Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Ильинский, Г. П. Чистяков, К вопросу о характеристике вероятностных распределений абсолютными моментами частичных сумм, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 3, 473–481

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1945>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:50:22

© 1997 г. ИЛЬИНСКИЙ А. И.*, ЧИСТЯКОВ Г. П.*

К ВОПРОСУ О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ
ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ
АБСОЛЮТНЫМИ МОМЕНТАМИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ¹⁾

В работе указаны близкие к необходимым достаточные условия для однозначного определения симметричного вероятностного распределения по последовательности абсолютных моментов сумм независимых случайных величин с этим распределением.

Ключевые слова и фразы: характеристическая функция, суммы независимых случайных величин, абсолютные моменты, условие Крамера, интеграл типа Коши.

1. Введение и формулировка результатов. Пусть F — вероятностное распределение (в.р.) на прямой с характеристической функцией (х.ф.) $\varphi(t; F)$, обладающее конечным моментом первого порядка. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые случайные величины с распределением F . При каждом натуральном n положим

$$a_n(F) = E \left| \sum_{k=1}^n X_k \right|.$$

Через F^- обозначим распределение, определяемое следующим образом: $F^-(B) = F(-B)$ для всякого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$.

Как отмечено в [1, с. 270], Л. Б. Клебанов поставил задачу нахождения условий на в.р. F_1 и F_2 , выполнение которых обеспечивает справедливость импликации

$$a_n(F_1) = a_n(F_2), \quad n = 1, 2, \dots \implies F_1 = F_2. \quad (1)$$

М. В. Неупокоева [2] доказала, что достаточно потребовать, чтобы в.р. F_j были симметричными ($F_j^- = F_j$, $j = 1, 2$) и обладали монотонно убывающими на полуоси $(0, \infty)$ характеристическими функциями. М. Ш. Браверман [3] показал, что достаточны такие условия: в.р. F_j —

*Физико-технический институт низких температур АН Украины, 310164 Харьков, Украина.

¹⁾Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Сороса U9S200.

симметричные, удовлетворяют условию Крамера

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |\varphi(t; F_j)| < 1, \quad (2)$$

х.ф. $\varphi(t; F_1)$ аналитична в окрестности точки $t = 0$. Причем, как показано в работе [1], условие (2) существенно. Там же приведены другие условия, достаточные для справедливости импликации (1).

В [1] сформулирован следующий вопрос И. А. Ибрагимова: возможно ли, чтобы для двух разных распределений F_1 и F_2 ($F_1 \neq F_2$, $F_1 \neq F_2^-$) выполнялись условия $a_n(F_1) = a_n(F_2)$, $n = 1, 2, \dots$, и в то же время каждое из этих распределений удовлетворяло условию Крамера (2)? Там же высказано предположение о том, что пример таких распределений F_1 и F_2 невозможно построить, если дополнительно потребовать, чтобы F_1 и F_2 были симметричными. Мы покажем, что ответ на вопрос И. А. Ибрагимова положительный даже в классе симметричных в.р. (примеры 1 и 2, п. 3).

Мы также указываем новые условия, достаточные для справедливости импликации (1). Обозначим через $\mathcal{C}$ множество в.р. на $\mathbf{R}$ с конечным моментом первого порядка, удовлетворяющих условию Крамера (2) и такому условию: для некоторого $b > 0$ (зависящего от F) $\operatorname{Im} \varphi(t; F) = 0$ при $t \in [-b, b]$ и $\varphi(t; F)$ строго монотонно убывает на отрезке $[0, b]$.

Пусть $D_{F,a}$ — замыкание множества $\{\varphi(t; F) : t \in \mathbf{R} \setminus (-a, a)\}$ в естественной топологии комплексной плоскости. Для $F \in \mathcal{C}$ положим:

$$\begin{aligned} \alpha(F) = \sup \{ a > 0 : & 1) \operatorname{Im} \varphi(t; F) = 0, \quad t \in [0, a]; \\ & 2) \varphi(t; F) \text{ строго монотонно убывает на } [0, a]; \\ & 3) [\varphi(a; F), 1] \cap D_{F,a} = \{\varphi(a; F)\} \}. \end{aligned}$$

Обозначим через U (соответственно, U_0) множество тех в.р. $F \in \mathcal{C}$, х.ф. $\varphi(t; F)$ которых продолжается с отрезка $[-\alpha(F), \alpha(F)]$ (соответственно, с любого сколь угодно малого отрезка $[-a, a]$) на всю ось как положительно определенная функция единственным образом. Отметим, что $\mathcal{C} \supset U \supset U_0$. В класс U_0 входят симметричные в.р. с аналитическими в окрестности нуля х.ф., удовлетворяющими условию (2), но не исчерпывают его (см. пример 3, п. 3). Основной теоремой статьи является

Теорема 1. Если $F_1, F_2 \in \mathcal{C}$ и $a_n(F_1) = a_n(F_2)$, $n = 1, 2, \dots$, то $\varphi(t; F_1) = \varphi(t; F_2)$ при $-\beta \leq t \leq \beta$, где $\beta = \min(\alpha(F_1), \alpha(F_2))$.

Из этой теоремы получаются следующие условия, достаточные для справедливости импликации (1).

Теорема 2. Если $F_1, F_2 \in U$, то выполняется (1).

Теорема 3. Если вероятностное распределение $F_1 \in U_0$ и обладает конечным моментом порядка 2, а вероятностное распределение F_2 удовлетворяет условию Крамера (2) и его характеристическая

функция вещественна в некоторой окрестности нуля, то выполняется (1).

З а м е ч а н и е 1. Пусть $p > 1$ и в.р. F обладает конечным моментом порядка p . Положим $a_n^{(p)}(F) = \mathbf{E}|\sum_{k=1}^n X_k|^p$, $n = 1, 2, \dots$. Можно поставить вопрос о нахождении условий, достаточных для справедливости импликации: $a_n^{(p)}(F_1) = a_n^{(p)}(F_2)$, $n = 1, 2, \dots \implies F_1 = F_2$ (см. [1]–[3]). Теоремы 1–3 сохраняют силу в этом случае ($p \neq$ целому четному, ср. [1]). Доказательство в этом случае почти дословно повторяет доказательство для случая $p = 1$, поэтому мы его не приводим.

З а м е ч а н и е 2. Подчеркнем, что теоремы 2 и 3 (в отличие от теоремы 1) — это теоремы о симметричных распределениях, поскольку все в.р. классов U и U_0 симметричны (так как если $\psi(t)$ — х.ф., то и $\text{Re } \psi(t)$ — х.ф.).

2. Доказательства. Доказательство теоремы 1. Будем опираться на следующую формулу, выражающую абсолютный момент случайной величины X через ее х.ф. $\varphi(t)$:

$$\mathbf{E}|X| = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \text{Re } \varphi(t)}{t^2} dt. \quad (3)$$

Пусть F_1, F_2 — в.р., удовлетворяющие условиям теоремы 1. Для краткости будем писать $\varphi_j(t)$ вместо $\varphi(t; F_j)$. Рассмотрим при комплексных z , $|z| > 1$, функции ($j = 1, 2$)

$$M_j(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-\varphi_j(t)} - \frac{1}{z-\overline{\varphi_j(t)}} \right\} \frac{dt}{t^2}. \quad (4)$$

Покажем, что функция $M_j(z)$ голоморфна в области G_j , являющейся связной компонентой области $\mathbf{C} \setminus D_{F_j, 0}$, содержащей бесконечно удаленную точку. Действительно, для $z \in G_j$

$$M_j(z) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{z-1} \int_0^\infty \frac{(1 - \text{Re } \varphi_j(t))(z+1) - (1 - |\varphi_j(t)|^2)}{(z - \varphi_j(t))(z - \overline{\varphi_j(t)})} \frac{dt}{t^2}. \quad (5)$$

Поскольку $0 \leq 1 - |\varphi_j(t)|^2 \leq 1 - (\text{Re } \varphi_j(t))^2 \leq 2(1 - \text{Re } \varphi_j(t))$, то в силу (3) и конечности первого момента в.р. F_j имеем $\int_0^\infty (1 - |\varphi_j(t)|^2) t^{-2} dt < \infty$. Поэтому интеграл в (5) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в G_j , откуда следует требуемое. Покажем теперь, что если выполнена посылка импликации (1), то $M_1(z) = M_2(z)$ при $z \in G_1 \cap G_2$. При $|z| > 1$ и $j = 1, 2$ в силу (3) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(F_j) z^{-n} &= \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \text{Re } \varphi_j^n(t)}{z^n t^2} dt \\ &= \frac{2}{\pi z} \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \text{Re } \varphi_j^n(t)}{z^n t^2} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-\varphi_j(t)} - \frac{1}{z-\overline{\varphi_j(t)}} \right\} \frac{dt}{t^2} = M_j(z). \quad (6)$$

Почленное интегрирование ряда в (6) законно, поскольку

$$\frac{1 - \operatorname{Re} \varphi_j^n(t)}{t^2} \leq n^2 \frac{1 - \operatorname{Re} \varphi_j(t)}{t^2} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (7)$$

и $\sum_{n=1}^\infty n^2 |z|^{-n} < \infty$ при $|z| > 1$. Неравенство (7) можно обосновать следующим образом. Для любого комплексного числа a такого, что $|a| \leq 1$, имеем:

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{Re}(a^n) &= \operatorname{Re}[(1-a)(1+a+\dots+a^{n-1})] \\ &= \operatorname{Re}(1-a) \operatorname{Re}(1+a+\dots+a^{n-1}) \\ &\quad + \operatorname{Im} a (\operatorname{Im} a + \operatorname{Im} a^2 + \dots + \operatorname{Im} a^{n-1}) \\ &\leq (1 - \operatorname{Re} a) n + |\operatorname{Im} a|^2 \frac{n(n-1)}{2}, \end{aligned}$$

так как $|\operatorname{Im} a^k| \leq k |\operatorname{Im} a|$. Применяя эту оценку с $a = \varphi_j(t)$ и пользуясь хорошо известным неравенством $|\operatorname{Im} \varphi_j(t)|^2 \leq 2(1 - \operatorname{Re} \varphi_j(t))$, получим (7).

Поскольку $a_n(F_1) = a_n(F_2)$, $n = 1, 2, \dots$, то левые части (6) для $j = 1, 2$ совпадают при $|z| > 1$. Поэтому $M_1(z) = M_2(z)$ при $|z| > 1$, и, значит, при $z \in G_1 \cap G_2$.

Разобьем интеграл в (4) на сумму двух интегралов, взятых по промежуткам $[0, \alpha_j]$ и $[\alpha_j, \infty)$. Поскольку $\varphi_j(t) = \overline{\varphi_j(t)}$ при $t \in [0, \alpha_j]$ (см. определения класса $\mathcal{C}$ и числа $\alpha_j = \alpha(F_j)$), то функцию $M_j(z)$ можно записать в виде

$$M_j(z) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{z-1} \int_0^{\alpha_j} \frac{1}{z-\varphi_j(t)} \frac{1-\varphi_j(t)}{t^2} dt + B_j(z) = A_j(z) + B_j(z),$$

где функция $B_j(z)$ — голоморфна на интервале $(\varphi_j(\alpha_j), 1)$. Интеграл $A_j(z)$ преобразуем, сделав замену $u = \varphi_j(t)$. Обозначим $f_j(u)$ ($\varphi_j(\alpha_j) \leq u \leq 1$) функцию, обратную к функции $\varphi_j(t)$, рассматриваемой на отрезке $[0, \alpha_j]$. Поскольку $F_j \in \mathcal{C}$, то $f_j(u)$ корректно определена. Простые вычисления показывают, что

$$A_j(z) = \frac{2}{\pi(z-1)} \int_{\varphi_j(\alpha_j)}^1 (1-u) \frac{f_j'(u)}{f_j^2(u)} \frac{du}{u-z}.$$

Положим $\Delta = \max(\varphi_1(\alpha_1), \varphi_2(\alpha_2))$. Тогда равенство $M_1(z) = M_2(z)$ ($z \in G_1 \cap G_2$) означает, что для $z = x + iy$, $\Delta < x < 1$, и достаточно малых по модулю $y \neq 0$ выполняется $A_1(z) + B_1(z) = A_2(z) + B_2(z)$. Положим в этом равенстве сначала $z = x + i\varepsilon$, а потом $z = x - i\varepsilon$; из первого равенства вычтем второе и в полученном равенстве перейдем к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$. В силу голоморфности функций $B_j(z)$ в точках

интервала $(\Delta, 1)$ имеем: $B_j(x + i\varepsilon) - B_j(x - i\varepsilon) \rightarrow 0$ ($\varepsilon \downarrow 0$), $j = 1, 2$, $\Delta < x < 1$. Далее воспользуемся следующим результатом.

Теорема А [4, с. 190]. Пусть $g(x)$ — суммируемая на $\mathbb{R}$ функция. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x) dx}{x - x_0 - i\varepsilon} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x) dx}{x - x_0 + i\varepsilon} \right\} = g(x_0)$$

для почти всех (по мере Лебега) точек $x_0 \in \mathbb{R}$.

В силу теоремы А имеем: $A_j(x + i\varepsilon) - A_j(x - i\varepsilon) \rightarrow -4if'_j(x)/f_j^2(x)$ ($\varepsilon \downarrow 0$) для почти всех $x \in (\Delta, 1)$. Поэтому $f'_1(x)/f_1^2(x) = f'_2(x)/f_2^2(x)$ для почти всех $x \in (\Delta, 1)$. Интегрируя это равенство по x от x_0 до x , где $x_0, x \in (\Delta, 1)$, получим $1/f_1(x) = 1/f_2(x) + C$, $x \in (\Delta, 1)$, где C — константа. Полагая $x = \varphi_2(t)$, получим, что при $t \in (0, \tilde{\beta})$

$$\varphi_2(t) = \varphi_1\left(\frac{t}{1 + Ct}\right), \quad (8)$$

где $\tilde{\beta} = \min(f_1(\Delta), f_2(\Delta))$. Легко видеть, что тогда (8) выполняется при $t \in (0, \beta)$, где $\beta = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. Теперь покажем, что постоянная C в (8) равна 0. Это следует из такой леммы.

Лемма 1. Пусть $G_1, G_2 \in \mathcal{C}$, $a_n(G_1) = a_n(G_2)$ для бесконечно многих натуральных n . Тогда существует последовательность $\{t_k\}$ такая, что $t_k \downarrow 0$ и $\varphi(t_k, G_1) = \varphi(t_k, G_2)$.

Доказательство леммы 1. Предположим, что утверждение леммы не имеет места. Тогда найдутся такое число $\gamma > 0$ и такие в.р. G_1 и $G_2 \in \mathcal{C}$, что для их х.ф. $\chi_j(t) = \varphi(t; G_j)$ верно неравенство $\chi_1(t) < \chi_2(t)$ при $t \in (0, \gamma)$. Можно считать $\gamma > 0$ столь малым, что $\chi_j(t) > 0$ при $t \in (0, \gamma)$, $j = 1, 2$. Обозначим через d такое число, что $\sup_{t \geq \gamma} |\chi_j(t)| \leq d$, $j = 1, 2$. Поскольку выполняется условие Крамера (2), то $d < 1$. Пусть $\tilde{N} = \{n \in \mathbb{N}: a_n(G_1) = a_n(G_2)\}$. В силу условия леммы $\tilde{N}$ — бесконечное множество и для $n \in \tilde{N}$ интегралы $\int_0^\infty t^{-2}(1 - \operatorname{Re} \chi_j^n(t)) dt$ одинаковы при $j = 1$ и 2 . Значит,

$$\int_0^\gamma t^{-2}(\chi_2^n(t) - \chi_1^n(t)) dt = \int_\gamma^\infty t^{-2} \operatorname{Re}(\chi_1^n(t) - \chi_2^n(t)) dt. \quad (9)$$

Модуль интеграла, стоящего в правой части равенства (9), оценивается сверху величиной

$$\int_\gamma^\infty t^{-2}(|\chi_1(t)|^n + |\chi_2(t)|^n) dt \leq \frac{2}{\gamma} d^n. \quad (10)$$

Оценим снизу интеграл, стоящий в левой части (9). Фиксируем число

γ_1 такое, что $0 < \gamma_1 < \gamma$ и $\min_{0 \leq t \leq \gamma_1} \chi_1(t) \geq (d+1)/2$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\gamma_1} t^{-2} (\chi_2^n(t) - \chi_1^n(t)) dt &\geq \int_0^{\gamma_1} t^{-2} \chi_1^n(t) \left[\left(\frac{\chi_2(t)}{\chi_1(t)} \right)^n - 1 \right] dt \\ &\geq \left(\frac{d+1}{2} \right)^n n \int_0^{\gamma_1} t^{-2} \ln \frac{\chi_2(t)}{\chi_1(t)} dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (9)–(11) получаем

$$0 < \int_0^{\gamma_1} t^{-2} \ln \frac{\chi_2(t)}{\chi_1(t)} dt \leq \frac{2}{\gamma n} \left(\frac{2d}{d+1} \right)^n \rightarrow 0, \quad n \in \tilde{\mathbb{N}}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Так как интеграл в (12) не зависит от n , то получаем противоречие, доказывающее справедливость леммы 1.

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что в доказательстве леммы не использовалось условие монотонности х.ф. $\varphi(t; G_j)$ в правой полукрестности нуля.

Продолжим доказательство теоремы 1. Так как х.ф. $\varphi_j(t)$, $j = 1, 2$, удовлетворяют всем условиям леммы, то существует последовательность $\{t_k\}$, $t_k \downarrow 0$, такая, что $\varphi_1(t_k) = \varphi_1(t_k/(1+Ct_k))$. В силу строгой монотонности функций φ_1 в правой полукрестности нуля это возможно только при $C = 0$. Итак, из (8) получаем: $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ при $t \in [-\beta, \beta]$. Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 4. В случае $p > 1$ ($p \neq$ целому четному) функции $M_j(z)$ надо определять следующим образом:

$$\begin{aligned} M_j(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \sum_{k=0}^{[p]-1} \frac{t^k}{k!} \frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{1}{z - \varphi_j(t)} + \frac{1}{z - \overline{\varphi_j(t)}} \right) \right\} \Big|_{t=0} \\ - \frac{1}{z - \varphi_j(t)} - \frac{1}{z - \overline{\varphi_j(t)}} \Big\} \frac{dt}{t^{p+1}}. \end{aligned}$$

Теорема 2 является очевидным следствием теоремы 1. Отметим, что теорема 2 содержит в себе результат М. В. Неупокоевой [2], цитированный выше, ибо если $\varphi(t; F_j) \downarrow$ на $[0, \infty)$, то $\alpha(F_j) = +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Пусть $\varphi_j(t) = \varphi(t; F_j)$. В силу леммы 1 и замечания 3 существует такая последовательность $\{t_k\}$, $t_k \downarrow 0$, что $\varphi_1(t_k) = \varphi_2(t_k)$. Отсюда следует, что $1 - \varphi_2(t_k) = O(t_k^2)$, поскольку, в силу условия теоремы, $1 - \varphi_1(t_k) = O(t_k^2)$. Значит, в.р. F_2 обладает конечным моментом порядка 2. Так как F_2 — невырожденное в.р., то $\varphi_2(t)$ строго монотонно убывает в правой полукрестности нуля. Значит, $F_2 \in \mathcal{C}$. В силу теоремы 1 отсюда следует, что $F_1 = F_2$.

Отметим, что теорема 3 содержит в себе результат М. Ш. Бравермана [3], цитированный во введении. Действительно, нужно только заметить, что если вещественная х.ф. $\varphi(t)$, $\varphi(t) \neq 1$, дважды дифференцируема в нуле, то она строго монотонно убывает в некоторой правой

полуокрестности нуля. Единственность продолжения $\varphi(t)$ с любого отрезка, содержащего нуль, на всю ось как положительно определенной функции следует из аналитичности $\varphi(t)$ в окрестности нуля.

З а м е ч а н и е 5. Легко видеть, что в теореме 3 требование конечности момента порядка 2 можно наложить на F_2 , а не на F_1 .

3. Примеры. П р и м е р 1. Для любых натурального числа m и положительного числа A существуют в.р. F_1 и F_2 такие, что

1) F_1 и F_2 обладают конечными моментами до порядка m включительно,

$$2) F_1 \neq F_2, F_1 \neq F_2^-,$$

$$3) a_n(F_1) = a_n(F_2) \text{ при всех } n \in \mathbf{N},$$

$$4) \varphi(t; F_j) = 0 \text{ при } |t| \geq A \ (j = 1, 2).$$

П р и м е р 2. Для любых натурального m и положительного A существуют в.р. F_1 и F_2 , удовлетворяющие условиям 1)–4) примера 1, а также условию

$$5) F_j = F_j^- \ (j = 1, 2).$$

Конечно, ответ на сформулированные во введении вопросы дает и один пример 2. Мы приводим два примера, так как при их построении используются разные соображения. Построение обоих примеров основывается на следующей лемме.

Лемма 2. Пусть $\chi(t)$ — характеристическая функция, удовлетворяющая условиям:

А) плотность соответствующего распределения $p_\chi(x)$ непрерывна и $p_\chi(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$;

Б) существуют натуральное $N > 1$ и положительное x_0 такие, что $p_\chi(x) \geq D|x|^{-N}$ при $|x| \geq x_0$, где D — положительная постоянная.

Пусть $\gamma(t)$ — комплекснозначная функция на $\mathbf{R}$, удовлетворяющая условиям:

а) $\gamma \in C^N(\mathbf{R})$, где N — то же, что в Б);

б) $\gamma(-t) = \bar{\gamma}(t)$ при всех $t \in \mathbf{R}$, $\gamma(0) = 0$;

в) $\gamma^{(k)}(t) \in L^1(\mathbf{R})$ и $\gamma^{(k)}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty, k = 0, 1, 2, \dots, N$.

Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ функция $\varphi(t) = \chi(t) + \varepsilon\gamma(t)$ является характеристической функцией.

Доказательство леммы 2. Надо убедиться в существовании $\varepsilon_0 > 0$ такого, что при всех $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ выполняется $p_\varphi(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-itx) \varphi(t) dt \geq 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$. Имеем $p_\varphi(x) = p_\chi(x) + \varepsilon p_\gamma(x)$, причем $p_\gamma(x)$ — вещественнозначная функция. Интегрирование по частям показывает, что $|p_\gamma(x)| = O(|x|^{-N}), x \rightarrow \pm\infty$. Учитывая непрерывность функций $p_\chi(x)$ и $p_\gamma(x)$, убеждаемся в существовании требуемого ε_0 .

Переходим к построению примера 1. Обозначим k такое натуральное число, что $2k \geq m + 2$. Положим $a = A/(4k)$. Пусть $\theta(t) = (1 - t/a)^2$ при $0 \leq t \leq a$, $\theta(t) = 0$ при $t > a$, $\theta(t) = \theta(-t)$ при $t < 0$. Функция $\theta(t)$

является х.ф. в.р. с плотностью $p_\theta(x) = 2(\pi a)^{-1}x^{-2}(1 - (ax)^{-1} \sin ax)$ при $x \neq 0$, $p_\theta(0) = a(3\pi)^{-1}$. Заметим, что $p_\theta(x) > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$ и $p_\theta(x) \sim 2(\pi a)^{-1}x^{-2}$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Положим $\chi(t) = C\theta^{k*}(t)$, где $\theta^{k*}(t)$ есть k -кратная свертка функции $\theta(t)$ с собой, а C — такое положительное число, что $\chi(0) = 1$. Тогда $\chi(t)$ — х.ф. плотности $p_\chi(x) = C(2\pi)^{k-1}p_\theta^k(x)$, причем выполняются условия А), Б) леммы 2 с $N = 2k$. Заметим, что $\chi(t) > 0$ при $|t| < A/2$, $\chi(t) = 0$ при $|t| \geq A/2$.

Пусть $\rho(t)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям: $\rho(t) \in C^\infty(\mathbf{R})$, $\rho(t) > 0$ при $t \in (0, A/4)$, $\rho(t) = 0$ при $t \notin (0, A/4)$. Пусть $\alpha \in \mathbf{R}$ и $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$. Положим для $j = 1, 2$

$$\gamma_j(t) = \begin{cases} e^{i\alpha} \rho\left(t - \frac{A}{2}\right), & t \in \left[\frac{A}{2}, \frac{3A}{4}\right], \\ \exp((-1)^j i\alpha) \rho\left(t - \frac{3A}{4}\right), & t \in \left[\frac{3A}{4}, A\right], \\ 0, & t \in \left[0, \frac{A}{2}\right] \cup [A, \infty), \\ \bar{\gamma}_j(-t), & t \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Функции $\gamma_j(t)$ удовлетворяют условиям а)-в) леммы 2. Поэтому при всяком достаточно малом по модулю вещественном ε функции $\varphi_j(t) = \chi(t) + \varepsilon\gamma_j(t)$ будут характеристическими функциями. Обозначим через F_j такие в.р., что $\varphi(t; F_j) = \varphi_j(t)$, $j = 1, 2$. Тогда утверждения 1), 2), 4) примера 1 выполняются очевидным образом. Справедливость утверждения 3) вытекает из формулы (3) и из того, что $\operatorname{Re} \varphi_1^n(t) \equiv \operatorname{Re} \varphi_2^n(t)$ при всех $n \in \mathbf{N}$.

Приведем построение примера 2. Пусть $\chi(t)$ — х.ф. из примера 1. Пусть функция $r(u)$ удовлетворяет условиям: $r(u) \in C^\infty(\mathbf{R})$, $r(u) > 0$ при $u \in (0, 1/(2A))$, $r(u) = 0$ при $u \notin (0, 1/(2A))$. Определим функции $r_j(u)$, $j = 1, 2$, так:

$$r_1(u) = \begin{cases} r\left(u - \frac{1}{A}\right), & u \in \left[\frac{1}{A}, \frac{3}{2A}\right], \\ -r\left(u - \frac{3}{2A}\right), & u \in \left[\frac{3}{2A}, \frac{2}{A}\right], \\ 0, & u \in \left[0, \frac{1}{A}\right] \cup \left[\frac{2}{A}, \infty\right], \\ r_1(-u), & u \in (-\infty, 0). \end{cases} \quad r_2(u) = -r_1(u).$$

Положим $\gamma_j(t) = r_j(1/t)$, $\varphi_j(t) = \chi(t) + \varepsilon\gamma_j(t)$. Применяя лемму 2, видим, что функции $\varphi_j(t)$ являются х.ф. при вещественном ε , достаточно малом по модулю. Пусть F_1 и F_2 — распределения с х.ф. $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ соответственно. Выполнение утверждений 1), 2), 4), 5) для таких распределений очевидно. Справедливость утверждения 3) вытекает из того,

что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_n(F_j) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \varphi_j^n(t)}{t^2} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{A/2} \frac{1 - \chi^n(t)}{t^2} dt + \frac{4}{\pi A} + \frac{2\varepsilon^n}{\pi} \int_{1/A}^{2/A} r_j^n(u) du, \\ \int_{1/A}^{2/A} r_1^n(u) du &= \int_{1/A}^{2/A} r_2^n(u) du. \end{aligned}$$

Пример 3. Приведем примеры в.р. из класса U_0 с неаналитическими в точке 0 характеристическими функциями. Такие в.р. фигурируют в теореме 3. Нам понадобится результат, отмеченный в [5, с. 215], который является следствием одного результата, доказанного П. Кусисом [6, с. 236].

Теорема Б. Пусть $\{\lambda_n\}, \{l_n\}$ — две последовательности положительных чисел, $\lambda_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$) и промежутки $(\lambda_n, \lambda_n + l_n)$ попарно не пересекаются. Пусть вероятностное распределение F сосредоточено на множестве $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^\infty (\lambda_n, \lambda_n + l_n)$. Если выполняется условие $\sum_{n=1}^\infty (l_n/\lambda_n)^2 = \infty$, то характеристическая функция $\varphi(t; F)$ допускает единственное продолжение с каждого конечного интервала $(-l, l)$, $l > 0$.

Эта теорема позволяет легко привести примеры симметричных в.р. $F \in U_0$ с бесконечным третьим моментом. Положим для каждого натурального n : $\lambda_n = e^n$, $l_n = e^{n-1}/\sqrt{n}$. Обозначим $E = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \{(\lambda_n, \lambda_n + l_n) \cup (-\lambda_n - l_n, -\lambda_n)\}$. Пусть F — в.р. с плотностью, равной $C|x|^{-7/2}$ при $x \in E$ и нулю при $x \notin E$. Легко проверить, что момент порядка 2 в.р. F конечен, а момент порядка 3 бесконечен. $F \in U_0$ в силу теоремы Б.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Браверман М. Ш., Маллоус К. Л., Шенн Л. А. Характеризация вероятностных распределений абсолютными моментами частичных сумм. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 2, с. 270–285.
2. Неупокоева М. В. О восстановлении распределения по моментам сумм независимых случайных величин. — В сб.: Проблемы устойчивости стохастических моделей: Тр. семинара. М.: ВНИИСИ, 1989, с. 104–108.
3. Braverman M. Sh. A characterization of probability distributions by moments of sums of independent random variables. — J. Theor. Probab., 1994, v. 7, № 1, p. 187–198.
4. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.-Л.: Гостехиздат, 1950, 336 с.
5. Кацнельсон В. Э. Методы J -теории в континуальных интерполяционных задачах анализа. Ч. I. Харьков, 1982, 249 с. ЦИОНТ ПИК ВИНТИ № 39.
6. Koosis P. The Logarithmic Integral. I. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988, 606 p.

Поступила в редакцию
19.VIII.1996