Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Гапошкин, О сходимости почти всюду средних Рисса
однородных случайных полей, *Теория вероятн. и ее примен.*,
1997, том 42, выпуск 3, 461–472

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1944>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 12:00:50

© 1997 г.

ГАПОШКИН В. Ф.*

О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ СРЕДНИХ РИССА
ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ¹⁾

Изучаются весовые средние однородных (в широком смысле) случайных полей в $\mathbf{R}^k$ со сферически симметричными весами. Получено представление этих средних, позволяющее доказать критерий суммирования почти всюду однородных случайных полей, а также ряд следствий.

Ключевые слова и фразы: однородные в широком смысле случайные поля, спектральная мера поля, весовые средние, корреляционная функция, суммируемость почти всюду, логарифмические средние Рисса.

Пусть $(X(t), t \in \mathbf{R}^k)$ — однородное случайное поле второго порядка,

$$\mathbf{E}X(t) = 0, \quad \mathbf{E}|X(t)|^2 = \sigma^2, \quad \mathbf{E}\overline{X(t)}X(t+u) = K(u), \quad u, t \in \mathbf{R}^k,$$

$Z(d\lambda)$ — спектральная мера поля, имеющая ортогональные приращения, и спектральное представление поля имеет вид

$$X(t) = \int_{\mathbf{R}^k} \exp \{i(t, \lambda)\} Z(d\lambda). \quad (1)$$

Пусть $b_1(u)$ — положительная весовая функция на $(0, \infty)$,

$$b(u) = b_1(u) u^{k-1}, \quad (2)$$

$$B_1(r) = \int_{|t| \leq r} b_1(|t|) dt = c_k \int_0^r u^{k-1} b_1(u) du = c_k B(r), \quad (3)$$

$$c_k = kV_k, \quad \text{где} \quad V_k = \pi^{k/2} \Gamma^{-1} \left(\frac{k}{2} + 1 \right)$$

есть объем единичного шара.

Предположим, что $\lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = \infty$.

*Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), ул. Образцова, 15, 103055 Москва, Россия.

¹⁾Работа поддерживается РФФИ, грант 96-01-01129 и внебюджетным фондом НИР МПС РФ.

Средние Рисса поля $X(t)$ со сферически симметричным весом $b_1(|t|)$ определяются формулой

$$S_r = B_1^{-1}(r) \int_{|t| \leq r} b_1(|t|) X(t) dt. \quad (4)$$

В частности, при $b_1(t) = 1$ это средние арифметические поля

$$\Sigma_r = V_k^{-1} r^{-k} \int_{|t| \leq r} X(t) dt.$$

В работе [1] показано, что средние Σ_r имеют представление

$$\Sigma_r = Z[|\lambda| \leq a_m] + \eta_r \quad \text{при} \quad 2^m \leq r < 2^{m+1}, \quad (5)$$

где

$$a_m = 2^{-m} \quad \text{и} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \eta_r = 0 \quad \text{п.в.}, \quad (6)$$

а $Z[A] = \int_A Z(d\lambda)$ для борелевских множеств A в $\mathbf{R}^k$.

В частности, отсюда следует, что не все однородные случайные поля суммируются почти всюду методом средних арифметических, и для их суммирования в ряде случаев нужны более сильные методы.

В случае $k = 1$ для стационарных процессов с дискретным временем в работе [2] изучалась сходимость почти всюду средних Рисса $B_N^{-1} \sum_{k=1}^N b_k X_k$, где $B_N = \sum_{k=1}^N b_k \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. При этом на коэффициенты b_k налагались ограничения типа $b_k = g(k)k^{-1}$, где $g(k)$ — медленно меняющаяся функция.

Цель данной работы — обобщить этот результат на однородные случайные поля любой размерности и расширить множество допустимых весовых функций (в частности, при $k = 1$ рассматриваются средние Рисса с любыми невозрастающими весами).

Сделаем сначала несколько замечаний о взаимосвязи B -средних со средними арифметическими. Пусть $Y_1(t)$ — любая локально интегрируемая функция из $\mathbf{R}^k$ в $\mathbf{R}$, $t = (t_1, \dots, t_k)$. Пусть функции $b_1(u)$, $B_1(u)$, $b(u)$, $B(u)$ те же, что и прежде. B -средние функции $Y_1(t)$ и ее средние арифметические имеют вид

$$S(r) = B_1^{-1}(r) \int_{|t| \leq r} b_1(|t|) Y_1(t) dt,$$

$$\Sigma(r) = V_k^{-1} r^{-k} \int_{|t| \leq r} Y_1(t) dt.$$

Переходя к сферическим координатам и, обозначая якобиан преобразования $c_k \rho^{k-1} I(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1})$ и полагая

$$\int Y_1(\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}) I(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}) d\varphi_1 \dots d\varphi_{k-1} = Y(\rho),$$

получим

$$S(r) = B^{-1}(r) \int_0^r b(\rho) Y(\rho) d\rho,$$

$$\Sigma(r) = kr^{-k} \int_0^r \rho^{k-1} Y(\rho) d\rho,$$

где функция $b(u)$ задается формулой (2).

Справедлива следующая простая и, вероятно, не новая лемма.

Лемма 1. Пусть для дифференцируемой положительной функции $b_1(u)$ выполнены условия: $(\exists u_0 > 0)$

$$(\exists \alpha \geq 0): \quad u^{-\alpha} b_1(u) \quad \text{не возрастает при } u \geq u_0, \quad (7)$$

$$(\exists 0 < \beta < k): \quad u^\beta b_1(u) \quad \text{не убывает при } u \geq u_0. \quad (8)$$

Тогда B -метод эквивалентен методу $(C, 1)$, т.е. для любой локально интегрируемой функции $Y(t)$ эквивалентны условия:

$$s(r) = \int_0^r t^{k-1} b_1(t) Y(t) dt = o(B(r)) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (9)$$

и

$$\sigma(r) = \int_0^r t^{k-1} Y(t) dt = o(r^k) \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Доказательство. Из (7) и (8) сразу следует, что

$$c_1 u^k b_1(u) \leq B(u) = \int_0^u t^{k-1} b_1(t) dt \leq c_2 u^k b_1(u) \quad (11)$$

Условия $(u^{-\alpha} b_1(u))' \leq 0$ и $(u^\beta b_1(u))' \geq 0$ влекут за собой, что при $u \geq u_0$

$$|u b_1'(u)| \leq C_3 b_1(u), \quad C_3 = \max(\alpha, \beta). \quad (12)$$

Покажем, что из (9) можно вывести (10). Из (9) и (12) находим, что

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= \int_0^r b_1^{-1}(t) ds(t) = s(r) b_1^{-1}(r) + \int_0^r b_1^{-2}(t) b_1'(t) s(t) dt \\ &= o(b_1^{-1}(r) B(r)) + o\left(\int_{u_0}^r b_1^{-1}(t) t^{-1} B(t) dt\right). \end{aligned}$$

Используя (11), заключаем, что оба слагаемых в правой части последнего равенства имеют порядок $o(r^k)$ при $r \rightarrow \infty$. Аналогично доказывается, что (10) влечет за собой (9).

Из леммы 1 следует, что если интересоваться B -методами более сильными, чем метод $(C, 1)$, то функция $b_1(u)$ должна иметь вид

$$b_1(u) = \varphi(u) u^{-k}, \quad (13)$$

где $\varphi(u)$ растет не быстрее u^ε при любом $\varepsilon > 0$.

Пусть функция $b(u)$ определена формулой (2). Далее предполагается, что выполнено условие:

$$b(u) \text{ не возрастает при } u \geq u_0. \quad (14)$$

В частности, в этот класс входят все функции вида (13), где $\varphi(u)$ — медленно меняющаяся функция.

Подставим спектральное разложение (1) поля $X(t)$ в формулу (4). После интегрирования по угловым координатам средние S_τ представляются в виде

$$S_\tau = \int_{\mathbf{R}^k} Q_\tau(\lambda) Z(d\lambda), \quad (15)$$

где

$$Q_\tau(\lambda) = (B(r))^{-1} \int_0^\tau b(u) D(u|\lambda|) du, \quad (16)$$

ядро $D(v)$ выражается через бесселеву функцию $J_\nu(v)$, $\nu = k/2 - 1$, в виде

$$D(v) = a_\nu J_\nu(v) v^{-\nu}, \quad a_\nu = 2^\nu \Gamma(\nu + 1). \quad (17)$$

Далее через C будут обозначаться постоянные, зависящие от k , не обязательно одинаковые в разных неравенствах.

Лемма 2. Если выполнено условие (14), то для $x > 0$, $N_0 < N < M$

$$\left| \int_N^M b(u) D(ux) du \right| \leq C b(N) x^{-1}. \quad (18)$$

Доказательство. При $k = 1$

$$D(u) = u^{1/2} J_{1/2}(u) = (2\pi^{-1})^{1/2} \cos u.$$

При $k \geq 2$ известна асимптотика

$$D(u) = h_\nu u^{-(\nu+1/2)} \cos(u + b_\nu) + o(u^{-(\nu+3/2)}), \quad \nu = \frac{k}{2} - 1.$$

Поэтому

$$|\Phi(v)| = \left| \int_0^v D(u) du \right| \leq C \quad \text{при } v > 0. \quad (19)$$

Из условий (14) и (19) вытекает (18).

Лемма 3. При любых $x > 0$ и $N > 0$ справедлива оценка

$$\left| \int_0^N b(u) D(ux) du \right| \leq C (B(x^{-1}) + 1). \quad (20)$$

Доказательство. Представим интеграл в левой части в виде суммы интегралов по промежуткам $(0, u_0)$, (u_0, x^{-1}) , (x^{-1}, N) ; некоторые слагаемые могут отсутствовать, например, при $N \leq x^{-1}$.

Так как $|D(u)| \leq C$, то

$$\left| \int_0^{u_0} b(u) D(ux) du \right| \leq C,$$

$$\left| \int_{u_0}^{x^{-1}} b(u) D(ux) du \right| \leq C \int_0^{x^{-1}} b(u) du = CB(x^{-1}).$$

Далее,

$$B(v) = \int_0^v b(u) du \geq (v - u_0) b(v)$$

и по лемме 2 при $N > x^{-1}$

$$\left| \int_{x^{-1}}^N b(u) D(ux) du \right| \leq Cb(x^{-1})x^{-1} \leq C[B(x^{-1}) + 1].$$

Объединив эти оценки, получим неравенство (20).

Введем следующие обозначения. Так как функция $B(r)$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$, для $m = 1, 2, \dots$ обозначим через N'_m корень уравнения $B(u) = m$; положим также $N_m = N'_{2^m}$, т.е. $B(N_m) = 2^m$; пусть

$$\lambda_m = N_{m+1}^{-1} \quad \text{при } m \geq 0, \quad N'_{2^m+n} = N_{m,n}, \quad 0 \leq n < 2^m.$$

Заметим, что из условия (14) вытекает, что $N_{m+1} \geq 2N_m - C$, и поэтому

$$\sum_{k=1}^m N_k^\alpha \leq CN_m^\alpha, \quad \sum_{k=m+1}^\infty N_k^{-\alpha} \leq CN_m^{-\alpha} \quad (\forall \alpha > 0). \quad (21)$$

Теорема 1. Если весовая функция $b_1(u)$ удовлетворяет соотношению (14), то средние Рисса любого однородного случайного поля допускают следующее представление при $N_m \leq r < N_{m+1}$:

$$S_r = Z[|\lambda| \leq \lambda_m] + \eta_r, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \eta_r = 0 \quad \text{н.в.} \quad (22)$$

Доказательство. Положим

$$\Delta'_m = \sup \left\{ m^{-1} \left| \int_{N'_m \leq |t| \leq r} b_1(|t|) X(t) dt \right|; N'_m \leq r < N'_{m+1} \right\},$$

$$\Delta_m = \sup \left\{ |S_{N_{m,n}} - Z[|\lambda| \leq \lambda_m]|; 0 \leq n < 2^m \right\}.$$

Для доказательства теоремы достаточно проверить равенства

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta'_m = 0 \quad \text{п.в.}, \quad (23)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m = 0 \quad \text{п.в.} \quad (24)$$

Из неравенства Коши–Буняковского и определения чисел N'_m следует оценка

$$\|\Delta'_m\|^2 \leq m^{-2} \left\{ \left\| \int_{N'_m \leq |t| < N'_{m+1}} b_1(|t|) |X(t)| dt \right\|^2 \right\} \leq C\sigma^2 m^{-2}.$$

Поэтому $\sum \|\Delta'_m\|^2 < \infty$ и выполнено (23). Оценка выражения Δ_m проводится по той же схеме «двоичного разложения сумм», что и в работе [2], и опирается на полученные выше свойства ядер $D(u)$. Положим

$$b(u) (D(u|\lambda) - 1) = p(u, \lambda), \quad b(u) D(u|\lambda) = q(u, \lambda),$$

$$N_{mpj} = N'_{2^m+j2^{m-p}}, \quad j = 0, \dots, 2^p, \quad p = 1, 2, \dots, m.$$

Из (15), (16) следует, что

$$|S_{N_{m,n}} - Z[|\lambda| \leq \lambda_m]| = |J_{m,n}^1| + |J_{m,n}^2|,$$

где

$$J_{m,n}^1 = 2^{-m} \int_{|\lambda| \leq \lambda_m} \left(\int_0^{N_{m,n}} p(u, \lambda) du \right) Z(d\lambda),$$

$$J_{m,n}^2 = 2^{-m} \int_{|\lambda| > \lambda_m} \left(\int_0^{N_{m,n}} q(u, \lambda) du \right) Z(d\lambda).$$

Положим также

$$f_{mpj}(\lambda) = \int_{N_{mp(j-1)} \leq |u| < N_{mpj}} p(u, \lambda) du,$$

$$g_{mpj}(\lambda) = \int_{N_{mp(j-1)} \leq |u| < N_{mpj}} q(u, \lambda) du,$$

$$\Delta_{mpj}^1 = \int_{|\lambda| \leq \lambda_m} f_{mpj}(\lambda) Z(d\lambda), \quad \Delta_{mpj}^2 = \int_{|\lambda| > \lambda_m} g_{mpj}(\lambda) Z(d\lambda),$$

$$\varepsilon_m^1 = \int_{|\lambda| \leq \lambda_m} \left(\int_0^{N_m} p(u, \lambda) du \right) Z(d\lambda),$$

$$\varepsilon_m^2 = \int_{|\lambda| > \lambda_m} \left(\int_0^{N_m} q(u, \lambda) du \right) Z(d\lambda).$$

Для проверки свойства (24) достаточно, как и в работе [2], доказать, что сходятся четыре ряда

$$\Sigma_i = \sum 2^{-2m} \|\varepsilon_m^i\|^2 \quad \text{и} \quad \Sigma'_i = \sum 2^{-2m} \gamma_m^i, \quad i = 1, 2,$$

где

$$\gamma_m^i = \sum_{p=1}^m p^2 \sum_{j=1}^{2^p} \|\Delta_{mpj}^i\|^2, \quad i = 1, 2.$$

Кроме лемм 1, 2 при оценке используются следующие очевидные неравенства:

$$|D(u)| \leq C, \quad (25)$$

$$|D(u) - 1| \leq Cu^2. \quad (26)$$

Пусть $F(d\lambda) = \|Z(d\lambda)\|^2$, $\int_{\mathbf{R}^k} F(d\lambda) < \infty$, и будем пользоваться известным свойством спектральной меры

$$\left\| \int g(\lambda) Z(d\lambda) \right\|^2 = \int |g(\lambda)|^2 F(d\lambda) \quad \text{для } g \in L_F^2.$$

Оценка ряда Σ_1 . В силу (26) при $N_m|\lambda| \leq 1$ имеем:

$$\left| \int_0^{N_m} p(u, \lambda) du \right| \leq CN_m^2 |\lambda|^2 \int_0^{N_m} b(u) du \leq CN_m |\lambda| 2^m. \quad (27)$$

Далее часто употребляются следующие обозначения:

$$A_0 = \int_{|\lambda| > \lambda_1} F(d\lambda), \quad A_k = \int_{\lambda_{k+1} < |\lambda| \leq \lambda_k} F(d\lambda), \quad \sum A_k < \infty. \quad (28)$$

Так как $\lambda_k = N_{k+1}^{-1}$, то из (27) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-2m} \|\varepsilon_m^1\|^2 &\leq C \sum_{m=1}^{\infty} N_m^2 \sum_{k=m}^{\infty} \int_{\lambda_{k+1} < |\lambda| \leq \lambda_k} |\lambda|^2 F(d\lambda) \\ &\leq C \sum_{m=1}^{\infty} N_m^2 \sum_{k=m}^{\infty} N_{k+1}^{-2} A_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} A_k N_{k+1}^{-2} \sum_{m=1}^k N_m^2, \end{aligned}$$

и ряд Σ_1 сходится в силу (21) и (28).

Оценка ряда Σ_2 . Положим $Q_m(\lambda) = \int_0^{N_m} q(u, \lambda) du$. Тогда

$$\|\varepsilon_m^2\|^2 = \int_{\lambda_m < |\lambda| \leq \lambda_1} |Q_m(\lambda)|^2 F(d\lambda) + \int_{|\lambda| > \lambda_1} |Q_m(\lambda)|^2 F(d\lambda). \quad (29)$$

Из леммы 3 следуют оценки:

$$|Q_m(\lambda)| \leq CB(|\lambda|^{-1}) \quad \text{при } |\lambda| \leq \lambda_1, \quad |Q_m(\lambda)| \leq C \quad \text{при } |\lambda| > \lambda_1.$$

Подставляя эти оценки в (29), имеем:

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-2m} \|\varepsilon_m^2\|^2 \leq C + C \sum_{m=2}^{\infty} 2^{-2m} \sum_{k=1}^{m-1} \int_{\lambda_{k+1} < |\lambda| \leq \lambda_k} B^{-2}(|\lambda|^{-1}) F(d\lambda). \quad (30)$$

Но на интервале $(\lambda_{k+1}, \lambda_k)$

$$B(|\lambda|^{-1}) \leq B(\lambda_{k+1}^{-1}) = B(N_{k+2}) = 2^{k+2}.$$

Поэтому ряд в правой части неравенства (30) мажорируется рядом

$$C \sum_{m=2}^{\infty} 2^{-2m} \sum_{k=1}^{m-1} A_k 2^{2k} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} A_k < \infty.$$

Оценка ряда Σ'_1 . По определению чисел N_{mpj} и в силу (26) при $|\lambda| \leq \lambda_m$ получаем

$$|f_{mpj}(\lambda)| \leq C N_{mpj}^2 |\lambda|^2 \int_{N_{mp(j-1)}}^{N_{mpj}} b(u) du \leq C N_{m+1} |\lambda| 2^{m-p}.$$

Поэтому

$$\|\Delta_{mpj}^1\|^2 \leq C N_{m+1}^2 2^{2m-2p} \int_{|\lambda| \leq \lambda_m} |\lambda|^2 F(d\lambda),$$

и ряд Σ'_1 мажорируется рядом

$$C \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^m p^2 2^{-p} N_{m+1}^2 \sum_{k=m+1}^{\infty} A_k N_k^{-2} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} A_k < \infty.$$

Оценка ряда Σ'_2 . Положим

$$\|\Delta_{mpj}^2\|^2 = \alpha_{mpj} + \beta_{mpj},$$

$$\alpha_{mpj} = \int_{\lambda_m < |\lambda| \leq \lambda_{m-p}} |g_{mpj}(\lambda)|^2 F(d\lambda),$$

$$\beta_{mpj} = \int_{|\lambda| > \lambda_{m-p}} |g_{mpj}(\lambda)|^2 F(d\lambda),$$

$$\alpha_m = 2^{-2m} \sum_{p=1}^m p^2 \sum_{j=1}^{2^p} \alpha_{mpj}, \quad \beta_m = 2^{-2m} \sum_{p=1}^m p^2 \sum_{j=1}^{2^p} \beta_{mpj}.$$

Надо проверить, что $\sum \alpha_m < \infty$ и $\sum \beta_m < \infty$. Из (25) следует, что

$$|g_{mpj}(\lambda)| = \left| \int_{N_{mp(j-1)}}^{N_{mpj}} b(u) D(u|\lambda|) du \right| \leq C 2^{m-p},$$

$$\alpha_{mpj} \leq C 2^{2m-2p} \sum_{k=m-p}^{m-1} A_k, \quad \sum \alpha_m \leq C \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^m p^2 2^{-p} \sum_{k=m-p}^{m-1} A_k$$

$$\leq C \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sum_{m=k+1}^{\infty} (m-k)^2 2^{-(m-k)} < \infty.$$

При оценке β_m используем лемму 2 и свойство (14). При $1 \leq j \leq 2^p$, $p \leq m$

$$|g_{mpj}(\lambda)| \leq C|\lambda|^{-1}b(N_{mp(j-1)}) \leq Cb(N_m)|\lambda|^{-1}.$$

Поэтому

$$\beta_{mpj} \leq Cb^2(N_m) \int_{|\lambda| > \lambda_{m-p}} |\lambda|^{-2} F(d\lambda) \leq Cb^2(N_m) \sum_{k=0}^{m-p-1} A_k N_{k+2}^2.$$

Используя (14), получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{\infty} \beta_m &\leq C \sum_{m=2}^{\infty} b^2(N_m) 2^{-2m} \sum_{p=1}^m p^2 2^p \sum_{k=0}^{m-p-1} A_k N_{k+2}^2 \\ &= C \sum_{m=2}^{\infty} b^2(N_m) 2^{-2m} \sum_{k=0}^{m-2} A_k N_{k+2}^2 (m-k)^2 2^{m-k} \\ &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} A_k N_{k+2}^2 2^{-2k} \sum_{m=k+2}^{\infty} b^2(N_m) (m-k)^2 2^{-(m-k)} \\ &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} A_k N_{k+2}^2 b^2(N_{k+2}) 2^{-2k} \leq C \Sigma A_k < \infty, \end{aligned}$$

так как

$$N_{k+2}b(N_{k+2}) \leq CB(N_{k+2}) \leq C2^k.$$

Итак, ряды Σ_i и Σ'_i ($i = 1, 2$) сходятся, и оценка (24) доказана. Из (23) и (24) вытекает нужное представление (22) средних S_r .

Следствие 1. Если $(X(t), t \in \mathbf{R}^1)$ — стационарный процесс, то для любых невозрастающих весов $b_1(t)$ для B -средних Рисса справедливо представление (22).

При $b_1(t) = 1$ следствие 1 дает представление средних арифметических (5), (6); для процессов с дискретным временем и весов $b_1(t) = t^{-1}g(t)$, где $g(t)$ — медленно меняющаяся функция, этот результат получен в работе [2].

Теорема 2. Если для однородного поля $X(t)$ выполнено условие

$$\int_{|\lambda| > 0} \left(\ln \ln B(|\lambda|^{-1}) \right)^2 F(d\lambda) < \infty, \quad F(\{0\}) = 0, \quad (31)$$

то B -средние поля сходятся п.в., $\lim_{r \rightarrow \infty} S_r = 0$ п.в.

Условие (31) нельзя ослабить: если $w(u)$ — неубывающая функция, $w(u) = o(\ln^2 \ln u)$, то существует однородное поле, для которого

$$\int_{|\lambda| > 0} w(B(|\lambda|^{-1})) F(d\lambda) < \infty, \quad \text{но} \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} |S_r| = \infty \quad \text{п.в.}$$

Это следствие из теоремы 1 выводится, как и в работах [1], [2], из теоремы Меньшова-Радемахера о сходимости п.в. ортогонального ряда $\sum \Phi_k$, $\Phi_k = Z[\lambda_{k+1} < |\lambda| \leq \lambda_k]$, при условии

$$\sum \|\Phi_k\|^2 \ln^2 k < \infty.$$

Достаточное условие сходимости средних S_r можно выразить также через корреляционную функцию поля $K(u)$. Удобно ввести усредненную корреляционную функцию $K_1(u)$:

$$K_1(\rho) = |V_\rho|^{-1} \int_{|u| \leq \rho} K(u) du$$

и

$$K_2(\rho) = |V_\rho|^{-2} \mathbf{E} \left| \int_{|u| \leq \rho} X(u) du \right|^2,$$

где $V(\rho)$ объем шара радиуса ρ в $\mathbf{R}^k$. Пусть $B^*(\rho) = \ln^2 \ln B(\rho)$, когда $B(\rho) \geq e$, $B^*(\rho) = 0$ при $B(\rho) \leq e$.

Теорема 3. Если при $i = 1$ или $i = 2$

$$\int_e^\infty K_i(\rho) dB^*(\rho) < \infty, \quad (32)$$

то средние Рисса S_r сходятся п.в. при $r \rightarrow \infty$.

Доказательство. Так как

$$K(u) = \int_{\mathbf{R}^k} e^{iu\lambda} F(d\lambda),$$

то

$$K_1(\rho) = \int_{\mathbf{R}^k} Q(\rho|\lambda|) F(d\lambda),$$

где $Q(u) = b_k u^{-k/2} J_{k/2}(u)$.

Из свойств ядра $Q(u)$ легко следует, что

$$G(\rho) = \int_{|\lambda| \leq \rho^{-1}} Q(\rho|\lambda|) F(d\lambda) \geq C_1 \int_{|\lambda| \leq \rho^{-1}} F(d\lambda), \quad (33)$$

$$H(\rho) = \int_{|\lambda| \geq \rho^{-1}} Q(\rho|\lambda|) F(d\lambda) \leq C_2 \int_{|\lambda| \geq \rho^{-1}} |\lambda|^{-1} \rho^{-1} F(d\lambda). \quad (34)$$

В силу (14) имеем:

$$[B^*(\rho)]' = 2[B(\rho) \ln B(\rho)]^{-1} \ln \ln B(\rho) b(\rho) \leq C_3 \rho^{-1}, \quad \rho \geq \rho_0. \quad (35)$$

Из (34), (35) получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{\rho_0}^{\infty} H(\rho) dB^*(\rho) &\leq C \int_{\rho_0}^{\infty} \rho^{-2} \int_{|\lambda| \geq \rho^{-1}} |\lambda|^{-1} F(d\lambda) d\rho \\ &\leq C \int_{\mathbf{R}^k} F(d\lambda) < \infty. \end{aligned} \quad (36)$$

Так как $|K_1(\rho) - G(\rho)| \leq H(\rho)$, то из (36) и условия (32) при $i = 1$ вытекает, что

$$\int_{\rho_0}^{\infty} G(\rho) dB^*(\rho) < \infty. \quad (37)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{|\lambda| \leq e^{-1}} B^*(|\lambda|^{-1}) F(d\lambda) &= \int_{|\lambda| \leq e^{-1}} \left(\int_0^{|\lambda|^{-1}} dB^*(\rho) \right) F(d\lambda) \\ &= \int_e^{\infty} \left(\int_{|\lambda| \leq \rho^{-1}} F(d\lambda) \right) dB^*(\rho). \end{aligned}$$

В силу (33) и (37) последний интеграл конечен, и можно применить теорему 2. С другой стороны, легко проверяется оценка

$$K_2(\rho) \geq \int_{|\lambda| \leq \rho^{-1}} F(d\lambda),$$

и из условия (32) при $i = 2$ также получаем (31).

Следствие 2. Если $K(u)$ — корреляционная функция случайного поля $X(t)$ и выполнены соотношения

$$|K(u)| \leq \Phi(|u|), \quad (38)$$

$$\int_{\rho_0}^{\infty} \Phi(\rho) dB^*(\rho) < \infty, \quad (39)$$

и при некотором $\alpha < k$ функция $u^\alpha \Phi(u)$ не убывает, то $\lim_{r \rightarrow \infty} S_r$ существует почти всюду.

Действительно, из этих условий вытекает, что

$$|K_1(\rho)| \leq C \rho^{-k} \int_0^\rho u^{k-1} \Phi(u) du \leq C \Phi(\rho) \quad (\rho \geq \rho_0).$$

Таким образом, условие (39) влечет за собой условие (32) при $i = 1$.

Для важного частного случая — логарифмических средних Рисса — из теорем 2 и 3 получаем такой результат.

Обозначим логарифмические средние поля $X(t)$ через S_r^* ,

$$S_r^* = C_k (\ln r)^{-1} \int_{1 \leq |t| \leq r} |t|^{-k} X(t) dt.$$

Следствие 3. Если при некотором $\lambda_0 > 0$ выполнено условие

$$\int_{0 < |\lambda| \leq \lambda_0} (\ln \ln \ln |\lambda|^{-1})^2 F(d\lambda) < \infty, \quad F(\{0\}) = 0, \quad (40)$$

или при некотором $\varepsilon > 0$ выполнено условие

$$|K(u)| = o(\ln \ln \ln |u|)^{-(2+\varepsilon)} \quad \text{при } u \rightarrow \infty, \quad (41)$$

то $\lim_{r \rightarrow \infty} S_r^* = 0$ п.в. При этом в условии (40) нельзя заменить подынтегральную функцию на функцию $w(u) = o(\ln \ln \ln u)^2$, а в условии (41) нельзя положить $\varepsilon = 0$.

Теорема 4. Для любого однородного поля существует метод Рисса, суммирующий это поле почти всюду.

Так как $\int_{\mathbb{R}^k} F(d\lambda) < \infty$, то существует достаточно медленно стремящаяся к ∞ функция $B(u)$, производная которой $b(u)$ не возрастает, и интеграл $\int_{\mathbb{R}^k} \ln^2 \ln B(|\lambda|^{-1}) F(d\lambda)$ сходится. Положим $b_1(u) = b(u)u^{-k+1}$ и образуем B -средние поля по формуле (4). По теореме 2 они сходятся п.в.

Как и в работах [1]–[5], можно показать, что результаты данной статьи переносятся на полугруппы унитарных или нормальных операторов (зависящих от одного или нескольких параметров) или на гармонизируемые в том или ином смысле случайные поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гапошкин В. Ф. Критерии усиленного закона больших чисел для классов стационарных в широком смысле процессов и однородных случайных полей. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в. 2, с. 295–319.
2. Гапошкин В. Ф. О суммировании стационарных последовательностей методами Рисса. — Матем. заметки, 1995, т. 32, № 1, с. 653–662.
3. Гапошкин В. Ф. Об индивидуальной эргодической теореме для нормальных операторов. — Функци. анализ и его прилож., 1981, т. 15, № 2, с. 131–142.
4. Houdré C. Harmonizability, V -boundedness, $(2, p)$ -boundedness of stochastic processes. — Probab. Theory Relat. Fields, 1990, v. 84, p. 39–45.
5. Berkson E., Bourgain J., Gillespie T. A. On the a.e. convergence of ergodic averages for power-bounded operators on L^p -spaces. — Int. Eq. Operat. Th., 1991, v. 14, p. 678–715.

Поступила в редакцию
11.I.1996