходят $4c^2$. Стало быть, первый член в правой части (21) есть $o(1)$.

С другой стороны, из теоремы 4 следует, что если $K \cap L = \emptyset$, то процесс (n_K^t, n_L^t) сходится (в полной вариации) к процессу (q_K^t, q_L^t) с независимыми q_K^t и q_L^t , и что $e_{K,L} = o(1)$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по K и L с $|K| = |L| = k$, $K \cap L = \emptyset$. Поэтому и второй член в правой части (21) также сходится к нулю, и это завершает доказательство теоремы 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brown T. C., Pollett P. K. Some distributional approximations in Markovian queueing networks. — Adv. Appl. Probab., 1982, v. 14, p. 654–671.
2. Cercignani C. The Boltzmann Equation and its Applications. New York: Springer-Verlag, 1988.
3. Chen H., Mandelbaum A. Discrete flow networks: Bottleneck analysis and fluid approximations. — Math. Oper. Res., 1991, v. 16, p. 408–446.
4. Chen H., Mandelbaum A. Stochastic discrete flow networks: Diffusion approximation and bottlenecks. — Ann. Probab., 1991, v. 19, p. 1463–1519.
5. Diaconis P., Freedman D. A dozen de Finetti-style results in search of a theory. — Ann. Inst. Poincaré. Probab. et Statist., 1987, 23 Suppl., № 2, p. 397–423.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984, 528 с.
7. Graham C., Méléard S. Propagation of chaos for a fully connected loss network with alternating routing. — Stoch. Proc. Appl., 1993, v. 44, p. 159–180.
8. Gordon W. J., Newell G. F. Closed queueing systems with exponential servers. — Oper. Res., 1967, v. 15, p. 254–265.
9. Jackson J. R. Jobshop-like queueing systems. — Manag. Sci., 1963, v. 10, p. 131–142.
10. Kac M. Foundation of kinetic theory. — In: Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. V. 3. Berkeley-Los-Angeles: Univ. California Press, 1956, p. 171–197.
11. Kelly F. P. Reversibility and Stochastic Networks. New York: Wiley, 1979.
12. Knessl C., Tier C. Asymptotic expansions for large closed queueing networks. — J. Ass. Comp. Mash., 1990, v. 37, p. 144–171.
13. Liptzer R. Sh., Shiryaev A. N. Statistics of Random Processes. I. General Theory. New York: Springer-Verlag, 1977.
14. Pollett P. K. Distributional approximations for networks of quasireversible queues. — In: Stochastic Analysis and Applications. (Lect. Notes Math. V. 1095.) New York: Springer-Verlag, 1984, p. 108–129.
15. Szintman A. Topics in propagation of chaos. — In: Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX. (Lect. Notes Math., V. 1464.) New York: Springer-Verlag, 1991, p. 165–251.

Поступила в редакцию
7.XII.1995