Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Пагурова, Об асимптотической мощности критерия обнаружения выбросов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 3, 482–495

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1947>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:36:35

© 1997 г.

ПАГУРОВА В. И.*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ МОЩНОСТИ КРИТЕРИЯ ОБНАРУЖЕНИЯ ВЫБРОСОВ¹⁾

Для двупараметрического семейства распределений, зависящего от неизвестных параметров сдвига и масштаба, исследуется асимптотическая мощность критерия обнаружения выбросов, впервые предложенного в работе [1]. Среди других полезных характеристик критерия исследуется вероятность ошибочного принятия «хорошего» наблюдения в качестве выброса и вероятность обнаружения «плохого» наблюдения в качестве выброса. Для устранения маскирующего эффекта предлагается использовать робастные оценки параметров сдвига и масштаба, имеющие высокую пороговую точку и ограниченную функцию влияния, в терминологии Хампеля [8], [9]. Отметим, что в работах [4], [6] исследуется скорость сходимости нормированного максимума независимых одинаково распределенных случайных величин для однопараметрических семейств распределений, зависящих от неизвестного параметра сдвига. Работа [5] посвящена исследованию асимптотических свойств критерия обнаружения выбросов для эллиптического семейства многомерных распределений.

Ключевые слова и фразы: критерий для выбросов, асимптотическая мощность, двупараметрическое семейство распределений.

1. Построение статистической процедуры. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы, X_i имеет непрерывную функцию распределения (ф.р.) $F((x - \theta_{1i})/\theta_2)$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим гипотезу $H_0: \theta_{11} = \theta_{12} = \dots = \theta_{1n}$, против альтернативы H_1 : среди $X_1, \dots, X_n$ имеются наблюдения, для которых $\theta_{1i} > \theta_1$, для остальных наблюдений имеем $\theta_{1i} = \theta_1$; число наблюдений, для которых $\theta_{1i} > \theta_1$, не более k . Параметры $(\theta_{11}, \dots, \theta_{1n}, \theta_1, \theta_2)$ неизвестны, число $k \geq 1$ задано.

Наблюдение X_i , для которого $\theta_{1i} > \theta_1$, будем называть наблюдением, засоряющим выборку (н.з.в.).

Предположим, что при гипотезах H_0 и H_1 и фиксированном k существуют n^ϵ - и n^δ -состоятельные оценки $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ для θ_1 и θ_2 соответственно, построенные на основе данных $X_1, \dots, X_n$ (будем считать, что оценка $T_n(X)$ является n^ϵ -состоятельной оценкой для параметра θ , если

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Воробьевы Горы, 119899 Москва, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 96-01-01919.

$n^\varepsilon(T_n(X) - \theta)$ ограничена по вероятности при $n \rightarrow \infty$). В качестве таких оценок следует использовать робастные оценки, сохраняющие свойство состоятельности в присутствии наблюдений, засоряющих выборку. Асимптотические свойства робастных оценок исследуются в монографиях [8], [9].

Введем величины

$$Y_i = \frac{X_i - \theta_1}{\theta_2}, \quad Z_i = \frac{X_i - \hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2},$$

$i = 1, \dots, n$, $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \dots \leq Y_{(n)}$ и $Z_{(1)} \leq Z_{(2)} \leq \dots \leq Z_{(n)}$ означают соответствующие вариационные ряды.

Пусть $\Delta = \min(\varepsilon, \delta)$, $y = y_n(t)$ означает корень уравнения

$$F(y) = 1 - \frac{t}{n}. \quad (1)$$

Лемма 1.1. Если для любого фиксированного $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[1 - F\left(y \pm \frac{y}{xn^\Delta}\right) \right] = t, \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[1 - F\left(y \pm \frac{1}{xn^\Delta}\right) \right] = t, \quad (3)$$

тогда при справедливости гипотезы H_0 , любом целом фиксированном $m \geq 0$ и $n \rightarrow \infty$

$$\frac{Z_{(n-m)} - y}{Y_{(n-m)} - y} \xrightarrow{P} 1. \quad (4)$$

Доказательство леммы 1.1 и всех последующих утверждений помещено в приложение.

Следствие 1.1. Если при некоторых $a_n > 0$ и b_n величина $(Y_{(n)} - b_n)/a_n$ при $n \rightarrow \infty$ имеет предельное невырожденное распределение, тогда

1) условие (2) эквивалентно условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{b_n}{a_n n^\Delta} \right] = 0; \quad (5)$$

2) условие (3) эквивалентно условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n n^\Delta) = \infty. \quad (6)$$

Обозначим $p_{ii} = 0$, $i \geq 1$, $p_{10} = \exp(-t)$, введем величины p_{kj} с помощью рекуррентного соотношения $p_{kj} = \exp(-t) \sum_{i=0}^j p_{k-1,i} t^{j-i} / (j-i)!$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, величину t найдем из условия

$$\sum_{j=0}^{k-1} p_{kj} = 1 - \alpha. \quad (7)$$

Теорема 1.1. Если выполняются условия (2) и (3), $y_{ni} = y_n(ti)$, $i = 1, \dots, k$, определяются из уравнения (1), а t удовлетворяет соотношению (7), то при справедливости гипотезы H_0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{Z_{(n)} < y_{n1}, Z_{(n-1)} < y_{n2}, \dots, Z_{(n-k+1)} < y_{nk}\} = 1 - \alpha.$$

Теорема 1.1 позволяет построить следующую статистическую процедуру проверки гипотезы H_0 против H_1 .

Зададим уровень значимости α и рассмотрим вектор $(Z_{(n)}, Z_{(n-1)}, \dots, Z_{(n-k+1)})$. Если событие $\{Z_{(n-j+1)} \geq y_{nj}\}$ имеет место хотя бы для одного $j \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$, то гипотеза H_0 отвергается в пользу альтернативы H_1 , при этом все значения $j \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$, для которых выполняется событие $\{Z_{(n-j+1)} \geq y_{nj}\}$, определяют выбросы $X_{(n-j+1)}$. В предположениях теоремы 1.1 при $n \rightarrow \infty$ уровень значимости критерия стремится к α .

2. Асимптотические свойства оценок при альтернативе. В дальнейшем будем считать, что $k = 2$. Случай $k > 2$ рассматривается аналогичным образом. Введем события

$$D_0 = \{Z_{(n)} < y_{n1}, Z_{(n-1)} < y_{n2}\}, \quad D_{11} = \{Z_{(n)} \geq y_{n1}, Z_{(n-1)} < y_{n2}\}, \\ D_{12} = \{Z_{(n)} < y_{n1}, Z_{(n-1)} \geq y_{n2}\}, \quad D_{13} = \{Z_{(n)} \geq y_{n1}, Z_{(n-1)} \geq y_{n2}\},$$

$D_1 = \bar{D}_0 = D_{11} \cup D_{12} \cup D_{13}$. Всюду далее P с индексом 0 или 1 означает вероятность события в условиях справедливости соответствующей гипотезы; например, $P_0\{A\}$ означает вероятность события A при гипотезе H_0 .

Альтернативу H_1 представим в виде $H_1 = H_{11} \cup H_{12}$, где

$$H_{1j} = \{\text{среди } X_1, \dots, X_n \text{ имеется ровно } j \text{ наблюдений с} \\ \theta_{1i} = \theta_2(y_{n1} + \tau) + \theta_1, \text{ остальные наблюдения} \\ \text{имеют } \theta_{1i} = \theta_1\}, \quad j = 1, 2.$$

Постоянную τ найдем из того условия, что предел вероятности ошибки второго рода не превосходит β , $\lim_{n \rightarrow \infty} P_1\{D_0\} \leq \beta$. Выбор альтернативы такого рода диктуется тем, что существует нетривиальный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} P_1\{D_0\}$.

Далее мы рассмотрим пример оценки параметров (θ_1, θ_2) , являющейся $\sqrt{n}$ -состоятельной как при гипотезе H_0 , так и при альтернативе $H_1 = H_{11} \cup H_{12}$. Для этого нам понадобится следующая

Лемма 2.1. Если $f(x) = F'(x)$ непрерывно дифференцируема в окрестностях точек $\zeta_i = F^{-1}(\lambda_i)$, $f(\zeta_i) \neq 0$, $n_i = [n\lambda_i] + 1$, $i = 1, 2$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, то при гипотезе $H_1 = H_{11} \cup H_{12}$ совместное асимптотическое распределение вектора

$$(\sqrt{n}(Y_{(n_1)} - \zeta_1), \sqrt{n}(Y_{(n_2)} - \zeta_2))$$

при $n \rightarrow \infty$ является двумерным нормальным распределением с вектором нулевых математических ожиданий и ковариационной матрицей

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1(1-\lambda_1)}{f^2(\zeta_1)} & \frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{f(\zeta_1)f(\zeta_2)} \\ \frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{f(\zeta_1)f(\zeta_2)} & \frac{\lambda_2(1-\lambda_2)}{f^2(\zeta_2)} \end{pmatrix}.$$

В условиях леммы 2.1 для симметричных распределений выборочная медиана $\text{med}_{1 \leq i \leq n} X_i = X_{([n/2]+1)}$ и абсолютное медианное отклонение

$$S_n = 1.49 \text{ med}_{1 \leq i \leq n} |X_i - \text{med}_{1 \leq j \leq n} X_j|$$

(симметризованная версия выборочного интерквартильного размаха $(X_{([3n/4])} - X_{([n/4]+1)}) / (F^{-1}(0.75) - F^{-1}(0.25))$, в которой коэффициент 1.49 обеспечивает состоятельность оценки в случае нормального распределения) являются $\sqrt{n}$ -состоятельными оценками θ_1 и θ_2 соответственно как при гипотезе H_0 , так и при альтернативе $H_1 = H_{11} \cup H_{12}$. Кроме того, векторная оценка $(\text{med}_{1 \leq i \leq n} X_i, S_n)$ является примером робастной оценки для (θ_1, θ_2) , устойчивой к присутствию в выборке н.з.в., имеющей высокую пороговую точку и ограниченную функцию влияния [8], [9].

Обозначим (А) класс распределений $F(x)$, для которых при $x \rightarrow \infty$

$$1 - F(x) \sim ax^c \exp(-bx^\gamma), \quad a, b, \gamma > 0, \quad |c| < \infty;$$

символом (В) обозначим класс распределений $F(x)$, для которых при $x \rightarrow \infty$

$$1 - F(x) \sim ax^{-\gamma}, \quad a, \gamma > 0.$$

Тогда для класса (А) при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$y_n(t) \sim \left(\frac{1}{b} \ln \frac{n}{t} \right)^{1/\gamma}, \quad (8)$$

для класса (В) при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$y_n(t) \sim \left(\frac{an}{t} \right)^{1/\gamma}. \quad (9)$$

Заметим, что при $n \rightarrow \infty$ для класса (А) выполняются соотношения $b_n/a_n = O(\ln n)$ и $a_n = O((\ln n)^{(1-\gamma)/\gamma})$, для класса (В) выполняются условия $b_n = 0$ и $a_n = O(n^{1/\gamma})$ (см., например, [2]), так что условия (5) и (6) выполняются как для класса (А), так и для класса (В).

В дальнейшем мы будем исследовать предельное при $n \rightarrow \infty$ поведение вероятности $P_1\{D_1\}$, используя оценки $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$, сохраняющие свойства состоятельности при альтернативе $H_1 = H_{11} \cup H_{12}$. Для проведения этого исследования нам потребуется следующая

Лемма 2.2. Пусть величина y определяется соотношением (1), $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ означают n^ε - и n^δ -состоятельные оценки θ_1 и θ_2 соответственно при альтернативе $H_1 = H_{11} \cup H_{12}$, тогда при альтернативе $H_1 = H_{11} \cup H_{12}$ для распределений из класса (В) при условии $\Delta\gamma > 1$ и для распределений из класса (А) при любом целом фиксированном $m \geq 0$ и $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{Z_{(n-m)} - y}{Y_{(n-m)} - y} \xrightarrow{P} 1.$$

3. Меры, характеризующие качество критерия. При $k = 2$ в предположениях теоремы 1.1 вероятность $P_0\{D_0\} \rightarrow \exp(-2t)(1+t) n \rightarrow \infty$. Следовательно, величина t является решением уравнения $\exp(-2t)(1+t) = 1 - \alpha$. Таким образом, при $\alpha \rightarrow 0$ имеем $t = \alpha + O(\alpha^3)$.

Наблюдение, засоряющее выборку, обозначим X_c . Введем события

$$E_i = \{\text{существуют ровно } i \text{ н.з.в., } X_{c_j} = X_{(n-j+1)}, \quad j = 1, i\} \\ i = 1, 2, \quad E = E_1 \cup E_2.$$

Нас будет интересовать предельное при $n \rightarrow \infty$ значение мощности

$$I_1 = \lim P_1\{D_1\}$$

при альтернативах, указанных в п. 2, а также предельное значение I_2 вероятности того, что критерий ошибочно признает «хорошее» наблюдение в качестве н.з.в., т.е. значение

$$I_2 = \lim P_1\{D_1\} - \lim P_1\{D_1 E\}.$$

Обозначим

$$I_3 = \lim P_1\{D_1|E\}, \quad I_4 = \lim P_1\{E\}$$

— предельное значение вероятности того, что н.з.в. обнаруживается как выброс. Следуя монографии [7], будем считать, что всякий разумный критерий должен иметь большие значения величин I_1, I_3, I_4 и малое значение I_2 .

Представляют интерес также частные меры

$$I_5 = \lim P_{12}\{D_{11}|E\}, \quad I_6 = \lim P_{11}\{D_{11}|E\}, \quad I_7 = \lim P_{12}\{D_{12}|E\}, \\ I_8 = \lim P_{11}\{D_{12}|E\}, \quad I_9 = \lim P_{12}\{D_{13}|E\}, \quad I_{10} = \lim P_{11}\{D_{13}|E\}.$$

В дальнейшем мы разделим все распределения из классов (А) и (В) на три подгруппы. Для каждой из трех подгрупп будут даны доказательства существования указанных выше пределов и вычислены значения этих пределов или найдены границы, в которых они лежат. Этим исследованиям посвящены пп. 4–6 и приложение.

4. Распределения из класса (А), для которых $\gamma > 1$. В этом случае при $n \rightarrow \infty$ имеем $y_{n1} - y_{n2} \rightarrow 0$. Положим $\tau = -F^{-1}(\beta/(1-\alpha))$. Тогда

$$1 - \beta \leq I_1 \leq 1 - \frac{\beta^2}{1 - \alpha}, \quad (10)$$

$$\frac{\alpha\beta}{1 - \alpha} \leq I_2 \leq \frac{2\beta}{1 - \alpha} - \frac{\beta^2}{1 - \alpha}, \quad (11)$$

$$1 - \frac{2\beta}{1 - \alpha} \leq I_4 \leq 1 - \frac{\beta}{1 - \alpha},$$

$$I_3 = I_9 = 1, \quad I_5 = I_7 = I_8 = I_{10} = 0, \quad I_6 = \exp(-2t).$$

5. Распределения из класса (А), для которых $\gamma = 1$. Без нарушения общности будем считать, что $b = 1$. В этом случае при $n \rightarrow \infty$ разность $y_{n1} - y_{n2} \rightarrow c = \ln 2$. Величину τ найдем из уравнения

$$\exp(-2t)[F(-\tau) + tF(-c - \tau)] = \beta.$$

Тогда

$$1 - \beta \leq I_1 \leq 1 - \beta F(-c - \tau), \quad (12)$$

$$I_2 < 1 - \exp(-2t) - \beta F(-c - \tau) + \exp(-2t)[F(-\tau) + 2F(-c - \tau)], \quad (13)$$

$$I_3 > \exp(-2t)\left((1 - F(-c - \tau))^2 - F(-\tau)\right), \quad (14)$$

$$I_4 > \exp(-2t)[1 - F(-c - \tau)]^2,$$

$$I_5 < \exp(-2t)(1 - F(-\tau))F(-c - \tau),$$

$$I_6 = \exp(-2t)(1 - F(-\tau)), \quad I_7 < \exp(-t)(F(-\tau) - F(-c - \tau))^2,$$

$$I_8 < \exp(-t)F(-\tau) - \exp(-2t)(F(-\tau) - F(-c - \tau)),$$

$$I_9 > 1 - \exp(-2t)F(-c - \tau)(1 + F(-\tau) - F(-c - \tau))$$

$$- \exp(-t)(F(-\tau) - F(-c - \tau))^2,$$

$$I_{10} < 1 - \exp(-2t)(1 - F(-c - \tau)).$$

6. Распределения из класса (А), для которых $0 < \gamma < 1$, и все распределения из класса (В). В этом случае при $n \rightarrow \infty$ разность $y_{n1} - y_{n2} \rightarrow \infty$, величина τ определяется из уравнения

$$\exp(-2t)F(-\tau) = \beta.$$

Имеем

$$I_1 \geq 1 - \beta, \quad (15)$$

$$1 - \exp(-t) \leq I_2 \leq 1 - \exp(-t) + \beta, \quad I_3 = 1 - \beta \exp(-t), \quad I_4 = \exp(-t),$$

$$I_5 = I_8 = I_{10} = 0, \quad I_6 = \exp(-2t)(1 - F(-c - \tau)),$$

$$I_7 = \exp(-t)F^2(-\tau), \quad I_9 = \exp(-t)(1 - F(-\tau))^2.$$

7. Приложение. Доказательство леммы 1.1. Для любого $x > 0$ имеем

$$\begin{aligned} P \left\{ \frac{|y|}{|Y_{(n-m)} - y|n^\Delta} \geq x \right\} &= P \left\{ |Y_{(n-m)} - y| \leq \frac{|y|}{xn^\Delta} \right\} \\ &= P \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbb{I} \left\{ Y_i \geq y + \frac{|y|}{xn^\Delta} \right\} \leq m \right\} - P \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbb{I} \left\{ Y_i \geq y - \frac{|y|}{xn^\Delta} \right\} \leq m \right\} \\ &= \sum_{j=0}^m C_n^j \left(1 - F \left(y + \frac{|y|}{xn^\Delta} \right) \right)^j F^{n-j} \left(y + \frac{|y|}{xn^\Delta} \right) \\ &\quad - \sum_{j=0}^m C_n^j \left(1 - F \left(y - \frac{|y|}{xn^\Delta} \right) \right)^j F^{n-j} \left(y - \frac{|y|}{xn^\Delta} \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ в силу соотношения (2), поэтому при $n \rightarrow \infty$ и любом целом фиксированном $m \geq 0$

$$\frac{|y|}{|Y_{(n-m)} - y|n^\Delta} \xrightarrow{P} 0. \quad (16)$$

Аналогичным образом, в силу (3), при $n \rightarrow \infty$ и любом целом фиксированном $m \geq 0$

$$\frac{1}{|Y_{(n-m)} - y|n^\Delta} \xrightarrow{P} 0. \quad (17)$$

Далее, используя представление $n^\varepsilon(\hat{\theta}_1 - \theta_1) = \xi_n$, $n^\delta(\hat{\theta}_2 - \theta_2) = \eta_n$, получим следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} Z_{(n-m)} - y &= \frac{X_{(n-m)} - \theta_1 - \xi_n n^{-\varepsilon}}{\theta_2 + \eta_n n^{-\delta}} - y = [Y_{(n-m)} - y] \\ &\quad \times \left[1 + \frac{y}{Y_{(n-m)} - y} O_p(n^{-\delta}) + \frac{1}{Y_{(n-m)} - y} O_p(n^{-\varepsilon}) + O_p(n^{-\delta}) \right], \end{aligned}$$

что и требовалось.

Доказательство следствия 1.1. Предварительно заметим, что условия (2) и (16) эквивалентны. Действительно, так как

$$\begin{aligned} F \left(y - \frac{|y|}{xn^\Delta} \right) &\leq F(y) \leq F \left(y + \frac{|y|}{xn^\Delta} \right), \\ F^n \left(y + \frac{|y|}{xn^\Delta} \right) - F^n \left(y - \frac{|y|}{xn^\Delta} \right) &\rightarrow 0, \\ nF^{n-1} \left(y + \frac{|y|}{xn^\Delta} \right) \left(1 - F \left(y + \frac{|y|}{xn^\Delta} \right) \right) \\ &\quad - nF^{n-1} \left(y - \frac{|y|}{xn^\Delta} \right) \left(1 - F \left(y - \frac{|y|}{xn^\Delta} \right) \right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

и выполняется условие (1), то из (16) следует (2). Аналогичным образом, из условия (17) следует (3).

Для доказательства п. 1) следствия рассмотрим три возможных случая (см. [2]).

1) Предельное распределение типа I для максимума. Тогда $b_n = 0$, $y_n(t) \rightarrow \infty$, $y_n(t)/a_n \rightarrow c \neq 0$, $Y_{(n)}/a_n$ при $n \rightarrow \infty$ имеет предельное невырожденное распределение. Имеем

$$\frac{|Y_{(n)} - ca_n|n^\Delta}{ca_n} = \left| \frac{Y_{(n)}}{ca_n} - 1 \right| n^\Delta \xrightarrow{P} \infty.$$

2) Предельное распределение типа II для максимума. Тогда либо а) $b_n = 0$, $y_n(t) \rightarrow 0$, $a_n = -y_n(1)$, $y_n(t)/y_n(1) \rightarrow c$, и, значит,

$$\frac{|Y_{(n)} + ca_n|n^\Delta}{|ca_n|} = \left| \frac{Y_{(n)}}{ca_n} + 1 \right| n^\Delta \rightarrow \infty,$$

либо

б) $b_n = c_1 \neq 0$, $y_n(t) \rightarrow c_1$, и, значит,

$$\frac{|Y_{(n)} - c_1|n^\Delta}{|c_1|} = \frac{|Y_{(n)} - b_n|n^\Delta}{|b_n|} = \frac{|y_{(n)} - b_n|}{a_n} \frac{a_n n^\Delta}{|b_n|} \rightarrow \infty.$$

3) Предельное распределение типа III для максимума. Тогда $b_n \rightarrow \infty$, $y_n(t)/b_n \rightarrow c \neq 0$ и

$$\begin{aligned} \frac{|Y_{(n)} - cb_n|n^\Delta}{cb_n} &= \frac{|Y_{(n)} - b_n + b_n - cb_n|}{ca_n} \frac{a_n n^\Delta}{b_n} \\ &= \left| \frac{Y_{(n)} - b_n}{ca_n} + \frac{(1-c)b_n}{ca_n} \right| \frac{a_n n^\Delta}{b_n} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Пункт 2) следствия доказывается аналогичным образом.

Доказательство теоремы 1.1 основано на том факте, что при каждом фиксированном $k \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{Y_{(n)} < y_{n1}, Y_{(n-1)} < y_{n2}, \dots, Y_{(n-k+1)} < y_{nk}\} = \sum_{j=0}^{k-1} p_{kj}$$

(см., например, [10] или монографию [3, ч. 1, гл. 2, § 2.3]). Утверждение теоремы следует из соотношений (4) и (7).

Доказательство леммы 2.1 основано на представлении

$$\{Y_{(k)} < x\} = \left\{ \sum_{j=1}^n \mathbb{I}\{Y_j \geq x\} \leq n - k \right\},$$

из которого следует, что

$$I = P \left\{ \bigcap_{i=1}^2 \left(\sqrt{n}(Y_{(n_i)} - \zeta_i) < x_i \right) \right\} = P \left\{ \bigcap_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^{n-2} \mathbb{I} \left\{ Y_{m_j} \geq \zeta_i + \frac{x_i}{\sqrt{n}} \right\} + \mathbb{I} \left\{ Y_{c_1} \geq \zeta_i + \frac{x_i}{\sqrt{n}} \right\} + \mathbb{I} \left\{ Y_{c_2} \geq \zeta_i + \frac{x_i}{\sqrt{n}} \right\} \leq n - [n\lambda_i] + 1 \right) \right\}.$$

Так как

$$\mathbb{I} \left\{ Y_c \geq \zeta_i + \frac{x_i}{\sqrt{n}} \right\} = \mathbb{I} \left\{ Y_c - y_1 - \tau \geq \zeta_i + \frac{x_i}{\sqrt{n}} - y_1 - \tau \right\} = 1 + o_p(1)$$

при $n \rightarrow \infty$ и справедливости гипотезы H_1 , то

$$I = P \left\{ \bigcap_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^{n-2} \mathbb{I} \left\{ Y_{m_j} \geq \zeta_i + \frac{x_i}{\sqrt{n}} \right\} + o_p(1) \leq n - [n\lambda_i] - 1 \right) \right\},$$

величины $Y_{m_1}, \dots, Y_{m_{n-2}}$ независимы и одинаково распределены с плотностью $f(x)$,

$$\begin{aligned} E \mathbb{I} \left\{ Y_{m_j} \geq \zeta_i + \frac{x_i}{\sqrt{n}} \right\} &= 1 - F \left(\zeta_i + \frac{x_i}{\sqrt{n}} \right) \\ &= (1 - \lambda_i) - f(\zeta_i) \frac{x_i}{\sqrt{n}} + o(n^{-1/2}), \\ \text{cov} \left(\mathbb{I} \left\{ Y_{m_1} \geq \zeta_1 + \frac{x_1}{\sqrt{n}} \right\}, \mathbb{I} \left\{ Y_{m_1} \geq \zeta_2 + \frac{x_2}{\sqrt{n}} \right\} \right) \\ &= \lambda_1(1 - \lambda_2) + o(1), \quad \zeta_1 \leq \zeta_2. \end{aligned}$$

Таким образом, при $n \rightarrow \infty$ и при справедливости гипотезы H_1

$$\begin{aligned} I &= P \left\{ \bigcap_{i=1}^2 \left(\frac{\sum_{j=1}^{n-2} (\mathbb{I} \{ Y_{m_j} \geq \zeta_i + x_i/\sqrt{n} \} - (1 - F(\zeta_i + x_i/\sqrt{n})))}{\sqrt{n} \sqrt{\lambda_i(1 - \lambda_i)} + o(1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \leq \frac{f(\zeta_i)x_i + o_p(1)}{\sqrt{\lambda_i(1 - \lambda_i)} + o(1)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Применяя многомерную центральную предельную теорему к последовательности независимых одинаково распределенных двумерных векторов

$$\left(\mathbb{I} \left\{ Y_{m_j} \geq \zeta_1 + \frac{x_1}{\sqrt{n}} \right\}, \mathbb{I} \left\{ Y_{m_j} \geq \zeta_2 + \frac{x_2}{\sqrt{n}} \right\} \right), \quad j = 1, 2, \dots,$$

получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I = \Phi \left(\frac{f(\zeta_1)x_1}{\sqrt{\lambda_1(1 - \lambda_1)}}, \frac{f(\zeta_2)x_2}{\sqrt{\lambda_2(1 - \lambda_2)}} \right),$$

где $\Phi(\cdot, \cdot)$ означает функцию двумерного нормального распределения с нулевым вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей Λ , что и требовалось.

Доказательство леммы 2.2. Так как мы положили $k = 2$, то ограничимся случаями $m = 0$ и $m = 1$. Напомним, что в п. 1 мы показали, что для классов (А) и (В) выполняются условия (5) и (6), а следовательно, и условия (2) и (3).

Сначала будем считать, что среди $X_1, \dots, X_n$ существуют ровно два н.з.в., для которых $\theta_{1i} = \theta_2(y_{n1} + \tau) + \theta_1$; для остальных $n - 2$ наблюдений $\theta_{1i} = \theta_1$. Для любого $x > 0$ имеем

$$\begin{aligned} P \left\{ \frac{y}{|Y_{(n-1)} - y|n^\Delta} \geq x \right\} &= P \left\{ |Y_{(n-1)} - y| \leq \frac{y}{xn^\Delta} \right\} \\ &= P \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbb{I} \left\{ Y_i \geq y + \frac{y}{xn^\Delta} \right\} \leq 1 \right\} - P \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbb{I} \left\{ Y_i \geq y - \frac{y}{xn^\Delta} \right\} \leq 1 \right\} \\ &= F^{n-2} \left(y + \frac{y}{xn^\Delta} \right) F^2 \left(\frac{y}{xn^\Delta} - \tau \right) \\ &\quad + 2 \left(1 - F \left(\frac{y}{xn^\Delta} - \tau \right) \right) F \left(\frac{y}{xn^\Delta} - \tau \right) F^{n-2} \left(y + \frac{y}{xn^\Delta} \right) \\ &\quad + (n-2) \left(1 - F \left(y + \frac{y}{xn^\Delta} \right) \right) F^{n-3} \left(y + \frac{y}{xn^\Delta} \right) F^2 \left(\frac{y}{xn^\Delta} - \tau \right) \\ &\quad - F^{n-2} \left(y - \frac{y}{xn^\Delta} \right) F^2 \left(-\frac{y}{xn^\Delta} - \tau \right) \\ &\quad - 2 \left(1 - F \left(-\frac{y}{xn^\Delta} - \tau \right) \right) F \left(-\frac{y}{xn^\Delta} - \tau \right) F^{n-2} \left(y - \frac{y}{xn^\Delta} \right) \\ &\quad - (n-2) \left(1 - F \left(y - \frac{y}{xn^\Delta} \right) \right) F^{n-3} \left(y - \frac{y}{xn^\Delta} \right) F^2 \left(-\frac{y}{xn^\Delta} - \tau \right) \\ &\sim \exp(-t) F^2(-\tau) + 2(1 - F(-\tau)) F(-\tau) \exp(-t) + t \exp(-t) F^2(-\tau) \\ &\quad - \exp(-t) F^2(-\tau) - 2(1 - F(-\tau)) F(-\tau) \exp(-t) \\ &\quad - t \exp(-t) F^2(-\tau) = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали условие (2), соотношения (8), (9) и условие $\Delta\gamma > 1$ для класса (В). Отсюда следует, что при альтернативе $H_1 = H_{11} \cup H_{12}$ и при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{y}{|Y_{(n-1)} - y|n^\Delta} \xrightarrow{P} 0.$$

Аналогичным образом доказывается, что при альтернативе $H_1 = H_{11} \cup$

H_{12} и $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{|Y_{(n-i)} - y|n^\Delta} \xrightarrow{P} 0, \quad i = 0, 1, \quad \frac{y}{|Y_{(n)} - y|n^\Delta} \xrightarrow{P} 0.$$

Случай, когда существует ровно одно н.з.в., для которого $\theta_{1i} = \theta_2(y_{n1} + \tau) + \theta_1$, а для остальных $n - 1$ наблюдений $\theta_{1i} = \theta_1$, рассматривается аналогичным образом. Дальнейшие рассуждения полностью повторяют рассуждения из доказательства леммы 1.1, следующие после соотношения (17). Лемма 2.2 доказана.

Прежде чем доказывать соотношения из пп. 4–6, сделаем некоторые предварительные замечания, касающиеся поведения разности $y_{n1} - y_{n2}$ и величины $F^n(y_{n1} + \delta)$ при $n \rightarrow \infty$.

Для класса (А) из соотношения (8) следует, что

$$y_{n1} - y_{n2} = C \left(\left(\ln \frac{n}{t} \right)^{1/\gamma} - \left(\ln \frac{n}{2t} \right)^{1/\gamma} \right) \sim C \left(\ln \frac{n}{t} \right)^{1/\gamma-1} \frac{\ln 2}{\gamma},$$

поэтому для класса (А) при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$y_{n1} - y_{n2} \rightarrow \begin{cases} 0, & \gamma > 1, \\ C \ln 2, & \gamma = 1, \\ \infty, & 0 < \gamma < 1. \end{cases}$$

Для класса (В) из соотношения (9) следует, что при $n \rightarrow \infty$ разность $y_{n1} - y_{n2} \rightarrow \infty$.

Далее, для распределений из класса (А) при $n \rightarrow \infty$ имеем: при $\gamma > 1$

$$\begin{aligned} F^n(y + \delta) &\rightarrow 0 && \text{при } \delta < 0, \\ F^n(y + \delta) &\rightarrow 1 && \text{при } \delta > 0; \end{aligned} \quad (18)$$

при $\gamma = 1$

$$F^n(y + \delta) \rightarrow \exp(-t \exp(-b\delta)) \quad \text{при любом } \delta; \quad (19)$$

при $0 < \gamma < 1$

$$F^n(y + \delta) \rightarrow \exp(-t) \quad \text{при любом } \delta. \quad (20)$$

Для распределений из класса (В) при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$F^n(y + \delta) \rightarrow \exp(-t) \quad \text{при любом } \delta. \quad (21)$$

Доказательство соотношений из п. 4. Совместная ф.р. $Y_{(n-1)}$ и $Y_{(n)}$ при $x \leq y$, когда два наблюдения среди $Y_1, \dots, Y_n$ сдвинуты вправо на величины η_{11} и η_{12} , имеет вид

$$P\{Y_{(n-1)} < x, Y_{(n)} < y\} = F^{n-2}(x) F(x - \eta_{11}) F(x - \eta_{12})$$

$$\begin{aligned}
& + F^{n-2}(x) F(x - \eta_{11}) ((F(y - \eta_{12}) - F(x - \eta_{12})) \\
& + F^{n-2}(x) F(x - \eta_{12}) \\
& \times (F(y - \eta_{11}) - F(x - \eta_{11})) + (n-2) F^{n-3}(x) F(x - \eta_{11}) \\
& \times F(x - \eta_{12}) (F(y) - F(x))). \quad (22)
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\lim \mathbf{P}_{12}\{D_0\} = (1 - \alpha) F^2(-\tau), \quad \lim \mathbf{P}_{11}\{D_0\} = (1 - \alpha) F(-\tau).$$

Так как $\min(\mathbf{P}_{11}\{D_0\}, \mathbf{P}_{12}\{D_0\}) \leq \mathbf{P}_1\{D_0\} \leq \max(\mathbf{P}_{11}\{D_0\}, \mathbf{P}_{12}\{D_0\})$, то отсюда следует утверждение (10). Далее,

$$\begin{aligned}
\lim \mathbf{P}_{12}\{D_0 E\} &= \lim \mathbf{P} \left\{ \bigcap_{i=1}^{n-2} (Y_{m_i} < \min(Y_{c_1}, Y_{c_2}) < y_{n2}) \right. \\
&\quad \left. \bigcap (\max(Y_{c_1}, Y_{c_2}) < y_{n1}) \right\} \\
&= 2 \lim \int_{-\infty}^{y_{n2} - y_{n1} - \tau} [F(-\tau) - F(u)] F^{n-2}(u + y_{n1} + \tau) f(u) du. \quad (23)
\end{aligned}$$

Из соотношения (18) следует, что $\lim \mathbf{P}_{12}\{D_0 E\} = 0$.

Аналогичным образом,

$$\lim \mathbf{P}_{11}\{D_0 E\} = \lim \int_{-\infty}^{-\tau} F^{n-1}(u + y_{n1} + \tau) f(u) du = 0.$$

Следовательно, $\lim \mathbf{P}_1\{D_0 E\} = 0$.

Далее,

$$\begin{aligned}
\lim \mathbf{P}_{12}\{E\} &= 2 \lim \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F(u)) F^{n-2}(u + y_{n1} + \tau) f(u) du \\
&= 2 \lim \int_{-\tau}^{\infty} [1 - F(u)] f(u) du = \left[1 - \frac{\beta}{1 - \alpha} \right]^2. \quad (24)
\end{aligned}$$

Аналогичным образом,

$$\lim \mathbf{P}_{11}\{E\} = \lim \int_{-\infty}^{\infty} F^{n-1}(x + y_{n1} + \tau) f(x) dx = 1 - F(-\tau) = 1 - \frac{\beta}{1 - \alpha}.$$

Таким образом, $(1 - \beta/(1 - \alpha))^2 \leq \lim \mathbf{P}_1\{E\} \leq 1 - \beta/(1 - \alpha)$. Так как

$$\mathbf{P}_1\{D_1 E\} = \mathbf{P}_1\{E\} - \mathbf{P}_1\{D_0 E\}, \quad (25)$$

то отсюда следует, что

$$\lim \mathbf{P}_1\{D_1 E\} = \lim \mathbf{P}_1\{E\} \quad (26)$$

и

$$\left(1 - \frac{\beta}{1 - \alpha}\right)^2 \leq \lim P_1\{D_1 E\} \leq 1 - \frac{\beta}{1 - \alpha},$$

что доказывает соотношение (11).

Из равенства

$$P_1\{D_1|E\}P_1\{E\} = P_1\{D_1 E\} \quad (27)$$

и из соотношения (26) следует, что $I_3 = 1$. Остальные соотношения из п. 4 получаются аналогичным образом.

Доказательство соотношений из п. 5. Из соотношений (19) и (22) следует, что

$$\begin{aligned} \lim P_{12}\{D_0\} &= \exp(-2t)F(-c-\tau)[2F(-\tau) - F(-c-\tau) + tF(-c-\tau)], \\ \lim P_{11}\{D_0\} &= \exp(-2t)[F(-\tau) + tF(-c-\tau)], \end{aligned}$$

откуда получаем утверждение (12). Из соотношения (23) следует, что

$$\lim P_{12}\{D_0 E\} \leq \exp(-2t)F^2(-c-\tau).$$

Аналогичным образом, $\lim P_{11}\{D_0 E\} \leq \exp(-2t)F(-\tau)$. Таким образом, $\lim P_1\{D_0 E\} \leq \exp(-2t)F(-\tau)$. Далее, учитывая соотношение (24), получим

$$\begin{aligned} \lim P_{12}\{E\} &> 2 \lim \int_{-c-\tau}^{\infty} F^{n-2}(u + y_{n1} + \tau) [1 - F(u)] f(u) du \\ &> 2 \exp(-2t) \int_{-c-\tau}^{\infty} [1 - F(u)] f(u) du \\ &= \exp(-2t) [1 - F(-c-\tau)]^2. \end{aligned}$$

Аналогичным образом,

$$\lim P_{11}\{E\} > \exp(-2t) \int_{-c-\tau}^{\infty} f(u) du = \exp(-2t) [1 - F(-c-\tau)].$$

Отсюда следует, что

$$\lim P_1\{E\} > \exp(-2t) [1 - F(-c-\tau)]^2.$$

Используя соотношение (25), получим

$$\lim P_1\{D_1 E\} > \exp(-2t)[(1 - F(-c-\tau))^2 - F(-\tau)], \quad (28)$$

откуда следует соотношение (13).

Соотношение (14) следует из соотношений (27) и (28). Остальные соотношения п. 5 получаются аналогичным образом.

Доказательство соотношений из п. 6 основано на использовании соотношений (20) и (21). Методами, аналогичными тем, которые были использованы при доказательстве соотношений из п. 4, получим, что

$$\lim P_{12}\{D_0\} = 0, \quad \lim P_{11}\{D_0\} = \exp(-2t)F(-\tau) = \beta;$$

поэтому $\lim P_1\{D_0\} \leq \beta$, откуда следует (15). Остальные соотношения п. 6 получаются аналогичным образом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Большев Л. Н.* Обнаружение грубых ошибок в результатах наблюдений. — В сб.: Международная летняя школа по теории вероятностей и математической статистике. Варна, 1974, с. 8–41.
2. *Галамбош Я.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984.
3. *Лидбеттер М., Ротсен Х., Линдгрен Г.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.
4. *Пагурова В. И., Нестерова С. А.* О слабой сходимости считающих процессов в присутствии мешающих параметров. — Теория вероятн. и ее примен., 1991, т. 36, в. 1, с. 176–183.
5. *Пагурова В. И., Чижикова И. Л.* Критерии обнаружения выбросов, использующие робастные оценки мешающих параметров. — Теория вероятн. и ее примен., 1995, т. 40, в. 2, с. 445–452.
6. *Пагурова В. И., Шведов А. В.* Об асимптотическом распределении максимума стационарной гауссовской последовательности. — Вестник МГУ, сер. 15, 1995, в. 4, с. 33–43.
7. *Barnett V., Lewis T.* Outliers in Statistical Data. New York: Wiley, 1984.
8. *Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В.* Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. М.: Мир, 1989.
9. *Хьюбер Дж. П.* Робастность в статистике. М.: Мир, 1984, 304 с.
10. *Убайдуллаева М.* Об отбраковке резко выделяющихся наблюдений. — Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. XIX, в. 4, с. 864–868.

Поступила в редакцию
4.IV.1996