Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Розовский, Вероятности больших отклонений суммы независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения несимметричного устойчивого закона, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 3, 496–530

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1949>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:10:05

© 1997 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

**ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ
СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН
С ОБЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ИЗ ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ
НЕСИММЕТРИЧНОГО УСТОЙЧИВОГО ЗАКОНА¹⁾**

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{X_i\}$ с общей функцией распределения $V(x)$ из области притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha \in (1, 2)$ и предположим, что $EX_1 = 0$ и

$$0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - V(x)}{V(-x)} e^{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - V(x)}{V(-x)} e^{g(x)} < \infty,$$

где положительная функция $g(x)$ стремится к бесконечности и

$g(x) x^{-\delta}$ убывает при $x > x_0$ и некотором $\delta < 1$.

В статье получено асимптотическое представление для вероятности $P\{X_1 + \dots + X_n > x\}$, справедливое равномерно по всем положительным x при n , стремящемся к бесконечности.

Случай $\alpha = 2$ был ранее тщательно исследован в [10].

Ключевые слова и фразы: суммы независимых случайных величин, устойчивое распределение, большие отклонения, область притяжения.

1. Введение и основные результаты

Рассмотрим устойчивое распределение F_α , $1 < \alpha < 2$, и последовательность независимых случайных величин $\{X_i\}$ с общей функцией распределения $V(x)$.

Предположим, что при $n \rightarrow \infty$ распределение S_n/B_n , где $S_n = X_1 + \dots + X_n$, а $\{B_n\}$ — некоторая положительная последовательность, слабо сходится к F_α .

*Химико-фармацевтическая академия, кафедра высшей математики, ул. проф. Попова, 14, 197376 С.-Петербург, Россия.

¹⁾Работа над статьей была поддержана грантом РФФИ 96-01-00547.

Хорошо известно [1], что последнее соотношение имеет место тогда и только тогда, когда $EX_1 = 0$ и

$$\begin{aligned} 1 - V(x) &= (c_1 + o(1)) \frac{l(x)}{x^\alpha}, \\ V(-x) &= (c_2 + o(1)) \frac{l(x)}{x^\alpha}, \end{aligned} \quad x \rightarrow \infty, \quad (1.1)$$

где $c_i \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$, функция $l(x)$ медленно меняется при $x \rightarrow \infty$.

Доказано также (см., например, [2]–[5]), что при $c_1 > 0$

$$P\{S_n > x\} \sim n(1 - V(x)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

равномерно по x таким, что $x/B_n \rightarrow \infty$.

В предположении одностороннего условия Крамера

$$E e^{hX_1} < \infty \quad (\exists h > 0) \quad (1.3)$$

асимптотику для $P\{S_n > x\}$ при x , растущих к бесконечности не быстрее n , можно получить как следствие [6] (см. также [7]–[9], [13]). Понятно, что в этой ситуации $c_1 = 0$.

Случай, когда постоянная c_1 из условия (1.1) равна нулю, но условие (1.3) не выполняется, исследован менее полно. Некоторые результаты, содержащие условия выполнения соотношения (1.2) были получены в [14], [15] и [5]. Полезно также обратить внимание на статью [16], затрагивающую случай $0 < \alpha < 1$, и на монографию [17].

Настоящая работа является в известном смысле продолжением статьи автора [10], в которой рассматривался случай $\alpha = 2$ и на которую в дальнейшем мы будем часто ссылаться.

Введем некоторые условия и обозначения.

Пусть по аналогии с (1.1) при $x \rightarrow \infty$

$$V(-x) \sim \frac{l(x)}{x^\alpha}, \quad (1.4a)$$

$$1 - V(x) \asymp V(-x) e^{-g(x)}, \quad (1.4b)$$

где положительная функция $g(x)$ стремится к бесконечности и

$$g(x)x^{-\delta} \text{ не возрастает при } x > x_0 \text{ и некотором } \delta < 1. \quad (1.5)$$

Без потери общности предположим, что

$$EX_1 = 0, \quad nV(-B_n) \sim c_\alpha = \frac{\alpha - 1}{\alpha \Gamma(2 - \alpha)}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.6)$$

и логарифм характеристической функции, отвечающей распределению F_α , равен

$$\alpha^{-1} |t|^\alpha \left(\cos \frac{\pi\alpha}{2} + i \frac{t}{|t|} \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right) \quad (1.7)$$

(напоминаем, что $\alpha > 1$).

Пусть дифференцируемая функция $h_*(z)$ при $z \rightarrow +0$ удовлетворяет условиям $h'_*(z) \sim (\alpha - 1)^{-1} h_*(z)/z$ и (см. (1.4a))

$$\frac{1}{h_*(z)} V\left(-\frac{1}{h_*(z)}\right) \sim c_\alpha z. \quad (1.8)$$

Отметим, что функция $h_*(z)/z^{1/(\alpha-1)}$ медленно меняется при $z \rightarrow +0$; кроме того, $h_*(B_n/n) \sim 1/B_n$, $n \rightarrow \infty$.

Определим положительные последовательности $\{\kappa_n\}$, $\{\omega_n\}$ условиями

$$\frac{\kappa_n}{g(\kappa_n)} h_*\left(\frac{\kappa_n}{n}\right) \asymp 1, \quad (1.9)$$

$$g(\omega_n) \omega_n^{-1/r} \sim \eta h_*\left(\frac{\kappa_n}{n}\right) \kappa_n^{-1/(\alpha-1)}. \quad (1.10)$$

Здесь $n \rightarrow \infty$, $r = \frac{\alpha-1}{\alpha}$, η — некоторая постоянная из интервала $(0, r)$ (очевидно, что $\omega_n \asymp \kappa_n$ при $n \rightarrow \infty$).

Введем функции $Q(z)$, $\pi(x)$, $I_n(x)$, положив

$$\begin{aligned} Q(z) &= \inf_{h>0} \left(-zh + n \ln \int_{-\infty}^{B_n} e^{hy} dV(y) \right), \\ \pi(x) &= \begin{cases} \left(1 - F_\alpha((xh_*)^r) \right) e^{Q(x)+rxh_*} & \text{при } x > B_n, \\ 1 - F_\alpha\left(\frac{x}{B_n}\right) & \text{при } x \leq B_n, \end{cases} \quad (1.11) \\ I_n(x) &= n \int_{\max(B_n, x-\omega_n)}^{\infty} |\pi'(x-y)| (1-V(y)) dy, \end{aligned}$$

где $h_* = h_*(x/n)$.

Отметим (см. [11, (7)–(10)], [1, теоремы 2.5.2, 2.5.3]), что при $x/B_n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \pi(x) &\sim e^{Q(x)} (2\pi(\alpha-1)xh_*)^{-1/2}, \\ \pi'(x) &\sim -e^{Q(x)} \left(2\pi(\alpha-1) \frac{x}{h_*} \right)^{-1/2}, \\ Q(x) &\sim -rxh_*. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Пусть в дальнейшем $I\{\cdot\}$ обозначает индикатор множества $\{\cdot\}$.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (1.4)–(1.7). Тогда равномерно по x

$$\mathbf{P}\{S_n \geq x\} = (\pi(x) I\{x \leq \omega_n\} + I_n(x))(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.13)$$

Обращаем внимание на то, что среди всех условий, предварявших формулировку теоремы 1, ограничительными являются только условия (1.46) и (1.5).

Пусть (см. (1.9), (1.10)) $B_n \leq t \leq \omega_n$ и

$$\xi(t) = \min_{B_n \leq y \leq t} \frac{1}{y} \left(g(y) - r(t^{1/r} - (t-y)^{1/r}) \kappa_n^{-1/(\alpha-1)} h_* \left(\frac{\kappa_n}{n} \right) \right). \quad (1.14)$$

В процессе доказательств будет показано, что функция $\xi(t)$ на интервале $[B_n, \omega_n]$ имеет единственный корень c_n , при всех достаточно больших n и некоторых $a < \eta^{r/(1-r\delta)}$ и $b > (\eta/r)^r$ (см. (1.5), (1.10)) удовлетворяющий условию

$$a \omega_n < c_n < b \omega_n. \quad (1.15)$$

З а м е ч а н и е 1. Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ равномерно по x при $n \rightarrow \infty$

$$I_n(x) = o(\pi(x)), \quad x \leq (1-\varepsilon)c_n, \quad (1.16a)$$

$$\pi(x) = o(I_n(x)), \quad (1+\varepsilon)c_n < x \leq \omega_n. \quad (1.16b)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (1.4)–(1.7). Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ равномерно по x при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{S_n \geq x\} = \begin{cases} \pi(x)(1+o(1)), & x \leq (1-\varepsilon)c_n, \\ (\pi(x) + I_n(x))(1+o(1)), & (1-\varepsilon)c_n < x \leq (1+\varepsilon)c_n, \\ I_n(x)(1+o(1)), & x > (1+\varepsilon)c_n. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 2. Предположим, что функция $g(y)$ из условия (1.46) правильно меняется при $y \rightarrow \infty$ с некоторым показателем $\delta \in [0, 1)$. Пусть последовательность $\{\eta_n\}$ удовлетворяет условию

$$g(\eta_n) \eta_n^{-1/r} \sim h_* \left(\frac{\kappa_n}{n} \right) \kappa_n^{-1/(\alpha-1)}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.17)$$

Тогда (см. (1.10), (1.14), (1.15))

$$c_n \sim \gamma \eta_n, \quad \omega_n \sim \tau \eta_n \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (1.18)$$

где $\tau = \eta^{-r/(1-r\delta)}$, $\gamma = \gamma(\alpha, \delta) = \delta^{r/(1-r\delta)} (u_*^{(1-r)/(1-r\delta)} + u_*^{-(r-r\delta)/(1-r\delta)})$ и u_* — положительный корень уравнения $(1 + (r\delta)^{-1}u)^r = 1 + u$.

Несложно проверить, что $\gamma(\alpha, 0) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \gamma(\alpha, \delta) = (1/r)^r$.

Можно также показать, что если $g(u) \sim u^\delta \bar{g}(u)$, $u \rightarrow \infty$, где $0 \leq \delta < 1$, а $\bar{g}(u)$ — такая монотонная дифференцируемая функция, что $\lim_{u \rightarrow \infty} \bar{g}(u) = 0$ или ∞ и

$$y \bar{g}'(y) = o\left(\frac{\bar{g}(y)}{|\ln \bar{g}(y)|}\right) \quad \text{при } y \rightarrow \infty,$$

то $\eta_n \sim \bar{B}_n^\gamma \bar{g}^{r\gamma}(\bar{B}_n^\gamma)$ при $n \rightarrow \infty$, где $\bar{B}_n = \kappa_n^{\gamma/\alpha} / h_*^{r\gamma}(\kappa_n/n)$, $\gamma = (1 - r\delta)^{-1}$.

Отметим, что результат справедлив и является новым также при $\alpha = 2$.

Приведем еще одно следствие теоремы 1.

Пусть функция $\bar{\pi}(x)$ отличается от $\pi(x)$ (см. (1.10), (1.11)) тем, что

$$\bar{\pi}(x) = \left(1 - F_\alpha\left(\frac{x}{B_n}\right)\right) \exp \left\{ Q(x) + r \left(\frac{x}{B_n}\right)^{1/r} \right\} \quad \text{при } x > B_n;$$

$$\bar{I}_n(x) = I_n(x)|_{\pi=\bar{\pi}}.$$

Теорема 3. Предположим, что выполняются условия (1.4)–(1.7) и, кроме того,

$$l(z) \sim l(tz) \quad \text{при } z \rightarrow \infty \quad (1.19)$$

равномерно по $t \in ((z/\eta(z))^{1/(\alpha-1)}, 1)$, где

$$\eta(z)/g^r(\eta(z)) \sim z \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (1.20)$$

Тогда имеют место утверждения теорем 1, 2 и замечания 1 с $\bar{\pi}$, $\bar{I}_n(x)$ вместо π и $I_n(x)$, соответственно. При этом выполняется соотношение (см. (1.10), (1.14)) $h_*(\kappa_n/n)\kappa_n^{-1/(\alpha-1)} \sim B_n^{-1/r}$, $n \rightarrow \infty$.

В случае монотонной $l(z)$ условие (1.19) очевидным образом равносильно $l(z) \sim l(z^\alpha/(\alpha-1)/\eta^{1/(\alpha-1)}(z))$, $z \rightarrow \infty$, и является аналогом условия (15) из [10].

Отметим, что в предположениях теоремы 3

$$h_*\left(\frac{x}{n}\right) \sim \frac{1}{x} \left(\frac{x}{B_n}\right)^{1/r}, \quad B_n \leq x = O(\eta(B_n)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.21)$$

и (см. (1.9))

$$\eta(B_n) \asymp c_n \asymp \kappa_n, \quad n \rightarrow \infty; \quad (1.22)$$

кроме того, замечание 2 имеет место с $\eta_n = \eta(B_n)$ и $\bar{B}_n = B_n$.

З а м е ч а н и е 3. Условие (1.19) является необходимым для того, чтобы при некотором $\gamma > 0$

$$P\{S_n > x\} = \exp \left\{ - (r + o(1)) \left(\frac{x}{B_n}\right)^{1/r} \right\}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.23)$$

равномерно по x , $\rho_n B_n \leq x \leq \gamma \min(\eta(B_n), \kappa_n)$, где ρ_n стремится к бесконечности сколь угодно медленно. Это же условие достаточно для выполнения соотношения (1.23) при $\rho_n B_n \leq x \leq (1 - \varepsilon) c_n$, где положительное ε может быть произвольно мало (см. (1.16а), (1.22)).

Далее будет приведено несколько следствий теоремы 2, носящих более частный характер и поэтому имеющих более выигрышные формулировки.

Для этого необходимо провести исследование асимптотического поведения функций $\pi(x)$ и $I_n(x)$. Начнем с $\pi(x)$, оформив соответствующие результаты в виде следующего замечания.

З а м е ч а н и е 4. Пусть выполняются условия теоремы 3, причем (см. (1.5)) $\delta < \alpha/(1 + \alpha)$; $a > \gamma > 1$ — некоторые постоянные.

Если равномерно по $t \in (B_n(B_n/(a\omega_n))^{1/(\alpha-1)}, B_n)$ при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \sup_{y \leq -t} |\Delta(y)| + t^{-1} \left| \int_{-\infty}^{-t} y d\Delta(y) \right| + t^{-2} \left| \int_{-t}^t y^2 d\Delta(y) \right| \\ + t^{-3} \int_{-t}^t y^2 |\Delta(y)| dy = o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned} \quad (1.24)$$

где $\Delta(y) = \Delta_n(y) = V(y) - F_\alpha(yn^{1/\alpha}/B_n)$, то

$$Q(x) = -r \left(\frac{x}{B_n} \right)^{1/r} + o(1), \quad B_n \leq x < \gamma\omega_n, \quad n \rightarrow \infty \quad (1.25)$$

(и, следовательно, $\pi(x) \sim 1 - F_\alpha(x/B_n)$, $n \rightarrow \infty$).

Отметим, что в первых двух слагаемых из (1.24) $\Delta(y)$ можно заменить на $\tilde{\Delta}(y) = V(y) - c_\alpha n^{-1}(B_n/|y|)^\alpha$ (см. (1.6)), а при дополнительном предположении $\delta < (3 - \alpha)/(4 - \alpha)$ вместо четвертого подставить $t^{-3} \int_{-t}^0 y^2 |\tilde{\Delta}(y)| dy$.

Из замечания 4 можно вывести несколько полезных следствий. Ограничимся одним из них.

Следствие 1. Пусть выполнены условия (1.46), (1.5), причем

$$V(-x) \sim c_\alpha x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (1.26)$$

$$\delta < \min \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha}, \frac{3 - \alpha}{4 - \alpha} \right). \quad (1.27)$$

Предположим также, что функция $g(y)y^\gamma$ не убывает при некотором $\gamma < (\alpha - 1)/(2 - \alpha)$ и при $z \rightarrow \infty$

$$z^{-2} \left| \int_{|y| < z} y^2 d(V(y) - F_\alpha(y)) \right| = o \left(\frac{1}{\psi^{-1}(z)} \right)^\alpha, \quad (1.28)$$

$$|V(-z) - c_\alpha z^{-\alpha}| = o \left(\frac{1}{\psi^{-1}(z)} \right)^\alpha, \quad (1.29)$$

где (см. (1.20)) $\psi^{-1}(z)$ — функция, обратная к $\eta(z)/g(\eta(z))$.

Тогда (см. (1.11) при $B_n = n^{1/\alpha}$)

$$Q(x) = -\frac{\alpha - 1}{\alpha} \left(\frac{x^\alpha}{n} \right)^{1/(\alpha-1)} + o(1), \quad (1.30)$$

$$n^{1/\alpha} \leq x = O(\eta(n^{1/\alpha})), \quad n \rightarrow \infty.$$

Отметим, что условия (1.28), (1.29) близки к оптимальным. Так, если имеет место условие (1.29), то (1.28) необходимо для выполнения соотношения (1.30). Кроме того ([10, лемма 1a]), условия (1.28), (1.29) при $\alpha = 2$ необходимы и достаточны для (1.30).

Еще раз обращаем внимание на то, что замечание 4 и следствие предлагают условия, при которых функцию $\pi(t)$ из равенства (1.13) (в том числе и в $I_n(x)$, разумеется) можно заменить на $1 - F_\alpha(t/B_n)$.

Перейдем к асимптотическому анализу функции $I_n(x)$. Для наших целей достаточно исследовать поведение $I_n(x)$ при $x > \varepsilon \kappa_n$ (см. (1.9)–(1.15)), где положительное ε достаточно мало.

Так же, как в [10], заменим условие (1.46) более ограничительным предположением

$$1 - V(x) = H(x) \frac{l(x)}{x^\alpha} e^{-g(x)}, \quad x \geq x_0, \quad (1.31)$$

где функция $H(x)$ при $x \rightarrow \infty$ удовлетворяет условиям

$$H(x) \asymp 1, \quad H(x + o(x)) = H(x) + o(1), \quad (1.32)$$

оставив остальные условия без изменения.

З а м е ч а н и е 5а. Пусть функция $g(y)$ дифференцируема, $\nu > 1$. Тогда

$$I_n(x) = (1 + o(1)) n (1 - V(x)) + o(\pi(x)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.33)$$

равномерно по всем положительным x таким, что

$$B_n \left(\frac{1}{x} + \max_{\nu^{-1} \leq t \leq \nu} (g'(tx))^+ \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1.34)$$

Здесь и в дальнейшем $a^+ = \max(0, a)$.

В частности, если

$$\frac{(g'(y))^+}{g^r(y)} = o\left(\frac{1}{y}\right), \quad y \rightarrow \infty, \quad (1.35)$$

и выполняется условие (1.19), то (1.33) с заменой $\pi(x)$ на $\bar{\pi}(x)$ (см. теорему 3) имеет место равномерно по $x > \varepsilon \eta(B_n)$ (см. (1.20)), где положительное ε сколь угодно мало.

Из замечаний 5а, 2 ($\delta = 0$) и теоремы 2 вытекает нижеследующее утверждение.

Следствие 2а. Пусть выполняются условия (1.4а), (1.6), (1.7), (1.19) и (1.31), причем

$$g(y) \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad 0 \leq y g'(y) = o(g^r(y)), \quad y \rightarrow \infty. \quad (1.36)$$

Тогда при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ равномерно по x при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} P\{S_n \geq x\} = & (1 + o(1)) \left(\bar{\pi}(x) I\{x \leq (1 + \varepsilon) d_n\} \right. \\ & \left. + n(1 - V(x)) I\{x > (1 - \varepsilon) d_n\} \right), \end{aligned} \quad (1.37)$$

где $d_n = B_n(g(B_n)/r)^r$.

Если, в частности, $l(z) = c_\alpha + o(1)$, $z \rightarrow \infty$, и выполняются условия (1.28), (1.29), где $\psi^{-1\alpha}(z) = g(z)z^\alpha$, то $\bar{\pi}(x)$ в равенстве (1.37) можно заменить на $1 - F_\alpha(x/n^{1/\alpha})$.

З а м е ч а н и е 56. Пусть

$$g'(y + o(y)) \sim g'(y) \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \quad (1.38)$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_n(x) = & n(1 - V(x)) \exp \left\{ \frac{1}{\alpha} (B_n g'(x))^\alpha \right\} (1 + o(1)) \\ & + o(\pi(x)), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1.39)$$

равномерно по всем x , удовлетворяющим условиям

$$\frac{x}{B_n} \rightarrow \infty, \quad B_n g'(x) = O(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1.40)$$

В частности, если выполняется условие (1.19) и (помимо (1.38))

$$y g'(y) = O(g^r(y)), \quad y \rightarrow \infty, \quad (1.41)$$

то равенство (1.39) (с заменой $\pi(x)$ на $\bar{\pi}(x)$) имеет место равномерно по $x \geq \varepsilon B_n g^r(B_n)$ при любом $\varepsilon > 0$.

Отметим, что при условии (1.38) замечание 5а вытекает из замечания 5б.

Следствие 2б. Пусть выполняются условия (1.4а), (1.6), (1.19), (1.31), (1.38) и (1.41). Тогда справедливо утверждение следствия 2а с добавлением множителя $\exp\{(1/\alpha)(B_n g'(x))^\alpha\}$ у второго слагаемого в правой части равенства (1.37).

Из условия (1.41) следует, что несложная асимптотика для $I_n(x)$ имеет место, если функция $g(y)$ растет к бесконечности, грубо говоря, не быстрее, чем $\ln^\alpha y$. При этом соответствующие представления справедливы при любых допустимых $\pi(x)$.

З а м е ч а н и е 5в. Пусть целое $k \in [2, (2\alpha - 1)/(\alpha - 1)]$, $g(y)$ — неубывающая k раз дифференцируемая функция такая, что для $2 \leq l \leq k$

$$(-y)^{l-1} g^{(l)}(y) \asymp g'(y) \quad \text{при } y \rightarrow \infty; \quad (1.42)$$

$\xi_k = B_n g'(x) X + \sum_{l=2}^{k-1} (l!)^{-1} |g^{(l)}(x)| (B_n X^+)^l$, где X — случайная величина с функцией распределения F_α ; ε — некоторая положительная

постоянная. Если

$$\pi(x) \sim 1 - F_\alpha\left(\frac{x}{B_n}\right), \quad B_n \leq x \leq \omega_n, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.43)$$

то

$$I_n(x) = (1 + o(1)) n (1 - V(x)) E e^{\xi_k} + o(\pi(x)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.44)$$

равномерно по всем $x > \varepsilon B_n g^-(B_n)$, удовлетворяющим условию

$$B_n g'(x) = o\left(\frac{x}{B_n}\right)^{(k-1)/(1+(\alpha-1)k)} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1.45)$$

Кроме того, если $k \leq \alpha/(\alpha-1)$ и

$$g^{(k)}(y + o(y)) \sim g^{(k)}(y) \quad \text{при } y \rightarrow \infty, \quad (1.46)$$

то аналогичное утверждение справедливо при одновременной замене в (1.45) o на O , а в (1.44) ξ_k на ξ_{k+1} .

Таким образом, если выполняются условия (1.19), (1.42) и

$$y g'(y) = o(g(y)^{((\alpha-1)k)/(1+(\alpha-1)k)}), \quad y \rightarrow \infty, \quad (1.47)$$

то соотношение (1.44) с заменой $\pi(x)$ на $\bar{\pi}(x)$ имеет место равномерно по $x > \varepsilon B_n g^r(B_n)$ при любом $\varepsilon > 0$.

Если же $k \leq \alpha/(\alpha-1)$ и выполняются условия (1.46) и (1.47) с O вместо o , то справедливо аналогичное утверждение с заменой $E e^{\xi_k}$ на $E e^{\xi_{k+1}}$.

Напоминаем, что достаточные для выполнения (1.43) условия содержатся в замечании 4.

Продолжим изучение асимптотического поведения функции $I_n(x)$.

Будем предполагать, что $g(y)$ — неубывающая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} -y g''(y) &\asymp g'(y), \\ g''(y + o(y)) &\sim g''(y), \end{aligned} \quad y \rightarrow \infty. \quad (1.48)$$

Кроме того, принимая во внимание замечание 5б и (1.15), ограничимся такими значениями x , что

$$x > a\omega_n, \quad B_n g'(x) > 1 + \eta \quad (\exists \eta > 0). \quad (1.49)$$

Пусть $\hat{Q}(t)$, $t > 0$, — трижды дифференцируемая функция, удовлетворяющая равномерно по $t \in [B_n, \omega_n]$ (см. (1.10), (1.11)) условию

$$\hat{Q}(t) = Q(t) + o(1), \quad \hat{Q}^{(k)}(t) \sim Q^{(k)}(t) \quad (1 \leq k \leq 3), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.50)$$

Положим $\tau(y) = g(y) - \hat{Q}(x-y)$, где $T_n = \max(B_n, x - \omega_n) \leq y \leq x - B_n$, $x > a\omega_n$.

З а м е ч а н и е 5г. Пусть выполняются условия (1.48) и, кроме того,

$$((g'(y))^\gamma)' \text{ не убывает при } y > y_0 \text{ и некотором } \gamma < \alpha - 1. \quad (1.51)$$

Тогда

$$I_n(x) = (1 + o(1)) n (1 - V(y_*)) \exp \{ \hat{Q}(x - y_*) \} \\ \times \sqrt{\frac{g'(y_*)}{(\alpha - 1)\tau''(y_*)(x - y_*)}} + o(\pi(x)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.52)$$

равномерно по x , удовлетворяющим (1.49) и таким, что

$$x < y_* + \eta \frac{g'(y_*)}{|g''(y_*)|} \quad \left(\exists \eta < \frac{1}{\alpha - 1} \right), \quad (1.53)$$

где y_* — максимальное решение уравнения

$$\tau'(y) = 0, \quad T_n \leq y \leq x - B_n, \quad (1.54)$$

если такое решение существует; в противном случае $I_n(x) = o(\pi(x))$, $n \rightarrow \infty$.

Отметим, что условиям (1.53), (1.54) при всех $x > (1 - \varepsilon)c_n$ и некотором $\varepsilon > 0$ (см. (1.15), (1.16)) удовлетворяют функции $g(y)$ такие, что

$$yg''(y) \sim (\delta - 1)g'(y), \quad y \rightarrow \infty \quad (\exists \delta \in (0, 1)) \quad (1.55)$$

или

$$yg'(y) = o(g(y)), \quad y \rightarrow \infty. \quad (1.56)$$

В последнем случае

$$I_n(x) = (1 + o(1)) n (1 - V(x)) \exp \{ g(x) - \tau(y_*) \} \\ + o(\pi(x)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.57)$$

равномерно по x , удовлетворяющим условию (1.49).

При $\hat{Q}(t) = -r(t/B_n)^{1/r}$, $B_n \leq t \leq \omega_n$, замечание 5г можно несколько уточнить. Положим

$$\tau(y) = g(y) + r \left(\frac{x - y}{B_n} \right)^{1/r}; \quad \bar{c}_n = \min_{y \geq B_n} \left(y + B_n (B_n g'(y))^{\alpha-1} \right).$$

Как легко заметить, уравнение (1.54) имеет решение тогда и только тогда, когда $x \geq \bar{c}_n$.

З а м е ч а н и е 5д. Пусть выполняются условия (1.43), (1.48) и

$$\text{функция } ((g'(y))^{\alpha-1})' \text{ не убывает при } y > y_0. \quad (1.58)$$

Тогда

$$I_n(x) = (1 + o(1)) n (1 - V(y_*)) \exp \left\{ -r (B_n g'(y_*))^\alpha \right\} \frac{1}{B_n} \\ \times (B_n g'(y_*))^{(2-\alpha)/2} + o(\pi(x)), \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно по x , удовлетворяющим (1.53), где y_* — максимальное решение уравнения (1.54), и таким, что $x \geq \max(a\omega_n, \bar{c}_n)$.

Если же $x < \bar{c}_n$, то $I_n(x) = o(\pi(x))$, $n \rightarrow \infty$.

Следствие 3. Пусть выполнены условия (1.46), (1.5), (1.26), (1.28), (1.29), (1.48), (1.56) и (1.58). Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ равномерно по x при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{S_n \geq x\} = (1 + o(1)) \left(1 - F_\alpha \left(\frac{x}{n^{1/\alpha}} \right) \right. \\ \left. + n (1 - V(x)) \exp \{g(x) - \tau(y_*)\} I\{x > (1 - \varepsilon) c_n\} \right),$$

где $\tau(y) = g(y) + r((x - y)/n^{1/\alpha})^{1/r}$, y_* — максимальное решение уравнения $\tau'(y) = 0$, $c_n = (1/r)^r \eta(n^{1/\alpha})$ (см. (1.20)).

2. Доказательства

В дальнейшем предполагается, что условия (1.4)–(1.7) выполнены.

Пусть $\Lambda_n = q B_n g^{\alpha-1}(B_n) l(B_n/g(B_n))/l(B_n)$, где постоянная q принадлежит интервалу $(0, 1)$.

Лемма 1. Положим $V_n(x) = \mathbf{P}\{S_n \geq x, \max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq B_n\}$. Тогда равномерно по x при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{S_n > x\} = (1 + o(1)) \left(V_n(x) + n \int_{B_n}^\infty V_{n-1}(x - y) dV(y) \right). \quad (2.1)$$

Кроме того, при $t = n$ или $n - 1$ равномерно по $x \leq \Lambda_n + B_n$

$$V_m(x) = (1 + o(1)) \pi(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

и

$$V_m(x) \leq \exp \left\{ -\frac{\beta x g(B_n)}{B_n} \right\}, \quad x \geq \Lambda_n, \quad (2.3)$$

при любом $\beta < q\tau$ и всех достаточно больших n .

Доказательство леммы 1. Соотношение (2.1) доказывается так же, как лемма 4 из [10].

Докажем (2.2). Пусть

$$L(h) = \int_{-\infty}^{B_n} e^{hy} dV(y), \quad h > 0.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} L(h) &= \int_{1/h}^{B_n} e^{hy} dV(y) + \int_{-\infty}^0 (e^{hy} - 1 - hy) dV(y) \\ &\quad + \int_0^{1/h} (e^{hy} - 1 - hy) dV(y) + \int_{-\infty}^{1/h} (1 + hy) dV(y) \\ &= L_1 + L_2 + L_3 + L_4. \end{aligned}$$

Используя условия (1.4)–(1.6) и свойства медленно меняющихся функций, получим следующие оценки:

$$\begin{aligned} L_2 &\sim cV\left(-\frac{1}{h}\right), \quad L_3 = o\left(V\left(-\frac{1}{h}\right)\right), \\ L_4 &= 1 + o\left(V\left(-\frac{1}{h}\right)\right) \quad (h \rightarrow +0) \end{aligned}$$

и $L_1 = o(V(-1/h))$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $h \in I_n = (1/(2B_n), \gamma g(B_n)/B_n)$, где $c = \Gamma(2-\alpha)/(\alpha-1)$, $q^{1/(\alpha-1)} < \gamma < 1$.

Таким образом, при $n \rightarrow \infty$

$$L(h) - 1 \sim cV\left(-\frac{1}{h}\right), \quad h \in I_n. \quad (2.4)$$

Аналогично показывается, что равномерно по $h \in I_n$ при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} L'(h) &\sim \alpha c h^{-1} V\left(-\frac{1}{h}\right), \\ L^{(k)}(h) &\sim (-1)^k \alpha \Gamma(k-\alpha) h^{-k} V\left(-\frac{1}{h}\right), \quad k \geq 2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Положим $m(h) = (\ln L(h))'$, $\sigma^2(h) = m'(h)$. Из (2.4), (2.5) следует, что

$$m(h) \sim L'(h), \quad \sigma^2(h) \sim L''(h), \quad h \in I_n, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

откуда, в частности, заключаем, что уравнение $m(h) = x/n$ при x из интервала $I = (nm(1/(2B_n)), nm(\gamma g(B_n)/B_n))$ имеет единственный корень h . При этом $I \supset [B_n, \Lambda_n + B_n]$ для всех достаточно больших n . Начиная с этого места и до конца доказательства леммы 1 через h обозначаем решение уравнения

$$m(h) = \frac{x}{n}, \quad B_n \leq x \leq \Lambda_n + B_n. \quad (2.7)$$

Введем независимые случайные величины $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n$ с общей функцией распределения

$$\bar{V}(x) = \frac{1}{L(h)} \int_{-\infty}^{\min(x, B_n)} e^{hy} dV(y).$$

Имеем ([12, гл. 8, (3.22)]):

$$V_n(x) = L^n(h) e^{-hx} \int_0^\infty \exp \{-yh\sigma(h)\sqrt{n}\} dF_n(y), \quad (2.8)$$

где $F_n(y) = \mathbf{P}\{\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_n - nm(h) < yh\sigma(h)\sqrt{n}\}$. По аналогии с [6] (см. также [12, гл. 5]) получим

$$F_n(y) = \Phi(y) + \frac{M_3}{3! \sigma^3 \sqrt{n}} \Phi'''(y) + \Delta_n(y), \quad (2.9)$$

$$|\Delta_n(y)| \leq C \left(\frac{M_4}{\sigma^4 n} + \frac{\sqrt{h}}{h\sigma\sqrt{n}} + \int_{1/(4M_3/\sigma^2)}^{\sqrt{h}} |f_h(u)|^n \frac{du}{u} \right),$$

где $\Phi(y)$ — стандартная нормальная функция распределения, $\sigma = \sigma(h) = (D\bar{X}_1)^{1/2}$, $M_s = \mathbf{E}(\bar{X}_1 - m(h))^s$ ($s = 3$ или 4), $f_h(t) = \mathbf{E} e^{it\bar{X}_1}$, C — абсолютная постоянная.

Используя (2.4)–(2.6), покажем, что $M_s \sim L^{(s)}(h)$, $n \rightarrow \infty$, для $s = 3$ или 4 и, следовательно, при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{M_3}{\sigma^2} \asymp \frac{1}{h}, \quad \frac{M_3}{\sigma^3 \sqrt{n}} \asymp \frac{1}{\tau}, \quad \frac{M_4}{\sigma^4 n} \asymp \frac{1}{\tau^2}, \quad (2.10)$$

где $\tau = h\sigma\sqrt{n} \asymp (nV(-1/h))^{1/2}$.

Далее оценим интеграл $\int_{\varepsilon h}^{\sqrt{h}} |f_h(u)|^n u^{-1} du$, обозначая через ε сколь угодно малую положительную постоянную, не всегда одну и ту же. Вначале покажем, что

$$|f_h(u) - 1| = O \left(V \left(-\frac{1}{h} \right) \right), \quad \varepsilon h \leq u \leq \sqrt{h}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

Очевидно, что

$$f_h(u) - 1 = \frac{1}{L(h)} \left(\left(\int_{1/u}^{B_n} + \int_{-\infty}^{-1/u} \right) e^{hy} (e^{ihy} - 1) dV(y) + \int_{-1/u}^{1/u} e^{hy} (e^{ihy} - 1) dV(y) \right),$$

и в силу (1.4), (1.5) и (2.7) при $n \rightarrow \infty$

$$\left| \left(\int_{1/u}^{B_n} + \int_{-\infty}^{-1/u} \right) e^{hy} (e^{ihy} - 1) dV(y) \right| \leq 2 \int_{-\infty}^{-1/u} e^{hy} dV(y) + 2 \int_{1/u}^{B_n} e^{hy} dV(y) = O \left(V \left(-\frac{1}{u} \right) \right)$$

равномерно по $u \in [1/B_n, \sqrt{h}]$,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|y| < 1/u} e^{hy} (e^{iuy} - 1) dV(y) \right| \\ &= \left| \int_{|y| < 1/u} (e^{iuy} - 1 - iuy) dV(y) - \int_{|y| \geq 1/u} iuy dV(y) \right. \\ & \quad \left. + \int_{|y| < 1/u} (e^{hy} - 1)(e^{iuy} - 1) dV(y) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} u^2 \int_{|y| < 1/u} y^2 dV(y) + |u| \int_{|y| \geq 1/u} |y| dV(y) \\ & \quad + uhe^{h/u} \int_{|y| < 1/u} y^2 dV(y) = O\left(V\left(-\frac{1}{h}\right)\right) \end{aligned}$$

равномерно по $u \in [\varepsilon h, \sqrt{h}]$.

С учетом соотношения (2.4) из вышесказанного следует (2.11). Далее,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(f_h(u) - 1) &= \frac{1}{L(h)} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos uy - 1) e^{hy} dV(y) \\ &\leq \frac{1}{L(h)} \int_{|yu| < 1} \frac{\cos uy - 1}{(uy)^2} (uy)^2 e^{hy} dV(y) \\ &\leq \frac{\cos 1 - 1}{L(h)} u^2 e^{-h/u} \int_{|y| < 1/u} y^2 dV(y). \end{aligned}$$

Имея в виду, что

$$u^2 \int_{|y| < 1/u} y^2 dV(y) \sim \frac{\alpha}{2 - \alpha} V\left(-\frac{1}{u}\right), \quad u \rightarrow +0,$$

отсюда при всех достаточно больших n получим

$$\operatorname{Re}(f_h(u) - 1) \leq -\varepsilon V\left(-\frac{1}{u}\right), \quad \varepsilon h \leq u \leq \sqrt{h}. \quad (2.12)$$

С учетом (2.11) и (2.12) при всех больших n имеем:

$$\begin{aligned} |f_h(u)| &= \left| \exp \{f_h(u) - 1 + \theta |f_h(u) - 1|^2\} \right| \\ &\leq \exp \left\{ \operatorname{Re}(f_h(u) - 1) + |f_h(u) - 1|^2 \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -\varepsilon V\left(-\frac{1}{u}\right) \right\}, \quad \varepsilon h \leq u \leq \sqrt{h}, \end{aligned}$$

и, следовательно (см. (1.4a) и определение τ),

$$\int_{\varepsilon h}^{\sqrt{h}} |f_h(u)|^n \frac{du}{u} \leq \int_{\varepsilon h}^{\sqrt{h}} \exp \left\{ -\varepsilon n V\left(-\frac{1}{u}\right) \right\} \frac{du}{u}$$

$$= O\left(\int_{0.5nV(-1/(\varepsilon h))}^{\infty} e^{-\varepsilon t} \frac{dt}{t}\right) = O\left(\frac{1}{\tau^2}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.13)$$

Очевидно (см. (2.9)), что

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\tau y} dF_n(y) &= \int_0^{\infty} e^{-\tau y} d\Phi(y) + \int_0^{\infty} e^{-\tau y} \Phi^{(4)}(y) dy \frac{M_3}{6\sigma^3\sqrt{n}} \\ &\quad + \int_0^{\infty} (\Delta_n(y) - \Delta_n(0)) de^{-\tau y}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Пусть $x/B_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Тогда (см. (2.6), (2.7), (1.6)) $\tau \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и по (2.10), (2.13) первый интеграл в правой части равенства (2.14) имеет асимптотику $(1 + O(\tau^{-1})) / (\tau\sqrt{2\pi})$, второй — $O(1/\tau^2)$, а третий — $O(1/\tau^2 + \sqrt{h}/\tau)$. Другими словами, при $\rho_n B_n \leq x \leq \Lambda_n + B_n$, где $\rho_n \rightarrow \infty$ сколь угодно медленно,

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau y} dF_n(y) = \frac{1 + o(1)}{\tau\sqrt{2\pi}}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.15)$$

В соответствии с (1.8), (1.4), (2.5)–(2.7) и [11, (9), (10)] при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} h &\sim h_*\left(\frac{x}{n}\right), \\ Q(x) &= \ln L(h) - hx \sim -rxh_*\left(\frac{x}{n}\right), \quad B_n \leq x \leq \Lambda_n + B_n, \quad (2.16) \\ B_n h_*\left(\frac{x}{n}\right) &\sim \left(\frac{x}{B_n}\right)^{1/(\alpha-1)}, \quad B_n \leq x \leq \rho_n B_n. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$1 - F_{\alpha}(t) \sim (2\pi(\alpha-1)t^{1/r})^{-1/2} \exp\{-rt^{1/r}\}, \quad t \rightarrow +\infty,$$

и при $x \leq \rho_n B_n$ и $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \mathbf{P}\{S_n \geq x\} + O(n(1 - V(B_n))) \\ &= 1 - F_{\alpha}\left(\frac{x}{B_n}\right) + o(1) \sim 1 - F_{\alpha}\left(\frac{x}{B_n}\right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.8), (2.15), (2.16) следует равенство (2.2).

Соотношение (2.3) доказывается аналогично оценке (71) из [10]. Таким образом, доказательство леммы 1 завершено.

Лемма 2. *Равномерно по x и $\lambda \in [\omega_n, \Lambda_n]$*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_n \geq x\} &= \left(\pi(x) I\{x \leq \lambda\} + n \int_{\max(B_n, x-\lambda)}^{\infty} |\pi'(x-y)| (1 - V(y)) dy \right) \\ &\quad \times (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Отметим, что лемма 2 при $\lambda = \omega_n$ тождественна теореме 1.

Лемма 2 доказывается аналогично [10, теорема 1]. При этом используется лемма 1 и оценки

$$\begin{aligned} x h_*\left(\frac{x}{n}\right) &\sim \left(\frac{x}{B_n}\right)^{1/r+o(1)}, \\ Q(x-y) - Q(x) &\sim r x \left(1 - \left(1 - \frac{y}{x}\right)^{1/r}\right) h_*\left(\frac{x}{n}\right), \\ Q'(x) &\sim -h_*\left(\frac{x}{n}\right), \end{aligned} \quad (2.18)$$

справедливые при $B_n \leq x-y \leq x \leq \Lambda_n + B_n$ и $n \rightarrow \infty$ (напоминаем, что функция $h_*(t)$ правильно меняется с показателем $1/(\alpha-1)$ при $t \rightarrow +0$).

Доказательство замечания 1. Введем обозначения. Положим

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{1 - (1-t)^{1/r}}{t}, \\ \nu_\varepsilon(y, x) &= g(y) - (1+\varepsilon) r h_*\left(\frac{x}{n}\right) y \rho\left(\frac{y}{x}\right), \\ B_n &\leq y \leq x \leq \Lambda_n + B_n, \quad |\varepsilon| < 1. \end{aligned}$$

Пусть $\xi_\varepsilon(x) = \min_{B_n \leq y \leq x} (1/y) \nu_\varepsilon(y, x)$. Из (1.4а), (1.8) следует, что $(\nu_\varepsilon(y, x))'_x < 0$ при всех достаточно больших n и, следовательно, $\xi_\varepsilon(x)$ — строго убывающая функция.

Покажем, что уравнение $\xi_0(x) = 0$ имеет корень d_n такой, что (см. (1.15))

$$a \omega_n < d_n < b \omega_n, \quad n > n_0. \quad (2.19)$$

В самом деле, из (1.4) следует, что $g(b \omega_n) < g(\omega_n) + O(1)$ при $n \rightarrow \infty$ (и $b < 1$). Отсюда и по (1.9), (1.10) (в очередной раз напоминаем, что функция $h_*(t) t^{-1/(\alpha-1)}$ медленно меняется, если $t \rightarrow +0$) при достаточно большом n и малом $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \xi_0(b \omega_n) &\leq \frac{1}{b \omega_n} \nu_0(b \omega_n, b \omega_n) \\ &= \frac{g(b \omega_n)}{b \omega_n} - r h_*\left(\frac{b \omega_n}{n}\right) (b \omega_n)^{-1/(\alpha-1)} b^{1/(\alpha-1)} \omega_n^{1/(\alpha-1)} \\ &\leq \frac{g(\omega_n)}{b \omega_n} \left(1 + \varepsilon - (1 - \varepsilon) \frac{r}{\eta} b^{1/r}\right) < 0. \end{aligned}$$

Аналогично, принимая во внимание условие (1.5) и оценку $r \rho(t) \leq 1$, $t \in (0, 1)$, получим

$$\xi_0(a \omega_n) \geq \frac{g(a \omega_n)}{\omega_n} - (1 + \varepsilon) \frac{r}{\eta} \frac{g(\omega_n)}{\omega_n} a^{1/(\alpha-1)} \frac{1}{r}$$

$$\geq \frac{g(\omega_n)}{\omega_n} \left(a^{\delta-1} - \frac{1+\varepsilon}{\eta} a^{1/(\alpha-1)} \right) > 0.$$

Таким образом, $\xi_0(b\omega_n) < 0 < \xi_0(a\omega_n)$, что и доказывает соотношение (2.19).

Докажем теперь, что (см. (1.14), (1.15))

$$c_n \sim d_n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ и $(1 - \gamma)(1 + \varepsilon)^{1/(\alpha-1)} = 1$. Тогда при достаточно больших n

$$\begin{aligned} \xi_0((1 + \varepsilon)c_n) &\leq \min_{(1+\varepsilon)B_n \leq y \leq (1+\varepsilon)c_n} \left(\frac{g(y)}{y} - (1 - \gamma)r(1 + \varepsilon)^{1/(\alpha-1)} \right) \\ &\quad \times \rho\left(\frac{y}{(1 + \varepsilon)c_n}\right) h_*\left(\frac{\kappa_n}{n}\right) \kappa_n^{-1/(\alpha-1)} \\ &\leq \min_{B_n \leq \bar{y} \leq c_n} \left(\frac{g(\bar{y})}{\bar{y}} - r\rho\left(\frac{\bar{y}}{c_n}\right) h_*\left(\frac{\kappa_n}{n}\right) \kappa_n^{-1/(\alpha-1)} \right) = \xi(c_n) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что $\xi_0((1 - \varepsilon)c_n) \geq 0$. Таким образом, $(1 - \varepsilon)c_n \leq d_n \leq (1 + \varepsilon)c_n$, откуда в силу произвольности ε вытекает (2.20).

Оценка (1.15) следует из (2.19) и (2.20).

Для проверки первого утверждения замечания 1 согласно (2.20) достаточно показать, что

$$I_n(x) = o(\pi(x)), \quad B_n \leq x \leq (1 - \varepsilon)d_n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.21)$$

Пусть $0 < \beta$ — сколь угодно малая постоянная. Используя (2.18), (1.12), по аналогии с [10, (87)] получим

$$\begin{aligned} I_n(x) &= e^{Q(x)} O \left(n \frac{l(x)}{x^\alpha} \exp \left\{ -\nu_\beta(x - B_n, x) - \beta^2 x h_*\left(\frac{x}{n}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + n \frac{l(B_n)}{B_n^{\alpha-1}} \left(h_*\left(\frac{x}{n}\right) \frac{1}{x} \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ -\min_{B_n \leq y \leq x - B_n} \nu_\beta(y, x) - \beta^2 B_n h_*\left(\frac{x}{n}\right) \right\} \right). \quad (2.22) \end{aligned}$$

Далее, при $B_n \leq y \leq x - B_n$, $x \leq (1 - \varepsilon)d_n$ (и $(1 + \beta)^2(1 - \varepsilon)^{1/(\alpha-1)} \leq 1$)

$$\begin{aligned} \nu_\beta(y, x) &\geq B_n \xi_\beta(x) \geq B_n \xi_\beta((1 - \varepsilon)d_n) \\ &\geq \min_{B_n \leq \bar{y} \leq d_n} \left(\frac{g(\bar{y})}{\bar{y}} - r(1 + \beta)^2(1 - \varepsilon)^{1/(\alpha-1)} \rho\left(\frac{\bar{y}}{d_n}\right) h_*\left(\frac{d_n}{n}\right) \right) \\ &\geq \xi_0(d_n) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.22) следует соотношение (2.21). Равенство (1.16а), таким образом, доказано.

Докажем (1.16б). Для этого достаточно показать, что

$$\pi(x) = o(I_n(x)), \quad (1 + \varepsilon) d_n \leq x \leq \omega_n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.23)$$

Пусть y_* — наименьшее решение уравнения $\nu_0(y_*, d_n) = 0$. Тогда $\beta d_n \leq y_* \leq d_n$.

В самом деле (см. (1.9), (2.19)),

$$\begin{aligned} \frac{g(y_*)}{y_*} &= r h_* \left(\frac{d_n}{n} \right) \rho \left(\frac{y_*}{d_n} \right) \asymp h_* \left(\frac{\kappa_n}{n} \right) \rho \left(\frac{y_*}{d_n} \right) \\ &\asymp \frac{g(\kappa_n)}{\kappa_n} \rho \left(\frac{y_*}{d_n} \right) \asymp \frac{g(\kappa_n)}{\kappa_n}, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

что при $y_* < \beta \kappa_n$ противоречит условию (1.5).

Положим $\bar{y}_* = (1 + \bar{\varepsilon}) y_*$, где $0 < \bar{\varepsilon} < \varepsilon$. Тогда

$$I_n(x) \geq n (1 - V(\bar{y}_*)) \pi(x - \bar{y}_*) \left(1 - \frac{\pi(x - B_n)}{\pi(x - \bar{y}_*)} \right) \quad (2.24)$$

и (см. (2.18), (1.12)) при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} n(1 - V(\bar{y}_*)) &= e^{-g(\bar{y}_*)} \left(\frac{\kappa_n}{B_n} \right)^{-\alpha + o(1)}, \\ \frac{\pi(x - B_n)}{\pi(x - \bar{y}_*)} &\sim \exp \{ Q(x - B_n) - Q(x - \bar{y}_*) \} \\ &\quad \times \left(\frac{h_*((x - \bar{y}_*)/n)(x - \bar{y}_*)}{h_*((x - B_n)/n)(x - B_n)} \right)^{1/2} \\ &= O \left(\exp \left\{ -\beta \kappa_n h_* \left(\frac{x}{n} \right) \right\} \right), \quad (2.25) \\ \frac{\pi(x - \bar{y}_*)}{\pi(x)} &\geq \exp \left\{ (r + o(1)) \bar{y}_* h_* \left(\frac{x}{n} \right) \rho \left(\frac{\bar{y}_*}{x} \right) \right\} \\ &\geq \exp \left\{ g(\bar{y}_*) + \beta \kappa_n h_* \left(\frac{x}{n} \right) - \nu_{-\beta}(\bar{y}_*, x) \right\} \\ &\geq \exp \left\{ g(\bar{y}_*) + \beta \kappa_n h_* \left(\frac{x}{n} \right) \right\} \end{aligned}$$

(β — малая положительная постоянная), поскольку при $\omega_n \geq x \geq$

$$(1 + \varepsilon) d_n \text{ и } (1 - \beta)^2 (1 + \varepsilon)^{1/r} \geq 1 + \bar{\varepsilon}$$

$$\begin{aligned} \nu_{-\beta}(\bar{y}_*, x) &\leq \nu_{-\beta}(\bar{y}_*, (1 + \varepsilon) d_n) \\ &\leq \frac{g(y_*)}{y_*} - (1 - \beta) r h_* \left(\frac{(1 + \varepsilon) d_n}{n} \right) \rho \left(\frac{\bar{y}_*}{(1 + \varepsilon) d_n} \right) \\ &\leq \frac{g(y_*)}{y_*} - (1 - \beta)^2 r h_* \left(\frac{d_n}{n} \right) (1 + \varepsilon)^{1/(\alpha-1)} \rho \left(\frac{y_*}{d_n} \right) \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 + \bar{\varepsilon}} \right) \\ &\leq \nu_0(y_*, d_n) = 0 \end{aligned}$$

(нетрудно проверить, что $\rho(t) \geq \lambda \rho(t\lambda)$, $0 < \lambda < 1$). Используя соотношения (2.25) и неравенство (2.24), получим (2.23).

Замечание 1 доказано.

Доказательство замечания 2. Положим $h_n = h_* \times (\kappa_n/n) \kappa_n^{-1/(\alpha-1)}$, $\bar{g}(y) = g(y) y^{-\delta}$, $\xi(y, x) = y^{-1}(g(y) - r h_n(x^{1/r} - (x - y)^{1/r}))$, и пусть $\min_{B_n \leq y \leq c_n} \xi(y, c_n) = 0$ (см. (1.14)).

Покажем, что при $x \asymp \eta_n$, $n \rightarrow \infty$, и достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\min_{B_n \leq y \leq \varepsilon \eta_n} \xi(y, x) > \xi(x, x) \geq \min_{\varepsilon \eta_n \leq y \leq x} \xi(y, x). \quad (2.26)$$

Пусть для определенности $a \eta_n \leq x \leq \eta_n$, где $a > \varepsilon^{2/(1-\delta)}$. Тогда левая часть неравенства (2.26) по (1.5), (1.17) не превосходит

$$\begin{aligned} \frac{g(\varepsilon \eta_n)}{\varepsilon \eta_n} - h_n x^{1/(\alpha-1)} &\geq \frac{g(x)}{x} \left(\left(\frac{\varepsilon \eta_n}{x} \right)^{\delta-1} - h_n \eta_n^{1/r-1} \frac{\eta_n}{g(\eta_n)} \right) \\ &\geq \frac{g(x)}{x} > \xi(x, x). \end{aligned}$$

Случай $\eta_n \leq x \leq b \eta_n$, где $b < \varepsilon^{(\delta-1)(\alpha-1)} - 1$, рассматривается аналогично.

Функция $\bar{g}(y)$ медленно меняется. Поэтому если $x \asymp y \asymp \eta_n$ при $n \rightarrow \infty$, то (см. (1.17))

$$\xi(y, x) \sim \bar{g}(\eta_n) \left(t^{\delta-1} - (r + o(1)) \frac{u^{1/r} - (u-t)^{1/r}}{t} \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.27)$$

где $t = y/\eta_n$, $u = x/\eta_n$. Положим $\omega(t, u) = t^{\delta-1} - r(u^{1/r} - (u-t)^{1/r})/t$. Принимая во внимание (2.26), (2.27), так же как при доказательстве соотношения (2.20), можно показать, что

$$c_n \sim \bar{x} \eta_n, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.28)$$

где $\min_{\varepsilon \leq t \leq \bar{x}} \omega(t, \bar{x}) = 0$, положительное ε достаточно мало.

Проанализируем поведение $\omega(t, \bar{x})$ как функции t . Имеем: $\omega(\varepsilon, \bar{x}) > 0$, если $\varepsilon > 0$ и достаточно мало. При $\delta = 0$ функция $\omega(t, \bar{x})$ убывает

и $\omega(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ при $\bar{x} = (1/r)^r$. Пусть $\delta > 0$. Предположение, что минимум $\omega(t, \bar{x})$ достигается в точке $\bar{x}$ не верно, поскольку $\omega'(\bar{x}, \bar{x}) > 0$. Итак, минимум $\omega(t, \bar{x})$ достигается в точке $\bar{t}$ внутри интервала $(\varepsilon, \bar{x})$ и, следовательно, $\omega(\bar{t}, \bar{x}) = \omega'(\bar{t}, \bar{x}) = 0$. Отсюда получим равенство

$$\bar{x} = \bar{t} + \nu \bar{t}^{-\omega}, \quad \text{где } \nu = \delta^{r/(1-r)}, \quad \omega = \frac{r - r\delta}{1-r}. \quad (2.29)$$

Подставляя найденное для $\bar{x}$ представление в уравнение $\omega(\bar{t}, \bar{x}) = 0$, находим, что

$$(1+u)^{1/r} - 1 = \kappa u, \quad \text{где } u = \frac{1}{\nu} \bar{t}^{1+\omega}, \quad \kappa = (r\nu^{(1-r\delta)/(r(1+\omega))})^{-1} = \frac{1}{r\delta}.$$

Последнее уравнение имеет единственный положительный корень u_* . Таким образом, $\bar{t} = (\nu u_*)^{1/(1+\omega)}$ и (см. (2.29))

$$\bar{x} = (1 + u_*^{-1}) \bar{t} = \delta^{r/(1-r\delta)} (u_*^{(1-r)/(1-r\delta)} + u_*^{-(r-r\delta)/(1-r\delta)}).$$

Отсюда и из (2.28) следует первое утверждение в (1.18), второе — очевидно.

Замечание 2 доказано.

Доказательство теоремы 3 и замечания 3. Из (1.4a), (1.6), (1.9), (1.10) и (1.19) следует, что при $\eta_n = \eta(B_n)$ и $n \rightarrow \infty$

$$\left(\frac{g(\kappa_n)}{\kappa_n} \right)^{\alpha-1} l \left(\frac{\kappa_n}{g(\kappa_n)} \right) \asymp \frac{\kappa_n l(B_n)}{B_n^\alpha} \sim \frac{\kappa_n}{B_n^\alpha} l \left(B_n \left(\frac{B_n}{\eta_n} \right)^{1/(\alpha-1)} \right),$$

откуда по (1.20) и свойству медленно меняющихся функций

$$\begin{aligned} \left(\frac{g(\kappa_n)}{g(\eta_n)} \left(\frac{\eta_n}{\kappa_n} \right)^{1/r} \right)^{\alpha-1} &\asymp \frac{l(B_n (\frac{B_n}{\eta_n})^{1/(\alpha-1)})}{l(\kappa_n/g(\kappa_n))} = \left(\frac{g(\kappa_n) B_n}{\kappa_n} \left(\frac{B_n}{\eta_n} \right)^{\alpha-1} \right)^{o(1)} \\ &= \left(\frac{g(\kappa_n)}{g(\eta_n)} \frac{\eta_n}{\kappa_n} \right)^{o(1)} \end{aligned}$$

или

$$\frac{g(\kappa_n) \eta_n}{g(\eta_n) \kappa_n} \asymp \left(\frac{\kappa_n}{\eta_n} \right)^{1/(\alpha-1)+o(1)}$$

По (1.5) отсюда и из (1.10) вытекает соотношение

$$\omega_n \asymp \kappa_n \asymp \eta(B_n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.30)$$

Пусть $B_n \leq x = O(\eta(B_n))$, $n \rightarrow \infty$; $h_* = h_*(x/n)$, $\bar{h} = (1/B_n) \times (x/B_n)^{1/(\alpha-1)}$.

В согласии с (1.8), (1.4a), (1.6) и (1.19)

$$h_*^{\alpha-1} l \left(\frac{1}{h_*} \right) \sim c_\alpha \frac{x}{n} \sim \frac{x}{B_n^\alpha} l(B_n) \sim \bar{h}^{\alpha-1} l \left(\frac{1}{\bar{h}} \right), \quad n \rightarrow \infty,$$

откуда следует соотношение (1.21). Остается воспользоваться (2.30) и теоремой 1.

Докажем замечание 3. Из теоремы 1 и (1.12) следует, что

$$P\{S_n > x\} = \exp \left\{ - (r + o(1)) x h_* \left(\frac{x}{n} \right) \right\}, \quad \rho_n B_n < x \leq \gamma \kappa_n, \quad n \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, имеет место соотношение (1.23). Следовательно, при $x = x_n = \gamma \min(\eta(B_n), \kappa_n)$ выполняется (1.21). Отсюда с помощью (1.6) и (1.8) ($z = x/n$) заключаем, что

$$l(B_n) \sim l\left(\frac{B_n^{1/r}}{x^{1/r-1}}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (2.31)$$

равномерно по $x \in (\rho_n B_n, x_n)$.

Если $\eta(B_n) = O(\kappa_n)$, $n \rightarrow \infty$, из (2.31) следует (1.19).

Предположим, что существует подпоследовательность n' такая, что

$$\kappa_{n'} = o(\eta(B_{n'})), \quad n' \rightarrow \infty. \quad (2.32)$$

Из (1.9) и (1.8) следует, что

$$\left(\frac{\kappa_n}{B_n}\right)^{1/r} \frac{1}{g(\kappa_n)} \asymp \lambda_n, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.33)$$

где $\lambda_n = l(\kappa_n/g(\kappa_n))/l(B_n)$. Поскольку $x_{n'} = \gamma \kappa_{n'}$, из (2.31) получим соотношение $l(B_{n'}) \sim l(B_{n'}^{1/r}/\kappa_{n'}^{1/r-1})$, $n' \rightarrow \infty$, и, следовательно, по свойству медленно меняющихся функций

$$\begin{aligned} \lambda_{n'} &= \frac{l(\kappa_{n'}/g(\kappa_{n'}))}{l((\kappa_{n'}/g(\kappa_{n'}))g(\kappa_{n'})(B_{n'}/\kappa_{n'})^{1/r})} \\ &= \left(\left(\frac{\kappa_{n'}}{B_{n'}}\right)^{1/r} \frac{1}{g(\kappa_{n'})} \right)^{o(1)}, \quad n' \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.33), в свою очередь, вытекает вступающее в противоречие с (1.20) и (2.32) равенство $(\kappa_{n'}/B_{n'})^{1/r} \asymp g(\kappa_{n'})$, $n' \rightarrow \infty$. Замечание 3 доказано.

Доказательство замечания 3 и следствия.

Итак, пусть выполняются условия теоремы 3. Ниже будем считать, что $B_n \leq x \leq \gamma \omega_n$, $\gamma > 1$. В соответствии с [11, (9)], (2.4)–(2.7) и (1.21) при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} Q(x) &= n(L(h) - 1) - xh - \left(\frac{1}{2}c^2 + o(1)\right)nV^2\left(-\frac{1}{h}\right), \\ cV\left(-\frac{1}{h}\right) &\sim \frac{(hB_n)^\alpha}{\alpha n} \sim \frac{1}{\alpha n} \left(\frac{x}{B_n}\right)^{1/r}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где h — решение уравнения (2.7).

Положим $\bar{x} = x/B_n$, $\bar{h} = h/B_n$. Имеем:

$$xh = \bar{x}\bar{h} = r\bar{x}^{1/r} + \frac{1}{\alpha}\bar{h}^\alpha - \frac{1}{\alpha}\bar{x}^{1/r}(t^\alpha - \alpha t + \alpha - 1), \quad (2.35)$$

где $t = \bar{h}/\bar{x}^{1/(\alpha-1)}$, $r = (\alpha-1)/\alpha$. При этом $t \rightarrow 1$, когда $n \rightarrow \infty$, и, следовательно, $t^\alpha - \alpha t + \alpha - 1 \sim (2r)^{-1}(1 - t^{\alpha-1})^2$, $n \rightarrow \infty$.

Отсюда, из (2.34) и (2.35) следует, что соотношение (1.25) равносильно равенству

$$\begin{aligned} n \left(L(h) - 1 - \frac{1}{\alpha n} \bar{h}^\alpha - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{h}^\alpha}{\alpha n} \right)^2 \right) + o(1) \frac{1}{n} \bar{x}^{2/r} \\ + \frac{1 + o(1)}{2(\alpha-1)} \bar{x}^{1/r-2} (\bar{x} - \bar{h}^{\alpha-1})^2 = o(1), \\ B_n \leq x \leq \gamma \omega_n, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Пусть $\delta_0 = \alpha/(\alpha+1)$ и (см. (1.4a))

$$\frac{g(z)}{z^{\delta_0}} l^{1/(1+\alpha)} \left(\frac{z}{g(z)} \right) = O(1), \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.37)$$

Тогда

$$\frac{1}{n} \left(\frac{\eta(B_n)}{B_n} \right)^{2/r} = O(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.38)$$

В самом деле, из (1.4a), (1.6) и (1.20) при $\eta = \eta(B_n)$ следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left(\frac{\eta}{B_n} \right)^{2/r} &\asymp \frac{l(B_n)}{B_n^\alpha} \left(\frac{\eta}{B_n} \right)^{2/r} \sim l(B_n) \left(\frac{g^r(\eta)}{\eta} \right)^\alpha g^2(\eta) \\ &= l(B_n) \left(\frac{g(\eta)}{\eta^{\delta_0}} \right)^{\alpha+1}; \end{aligned}$$

кроме того (см. (1.20), (1.21)), $l(B_n) \sim l((\eta(B_n)/\eta)^{1/r}) \sim l(\eta/g(\eta))$, $n \rightarrow \infty$.

Положим $\hat{h} = (hB_n)^\alpha/(\alpha n)$. Тогда (см. (2.38)) при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} L(h) - 1 - \hat{h} - \frac{1}{2} \hat{h}^2 &= L(h) - e^{\hat{h}/\alpha} + O(\hat{h}^3), \\ \hat{h}^3 &= \frac{1}{n^3} O \left(\left(\frac{\eta(B_n)}{B_n} \right)^{3/r} \right) = o \left(\frac{1}{n} \right). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Известно (см. [1, теорема 2.6.1]), что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{sy} dF_\alpha(y) = \exp \left\{ \frac{1}{\alpha} s^\alpha \right\}, \quad s > 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 L(h) - e^{\hat{h}} &= \int_{-\infty}^{B_n} e^{hy} dV(y) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} dF_{\alpha}\left(y \frac{n^{1/\alpha}}{B_n}\right) \\
 &= \int_{-\infty}^{-1/h} e^{hy} d\Delta(y) + \int_{-1/h}^{1/h} e^{hy} d\Delta(y) \\
 &\quad + \int_{1/h}^{B_n} e^{hy} dV(y) - \int_{1/h}^{\infty} e^{hy} dF_{\alpha}\left(y \frac{n^{1/\alpha}}{B_n}\right) \\
 &= I_1 + I_2 + I_3 - I_4;
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
 |I_1| &= \left| \int_{-\infty}^{-1/h} \left(\Delta\left(-\frac{1}{h}\right) - \Delta(y) \right) de^{hy} \right| \\
 &\leq \frac{1}{e} \sup_{y \leq -1/h} \left| \int_y^{-1/h} d\Delta(y) \right| \leq \frac{2}{e} \sup_{y \leq -1/h} |\Delta(y)|.
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Путем стандартных рассуждений получим

$$\begin{aligned}
 |I_2| &\leq 2 \left(\Delta\left(-\frac{1}{h}\right) + h \left| \int_{-\infty}^{-1/h} y d\Delta(y) \right| \right. \\
 &\quad \left. + h^2 \left| \int_{-1/h}^{1/h} y^2 d\Delta(y) \right| + h^3 \int_{-1/h}^{1/h} y^2 |\Delta(y)| dy \right) \\
 &\quad + 3 \left(h \int_{1/h}^{\infty} (1 - V(y)) dy + 1 - V\left(\frac{1}{h}\right) \right. \\
 &\quad \left. + h \int_{1/h}^{\infty} y dF_{\alpha}\left(y \frac{n^{1/\alpha}}{B_n}\right) \right),
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$I_3 \leq e \left(1 - V\left(\frac{1}{h}\right) \right) + h \int_{1/h}^{B_n} e^{hy} (1 - V(y)) dy. \tag{2.43}$$

Оценим второе слагаемое в (2.43). При $y \in (1/h, B_n)$, $h \leq h_n = O(g(\eta(B_n))/\eta(B_n))$ и $\varepsilon > 0$ выполняется $hy - \varepsilon g(y) \leq h_n y - \varepsilon y g(y)/y \leq y(h_n - \varepsilon g(B_n)/B_n) < 0$, если n достаточно велико. Пусть $\varepsilon \in (1/\alpha, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned}
 h \int_{1/h}^{B_n} e^{hy} (1 - V(y)) dy &= O \left(h_n \int_{1/h_n}^{B_n} \exp \{ h_n y - \varepsilon g(y) \} \right. \\
 &\quad \left. \times V^{\varepsilon}(-y) (1 - V(y))^{1-\varepsilon} dy \right) \\
 &= O \left(\left(1 - V\left(\frac{1}{h_n}\right) \right)^{1-\varepsilon} h_n \int_{1/h_n}^{\infty} V^{\varepsilon}(-y) dy \right)
 \end{aligned}$$

$$= O\left(V\left(-\frac{1}{h_n}\right) \exp\left\{-(1-\varepsilon)g\left(\frac{1}{h_n}\right)\right\}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.44)$$

Аналогично, при $h \leq h_n$

$$\begin{aligned} 1 - V\left(\frac{1}{h}\right) + h \int_{1/h}^{\infty} (1 - V(y)) dy \\ = O\left(V\left(-\frac{1}{h_n}\right) \exp\left\{-(1-\varepsilon)g\left(\frac{1}{h_n}\right)\right\}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Кроме того, $1 - F_\alpha(z) = \exp\{-(r + o(1))z^{1/\tau}\}$, $z \rightarrow \infty$, откуда

$$I_4 + h \left| \int_{1/h}^{\infty} y dF_\alpha\left(y \frac{n^{1/\alpha}}{B_n}\right) \right| = \frac{1}{n^2} o(h_n B_n)^{2\alpha}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.46)$$

Пусть выполняется условие (1.24) (и (2.37)). В этом случае (напомним, что $h \sim (x/B_n^\alpha)^{1/(\alpha-1)} \leq (a\omega_n/B_n^\alpha)^{1/(\alpha-1)}$, $a > \gamma$, если $B_n \leq x \leq \gamma\omega_n$) справедливо равенство

$$n \left(L(h) - 1 - \hat{h} - \frac{1}{2} \hat{h}^2 \right) = o(1), \quad B_n \leq x \leq \gamma\omega_n, \quad n \rightarrow \infty \quad (2.47)$$

(где $\hat{h} = (hB_n)^\alpha/(\alpha n)$).

Теперь рассмотрим третье слагаемое в равенстве (2.36). Так же, как в (2.34),

$$\begin{aligned} \bar{x} - \bar{h}^{\alpha-1} &= \bar{h}^{-1} \left(nhL'(h) - \bar{h}^\alpha - n\alpha c^2 V^2\left(-\frac{1}{h}\right) (1 + o(1)) \right) \\ &= n\bar{h}^{-1} \left(hL'(h) - \frac{\bar{h}^\alpha}{n} - (\alpha c^2 + o(1)) \left(\frac{\bar{h}^\alpha}{n} \right)^2 \right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Анализ последнего выражения осуществляется аналогично тому, как это делалось при получении (2.47), и приводит к оценке $\bar{x}^{1/r-2}(\bar{x} - \bar{h}^{\alpha-1})^2 = o(1)$, $n \rightarrow \infty$, заведомо справедливой при условии (2.37). Отсюда, из (2.37) и (2.47) следует (2.36), что доказывает основное утверждение замечания 4, причем при выполнении более слабого предположения (2.37) относительно возможного роста функции $g(y)$.

Известно [1, с. 116], что

$$F_\alpha(-y) - \frac{c_\alpha}{y^\alpha} \asymp y^{-2\alpha}, \quad y \rightarrow \infty. \quad (2.48)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \sup_{y \leq -1/h} |\Delta(y)| + h \left| \int_{-\infty}^{-1/h} y d\Delta(y) \right| \\ &= \sup_{y \leq -1/h} |\tilde{\Delta}(y)| + h \left| \int_{-\infty}^{-1/h} y d\tilde{\Delta}(y) \right| + O(h^{2\alpha}), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

но если имеет место (1.5) при $\delta < \delta_0$ (см. (2.37)), то

$$nh^{2\alpha} = o(1), \quad B_n \leq x = O(\eta(B_n)), \quad n \rightarrow \infty,$$

что проверяется так же, как оценка (2.38).

Возможность замены $\int_{-1/h}^0 y^2 |\Delta(y)| dy$ на $\int_{-1/h}^0 y^2 |\tilde{\Delta}(y)| dy$ при условиях (1.5), (1.27) обосновывается со ссылкой на равенство (2.48) так же, как при доказательстве (2.38) (проблемы, возникающие при $\alpha = \frac{3}{2}$, оказываются кажущимися).

Докажем, что при условиях (1.5), (1.27)

$$\begin{aligned} J_h &= h^3 \int_0^{1/h} y^2 |\Delta(y)| dy = o\left(\frac{1}{n}\right), \\ B_n &\leq x = O(\eta(B_n)), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Имеем, как и выше,

$$J_h = \bar{J}_h + h^3 O\left(\rho_n + \frac{B_n}{n^{1/\alpha}}\right)^3 = \bar{J}_h + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\bar{J}_h = h^3 \int_{\rho_n}^{1/h} y^2 (1 - V(y)) dy$, ρ_n сколь угодно медленно стремится к бесконечности.

Пусть $\eta = \eta(z)$ удовлетворяет условию $\eta/g^r(\eta) = z$, $\psi(z) = \nu\eta/g(\eta)$, $\nu = (1/a)^{1/(\alpha-1)}$. Тогда (см. (1.5)) $g(\psi(z)) \geq \nu^\delta g^{1-\delta}(\eta)$, $\psi(z)/z = \nu g^{1/(\alpha-1)}(\eta)$ и, следовательно,

$$e^{-g(y)} \leq \left(\frac{y}{\psi^{-1}(y)} \right)^K \quad \text{при всех } y > y(K, \delta, \nu),$$

где $\psi^{-1}(z)$ — функция, обратная к $\psi(z)$. Отсюда при $\varepsilon > 0$ и $\Omega_\varepsilon(y) = y^{(3-2\varepsilon)/\alpha} / \psi^{-1}(y)$

$$\begin{aligned} \bar{J}_h &= o(1) h^3 \int_{\rho_n}^{1/h} y^{2-\alpha} l(y) \left(\frac{y}{\psi^{-1}(y)} \right)^\alpha dy = o(1) h^3 \int_{\rho_n}^{1/h} y^\varepsilon l(y) \Omega_\varepsilon^\alpha(y) \frac{dy}{y^{1-\varepsilon}} \\ &= o(1) h^3 l\left(\frac{1}{h}\right) h^{-\varepsilon} \Omega_\varepsilon^\alpha\left(\frac{1}{h}\right) h^\varepsilon = o(1) l\left(\frac{1}{h}\right) \left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{h}\right) \right)^{-\alpha}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

поскольку, как легко проверить, $\Omega_\varepsilon(y)$ не убывает, если выполняется (1.5) с $\delta < (3 - \alpha)/(4 - \alpha)$. По (1.19) при $b_n^{-1} < h \leq h_n = g(\eta(B_n))/(\nu\eta(B_n)) = (1/\nu)(\eta(B_n)/B_n^\alpha)^{1/(\alpha-1)}$

$$l\left(\frac{1}{h}\right) \sim l(B_n), \quad n \rightarrow \infty,$$

а $\psi^{-1}(1/h) \geq \psi^{-1}(1/h_n) = B_n$ по определению функции ψ . Таким образом, $n\bar{J}_h = o(1)$, $n \rightarrow \infty$. Соотношение (2.49), а вместе с ним и замечание 4, доказаны.

Теперь докажем следствие. Пусть

$$B_n = n^{1/\alpha}, \quad \bar{\Delta}(-z) = \sup_{y \leq -z} |\tilde{\Delta}(y)|.$$

Введем функцию $\lambda(z)$, $z \geq 1$, положив $\lambda(z) = z^{-3} \int_{-z}^0 y^2 \bar{\Delta}(-y) dy$. Легко понять, что функция $\lambda(z)$ не возрастает и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \lambda(z) &\geq \frac{1}{3} \bar{\Delta}(z) \quad \text{и} \\ \min(1, \varepsilon^{-3}) &\leq \frac{\lambda(\varepsilon z)}{\lambda(z)} \leq \max(1, \varepsilon^{-3}) \quad \text{при } z, \varepsilon z > 1. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Положим $h_n = 1/\psi(B_n)$. Учитывая, что

$$\begin{aligned} h \left| \int_{-\infty}^{-1/h} y d\tilde{\Delta}(y) \right| &\leq \left| \tilde{\Delta}\left(-\frac{1}{h}\right) \right| + h \left| \int_{-\infty}^{-1/h} \tilde{\Delta}(y) dy \right| \\ &\leq \bar{\Delta}\left(-\frac{1}{h}\right) + h \int_{-\infty}^{-1/h} \bar{\Delta}(y) dy, \end{aligned}$$

а функция $\xi(h) = h \int_{-\infty}^{-1/h} \bar{\Delta}(y) dy$ не убывает, из (2.51) при любом $\nu > 1$ получим оценку

$$\begin{aligned} \sup_{0 < h \leq \nu h_n} &\left(\left| \tilde{\Delta}\left(-\frac{1}{h}\right) \right| + h \left| \int_{-\infty}^{-1/h} y d\tilde{\Delta}(y) \right| + h^3 \int_{-1/h}^0 y^2 |\tilde{\Delta}(y)| dy \right) \\ &\leq 4\lambda\left(\frac{1}{\nu h_n}\right) + \xi\left(\frac{1}{\nu h_n}\right) \leq (1 + 3\nu) \nu^3 \lambda\left(\frac{1}{h_n}\right) + \nu \xi\left(\frac{1}{h_n}\right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Если выполнены условия (1.27), (1.29) и $B_n = n^{1/\alpha}$, то

$$\begin{aligned} n\lambda\left(\frac{1}{h_n}\right) &= O(nh_n^3) + o(1) nh_n^3 \int_{-1/h_n}^{-\rho_n} |y|^{2-\alpha} \left(\frac{|y|}{\psi^{-1}(|y|)}\right)^\alpha dy \\ &= o(1) \left(1 + \psi^{-1}\left(\frac{1}{h_n}\right) h_n^3 \int_{\rho_n}^{1/h_n} y^{2-\alpha} \left(\frac{y}{\psi^{-1}(y)}\right)^\alpha dy\right) \\ &= o(1), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.53)$$

вполне аналогично (2.50); далее, при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} n\xi\left(\frac{1}{h_n}\right) &= o(1)nh_n \int_{-\infty}^{-1/h_n} \frac{dy}{\psi^{-1\alpha}(|y|)} \\ &= o(1)\psi^{-1\alpha}\left(\frac{1}{h_n}\right)h_n^{-\varepsilon} \int_{1/h_n}^{\infty} \frac{dy}{y^{1+\varepsilon}} = o(1), \end{aligned} \quad (2.54)$$

поскольку функция $y^{(1+\varepsilon)/\alpha}/\psi^{-1}(y)$ не возрастает при некотором положительном ε , если $y^\gamma g(y)$ не убывает при некотором $\gamma < (\alpha - 1)/(2 - \alpha)$.

Покажем теперь, что из условий (1.28), (1.29) следует оценка

$$\sup_{1/B_n < h \leq \nu h_n} h^2 \left| \int_{|y| < 1/h} y^2 d\Delta(y) \right| = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.55)$$

Пусть $h \leq h_n$. Тогда

$$\begin{aligned} nh^2 \left| \int_{|y| < 1/h} y^2 d\Delta(y) \right| &\leq nh_n^2 \left| \int_{|y| < 1/h_n} y^2 d\Delta(y) \right| + n \int_{1/h_n}^{\infty} d(V(y) + F_\alpha(y)) \\ &\quad + nh^2 \left| \int_{-1/h}^{-1/h_n} y^2 d\Delta(y) \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.56)$$

(первые два слагаемых стремятся к нулю по (1.28), (1.6), а третье, после интегрирования по частям, оценивается с помощью (2.48) и (1.29)).

Случай $h_n \leq h \leq \nu h_n$ исследуется аналогично.

Следствие вытекает из замечания 4 и оценок (2.52)–(2.55).

В оптимальности условия (1.28) несложно убедиться, проанализировав доказательства замечания 4 и следствия 1.

Доказательство замечаний 5а и 5б. Имеем:

$$I_n(x) = n(J_1 + \dots + J_4), \quad (2.57)$$

где

$$J_1 = \int_{x+\rho_1 B_n}^{\infty} \dots, \quad J_2 = \int_{-\rho_2 B_n \leq y-x \leq \rho_1 B_n} \dots, \quad J_3 = \int_{\max(\beta x, T_n)}^{x-\rho_2 B_n} \dots,$$

$T_n = \max(B_n, x - \omega_n)$, β — достаточно малая положительная постоянная, ρ_1, ρ_2 сколь угодно медленно стремятся к бесконечности с ростом n .

Рассуждения, аналогичные [10, (91), (94)–(96)], приводят к оценке

$$J_1 + J_2 + J_3 = o(1) \left(1 - V(x) + \frac{1}{n} \pi(x) \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.58)$$

Пусть $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Тогда

$$J_2 \sim (1 - V(x)) \int_{|t| \leq \rho B_n} |\pi'(t)| \exp \{g(x) - g(x-t)\} dt, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.59)$$

Поскольку функция $1 - V(x)$ не возрастает, из (1.31), исправляя не-точность, допущенную в [10], получим

$$g(u) - g(v) \geq \ln \frac{H(u)}{H(v)} - (\alpha + o(1)) \ln \frac{u}{v}, \quad u \geq v, \quad v \rightarrow \infty. \quad (2.60)$$

Отсюда и из (1.34) следует, что

$$|g(x) - g(x - t)| \leq |t| \max_{\theta \in (0,1)} (g'(x - \theta t))^+ + o(1) = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Кроме того (см. (1.12)),

$$|\pi'(t)| \sim F'_\alpha \left(\frac{t}{B_n} \right) B_n, \quad |t| \leq \rho B_n, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.61)$$

если ρ стремится к бесконечности достаточно медленно.

Сказанное вместе с (2.57)–(2.59) приводит к равенству (1.33).

Равенство (1.39) доказывается аналогично предыдущему и лемме 2b из [10]. При этом в (2.59) помимо (2.61) используется соотношение (2.39).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а м е ч а н и я 5в. Пусть выполняется условие (1.45) и $x > \varepsilon \eta(B_n)$. Положим $a_l = |B_n^l g^{(l)}(x)|$, $1 \leq l \leq k$. Выберем в представлении (2.57) $\rho_2 = (1 + a_1^{\alpha-1}) \rho_1$. Если $\rho_1 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ достаточно медленно, то $\rho_2 B_n = o(x)$, $n \rightarrow \infty$. В силу предположения (1.43) (из которого вытекает (1.19) и (1.25))

$$J_2 \sim (1 - V(x)) (J_{21} + J_{22}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.62)$$

где

$$J_{21} = \int_{-\rho_1}^0 \exp \{g(x) - g(x - tB_n)\} dF_\alpha(t),$$

$$J_{22} = \int_0^{\rho_2} \exp \{g(x) - g(x - tB_n)\} dF_\alpha(t).$$

Пусть $\Delta = g(x) - g(x - tB_n)$, $t \in (-\rho_1, \rho_2)$; $P_m(t) = \sum_{l=1}^m (t^l/l!) a_l$, $1 \leq m \leq k$.

Из условия (1.42) при $l = 2$ вытекает (1.38) и, следовательно,

$$\Delta = tB_n g'(x - \theta tB_n) |_{\theta \in (0,1)} \sim t a_1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда (см. также [1, теорема 2.6.2]) следует, что

$$J_{21} \sim \int_{-\infty}^0 e^{t a_1} dF_\alpha(t), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.63)$$

Далее,

$$\Delta = P_{k-1}(t) - \frac{(-tB_n)^k}{k!} g^{(k)}(x - \theta tB_n) |_{\theta \in (0,1)}. \quad (2.64)$$

Из (1.42), (1.45) и (2.63) при не слишком быстро растущем ρ_1 без труда получим оценку

$$\Delta = P_{k-1}(t) + o(1), \quad 0 \leq t \leq \rho_2, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.65)$$

Учитывая, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} P_{k-1}(t) &\sim ta_1, & 0 \leq t \leq \rho_2, \\ P_{k-1}(t) &= o(t^{1/r}), & t > \rho_2, \end{aligned}$$

приходим к соотношению

$$J_{22} \sim \int_0^{\rho_2} e^{P_{k-1}(t)} dF_\alpha(t) \sim \int_0^\infty e^{P_{k-1}(t)} dF_\alpha(t), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.66)$$

Теперь (1.44) следует из (2.58), (2.62), (2.63) и (2.66).

Если же $k \leq \alpha/(\alpha-1)$ и выполнены условия (1.46) и (1.45) с O вместо o , то из (2.64) вместо (2.65) получим соотношение

$$\Delta = P_k(t) + o(1)t^k a_k = P_k(t) + o(1), \quad 0 \leq t \leq \rho_2, \quad n \rightarrow \infty,$$

и соответствующую оценку для J_{22} . Остальные рассуждения не меняются.

Замечание 5в доказано.

Доказательство замечания 5г. Пусть выполняются условия (1.48), (1.49), (1.53), (1.54) и при всех достаточно больших n

$$B_n g'(x) > \rho_n, \quad (2.67)$$

где последовательность ρ_n стремится к бесконечности сколь угодно медленно. Покажем, что в этом случае

$$I_n(x) \sim \hat{I}_n(x) = n \int_{T_n}^{x-B_n} |\pi'(x-y)| \bar{V}(y) dy, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.68)$$

где $T_n = \max(B_n, x - \omega_n)$, $\bar{V}(y) = 1 - V(y)$.

Действительно, пусть $\rho = \rho_n^{\alpha-1}$. Тогда по (1.12), (1.48), (1.49) (см. также (2.16), (2.18)), начиная с некоторого n ,

$$\begin{aligned} \hat{I}_n(x) &\geq n \bar{V}(x - \rho B_n) \int_{\rho B_n}^{a\omega_n - B_n} |\pi'(t)| dt \\ &\geq n \bar{V}(x - B_n) \rho_n^{-1} \exp \{g(x - B_n) - g(x - \rho B_n) + Q(\rho B_n)\} \\ &\geq n \bar{V}(x - B_n) \rho_n^{-1} e^{0.5\rho_n^\alpha}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Отсюда и из соотношения $\hat{I}_n(x) \leq I_n(x) \leq \hat{I}_n(x) + n \bar{V}(x - B_n)$ следует (2.68).

Учитывая тождество $Q'(x) = -h(x/n)$ (см. (2.7)) и соотношения (2.5), (2.6), (2.16), можно показать, что при $B_n \leq t \leq \omega_n$ и $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} Q'(t) &\sim -h_*\left(\frac{t}{n}\right), \quad Q''(t) \sim -\frac{1}{\alpha-1} h_*\left(\frac{t}{n}\right) \frac{1}{t}, \\ Q'''(t) &\sim -\frac{2-\alpha}{(\alpha-1)^2} h_*\left(\frac{t}{n}\right) \frac{1}{t^2}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Пусть решение уравнения (1.54) существует. Из (1.48), (1.53) следует, что

$$\varepsilon x \leq y_* < x \quad (\exists \varepsilon > 0), \quad (2.71)$$

а из (1.48), (1.50), (1.53), (2.69) и равенства (см. (1.54))

$$g'(y_*) = |\hat{Q}'(x - y_*)| \quad (2.72)$$

можно вывести, что

$$|\hat{Q}''(x - y_*)| \geq \tau''(y_*) \geq \varepsilon |\hat{Q}''(x - y_*)| \quad (\exists \varepsilon > 0). \quad (2.73)$$

Соотношения (2.71), (1.48) позволяют заключить, что $|\hat{Q}'(y_*)| \geq g'(x)$, откуда по (1.50), (2.70) и (2.18) при условии (2.67)

$$\frac{x - y_*}{B_n} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.74)$$

Пусть δ меняется таким образом, что

$$\frac{\delta}{x - y_*} \rightarrow 0, \quad \delta^2 |Q''(x - y_*)| \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.75)$$

Такое δ существует, так как второе условие в (2.75) равносильно соотношению $(\delta/(x - y_*))^2 B_n g'(x) (x - y_*)/B_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ (см. (2.70), (2.72), (2.74)).

Представим $\hat{I}_n(x)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{I}_n(x) &= n \left(\int_{|y - y_*| \leq \delta} \dots + \int_{y_*(1-\varepsilon)}^{y_* - \delta} \dots + \int_{T_n}^{y_*(1-\varepsilon)} \dots + \int_{y_* + \delta}^{x - B_n} \dots \right) \\ &= n(I_1 + I_2 + I_3 + I_4). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Стандартный анализ, использующий (2.70), (2.73) и (2.75), приводит к равенству

$$I_1 = (1 + o(1)) \sqrt{\frac{2\pi}{\tau''(y_*)}} |\pi'(x - y_*)| \bar{V}(y_*), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.77)$$

Оценим I_2 . Имеем:

$$I_2 = O \left(\bar{V}(y_*) |\pi'(x - y_*)| \int_{(1-\varepsilon)y_*}^{y_* - \delta} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y - y_*)^2 \tau''(\theta) \right\} \right)$$

$$\times \left(\frac{x - y_*}{h_*((x - y_*)/n)} \frac{h_*((x - y)/n)}{x - y} \right)^{1/2} dy, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.78)$$

где $\theta \in (y, y_* - \delta)$.

При этом по (2.70), (1.48) и (2.72)

$$\tau''(\theta) = |\widehat{Q}''(x - \theta)| - |g''(\theta)| \geq |\widehat{Q}''(x - y_*)| - (1 + \varepsilon') |g''(y_*)|,$$

где $\varepsilon' > 0$ за счет выбора ε в (2.76) можно сделать таким, чтобы $\tau''(\theta) \geq \varepsilon' |Q''(x - y_*)|$.

В соответствии со свойствами функции $h_*(t)$ содержимое круглых скобок под интегралом в (2.78) равно $((x - y)/(x - y_*))^{(2-\alpha)/(\alpha-1)+o(1)}$, $n \rightarrow \infty$. Таким образом, интеграл в (2.78) с помощью соответствующей замены переменных оценивается через (см. (2.75))

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{|Q''(x - y_*)|}} \int_{\delta \sqrt{|Q''(x - y_*)|}}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon' t^2}{2} \right\} \\ & \times \left(1 + \frac{t}{(x - y_*) \sqrt{|Q''(x - y_*)|}} \right)^{1/(\alpha-1)} dt \\ & = o \left(\frac{1}{\sqrt{\tau''(y_*)}} \right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.77) следует, что

$$I_2 = o(I_1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.79)$$

Очевидно, $\tau'(y) > 0$, $y_* < y \leq x - B_n$. Следовательно (см. (1.46), (1.12), (2.70)),

$$I_4 = O \left(e^{\tau(y_* + \delta)} V(-y_*) \left(\frac{h_*((x - y_* - \delta)/n)}{x - y_* - \delta} \right)^{1/2} (x - B_n - y_* - \delta) \right).$$

С учетом (1.50), (2.70), (2.73) и (2.75) отсюда с помощью равенства $\tau(y_* + \delta) = \tau(y_*) + \frac{1}{2} \delta^2 \tau(y_* + \theta)$, $0 < \theta < \delta$, получим

$$\begin{aligned} I_4 = O \left(\frac{1}{\sqrt{\tau''(y_*)}} \bar{V}(y_*) |\pi'(x - y_*)| \sqrt{|Q''(x - y_*)|(x - y_*)^2} \right. \\ \left. \times \exp \left\{ -\varepsilon \delta^2 |Q''(x - y_*)| \right\} \right) = o(I_1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.80) \end{aligned}$$

Нам остается оценить I_3 . Покажем, что при условии (1.51) уравнение (1.54) имеет не более двух корней, один из которых y_* . Тогда по (1.12), (2.18), (2.70)

$$I_3 = O \left(\exp \left\{ -\min(\tau(T_n), \tau(y_* - \varepsilon y_*)) \right\} \right)$$

$$\times V(-T_n) \frac{T_n}{x} \left(\frac{x}{B_n} \right)^{1/(2r)+o(1)}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.81)$$

В самом деле, уравнение $\tau'(y) = 0$ равносильно уравнению $\nu(y) = (g'(y))^\gamma - (-\hat{Q}'(x-y))^\gamma = 0$, причем вследствие (1.50) и (2.70) при всех достаточно больших n

$$((- \hat{Q}'(t))^\gamma)'' < 0, \quad B_n \leq t \leq \omega_n.$$

Таким образом, функция $\nu'(y)$ не убывает и, следовательно, $\nu(y)$ выпукла и поэтому имеет не более двух корней.

Продолжим наши рассуждения. Используя (1.48), (1.49) и (2.70)–(2.74) при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ и всех $\theta \in (0, \varepsilon)$ получим оценку

$$\begin{aligned} \tau''(y_* - \theta y_*) &\geq |\hat{Q}''(x - y_*)| - \max_{0 < \theta < \varepsilon} |g''(y_* - \theta y_*)| \\ &\geq \varepsilon^2 |Q''(x - y_*)| \geq (x B_n)^{-1}, \quad n > n_\varepsilon, \end{aligned}$$

из которой, в частности, следует, что $\tau(y_* - \varepsilon y_*) \geq \tau(y_*) + \varepsilon^3 x / B_n$. Таким образом, если $\tau(y_* - \varepsilon y_*) \leq \tau(T_n)$, то (см. (2.72), (1.12), (2.70), (2.77), (2.81))

$$I_3 = o(I_1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.82)$$

Пусть $\tau(T_n) < \tau(y_* - \varepsilon y_*)$. Тогда если $T_n = B_n$ (или $x < \omega_n + B_n$), то из (2.81), (1.6), (1.12) и (2.18) следует

$$\begin{aligned} n I_3 &= \pi(x) O \left(n V(-B_n) \left(B_n h_* \left(\frac{x}{n} \right) \right)^{1/2} \left(\frac{\omega_n}{B_n} \right)^{(1+o(1))/(2\alpha-2)} \right. \\ &\quad \times \exp \left\{ -g(B_n) + (1+o(1)) B_n h_* \left(\frac{\omega_n}{n} \right) \right\} \Big) \\ &= o(\pi(x)), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Напоминаем (см. (1.10), (1.5)), что

$$h_* \left(\frac{\omega_n}{n} \right) \asymp \frac{g(\omega_n)}{\omega_n}, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{и} \quad \frac{g(\omega_n)}{\omega_n} \leq \frac{g(B_n)}{B_n} \left(\frac{B_n}{\omega_n} \right)^{1-\delta}.$$

Если же $T_n = x - \omega_n$, то либо $x > \omega_n/\varepsilon$ и $I_3 = 0$, либо $x \in (\omega_n + B_n, \omega_n/\varepsilon]$. В последнем случае по (1.12), (2.81) и (2.69)

$$\begin{aligned} I_3 &= \bar{V}(x) O \left(\exp \left\{ g(x) - g(T_n) - (r+o(1)) \omega_n h_* \left(\frac{\omega_n}{n} \right) \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{\omega_n}{B_n} \right)^{1/(2r)+\alpha-1+o(1)} \right) \end{aligned}$$

$$= o(\bar{V}(x)) = \frac{1}{n} o(\hat{I}_n(x)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.84)$$

так как по (1.5); (2.18)

$$g(x) - g(T_n) \leq g(\omega_n) \quad \text{и} \\ g(\omega_n) - (r - \varepsilon) \omega_n h_* \left(\frac{\omega_n}{n} \right) \leq - \left(\frac{\omega_n}{B_n} \right)^{1/r}, \quad n > n_\varepsilon.$$

Собирая вместе соотношения (2.68), (2.76), (2.77), (2.79), (2.80), (2.82)–(2.84), приходим к заключению, что замечание 5г при дополнительном предположении (2.67) справедливо.

Пусть теперь

$$B_n g'(x) < \rho_n. \quad (2.85)$$

Тогда выполняются условия замечания 5б и, следовательно, справедливо равенство (1.39) (возможность замены $O(1)$ в (1.40) на ρ_n обосновывается с помощью [12, гл. X, лемма 6]). Поэтому для доказательства равенства (1.52) достаточно показать, что

$$\bar{V}(y_*) e^{Q(x-y_*)} \sqrt{\frac{g'(y_*)}{(\alpha-1)\tau''(y_*)(x-y_*)}} \\ \sim \bar{V}(x) \exp \left\{ \frac{1}{\alpha} (B_n g'(x))^\alpha \right\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.86)$$

Действительно, по (2.18), (2.16) и (1.50), (2.70)–(2.72) в случае (2.85) получим при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{x - y_*}{B_n} \sim (B_n g'(x))^{\alpha-1}, \quad y_* \sim x, \\ \tau''(y_*) \sim |Q''(x - y_*)| \sim \frac{g'(y_*)}{(\alpha-1)(x - y_*)};$$

кроме того,

$$g(x) - g(y_*) + Q(x - y_*) = (x - y_*) g'(x) (1 + o(1)) \\ - r(x - y_*) g'(x) (1 + o(1)) = \left(\frac{1}{\alpha} + o(1) \right) (B_n g'(x))^\alpha \\ = \frac{1}{\alpha} (B_n g'(x))^\alpha + o(1).$$

Из приведенных оценок следует (2.86).

Итак, в случае, когда уравнение (1.54) имеет корень, замечание 5г доказано.

Если уравнение (1.54) не имеет решения, то функция $\tau(y)$ возрастает на интервале $(T_n, x - B_n)$ (ведь $\tau'(x - B_n) > 0$ по (1.49)). При этом предположение $T_n = x - \omega_n$ приводит к противоречию, поскольку несложно показать, что $\tau(x - \omega_n) > \tau(x - B_n)$. Итак, $T_n = B_n$ и $x \leq \omega_n + B_n$,

а в этом случае оценку $I_n(x) = o(\pi(x))$, $n \rightarrow \infty$, можно получить аналогично (2.84) (см. также (2.68)). Таким образом, замечание 5г доказано полностью.

Замечание 5д проверяется так же, как замечание 5г.

В заключение докажем, что функции $g(y)$, удовлетворяющие (1.55), при $x > (1 - \varepsilon)c_n$ ($\exists \varepsilon > 0$) подчиняются также условию (1.53). Действительно, из (1.55) следует (см. [10, (118), (119)]), что $g(y)$ правильно меняется с показателем δ и $g'(y) \sim \delta g(y)/y$, $y \rightarrow \infty$. Из (1.54), (2.18) и (1.17) (обращаем внимание на то, что $g(\eta_n) \sim \eta_n h_*(\eta_n/n)$, $n \rightarrow \infty$) тогда следует, что $\delta \bar{y}^{\delta-1} = (\bar{x} - \bar{y})^{1/(\alpha-1)+o(1)}$, $n \rightarrow \infty$, где $\bar{x} = x/\eta_n$, $\bar{y} = y/\eta_n$.

Таким образом, при $\omega = (\alpha - 1)(1 - \delta)$

$$\bar{x} = \bar{y} + (\delta^{\alpha-1} \bar{y}^{-\omega})^{1+o(1)}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Пусть $q(c) = c + \delta^{\alpha-1} c^{-\omega}$. Тогда $\bar{y} \sim c(\bar{x})$, $n \rightarrow \infty$, где $c(\bar{x})$ — максимальный корень уравнения $q(c) = c(\bar{x})$. Такой корень существует, если

$$x > (1 + \varepsilon)q(c_*) \quad (\exists \varepsilon \in (0, 1)), \quad \text{где } c_* = (\delta^{\alpha-1} \omega)^{1/(\omega+1)}, \quad (2.87)$$

так что $q(c_*) = \min_{c>0} q(c) = (1 + 1/\omega)c_*$. Другими словами, в случае (2.87) решение уравнения (1.54) удовлетворяет условию $y_* \sim \eta_n c(x/\eta_n)$. Условие (1.53) при (1.55) равносильно соотношению

$$x \leq y_* \frac{\omega + 1}{\omega} (1 - \varepsilon) \quad (\exists \varepsilon \in (0, 1))$$

и вытекает из неравенства

$$\bar{x} \leq c(\bar{x}) \frac{\omega + 1}{\omega} (1 - \varepsilon) \quad (\exists \varepsilon \in (0, 1)),$$

которое, в свою очередь, следует из $q(c) \leq c(1 - \varepsilon)(\omega + 1)/\omega$. Последнее соотношение равносильно неравенству $c \geq c_*(1 + \tilde{\varepsilon})$, где $1 + \tilde{\varepsilon} = (1 - \varepsilon)^{-1/(\omega+1)}$, вытекающему из (2.87).

В самом деле,

$$\bar{x} = q(c) = c \left(1 + \frac{1}{\omega} \left(\frac{c_*}{c} \right)^{\omega+1} \right) \geq (1 + \varepsilon) \left(1 + \frac{1}{\omega} \right) c_*,$$

и, следовательно, $c \geq (1 + \varepsilon)c_*$ (напоминаем, что c — максимальный корень соответствующего уравнения, и $c > c_*$).

Итак, условие (1.53) при $x > (1 + \varepsilon)q(c_*)\eta_n$ выполняется. В соответствии с замечанием 2 нам остается доказать, что

$$\gamma > (1 + \varepsilon)q(c_*) \quad (\exists \varepsilon > 0), \quad (2.88)$$

где γ определено в (1.18).

Положим

$$\beta(u) = \frac{u+1}{u} u^{1/(\omega+1)}, \quad u > 0.$$

Тогда (2.88) равносильно неравенству $\beta(u_*) > (1+\varepsilon)\beta(\omega)$ ($\exists \varepsilon > 0$), которое в силу того, что $\beta(\omega) = \min_{u>0} \beta(u)$, выполняется, поскольку $u_* \neq \omega$. Действительно, $\xi(\delta) = \delta^{\alpha-1}(\delta + \alpha(1-\delta)) < 1$, откуда $1+\omega < (1+\omega/(\tau\delta))^\tau$, или $\omega < u_*$.

Случай (1.56) рассматривается аналогично с упрощением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983, 304 с.
2. Heyde C. C. On large deviation probabilities in the case of attraction to a nonnormal stable law. — *Sankhya*, 1968, v. A30, № 3, p. 253–258.
3. Ткачук С. Г. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, принадлежащих области притяжения устойчивого закона: Автореф. дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. Ташкент, 1977.
4. Пинелис И. Ф. Об асимптотической эквивалентности вероятностей больших отклонений суммы и максимума независимых случайных величин. — Труды ин-та матем. СО АН СССР, 1981, т. 5, с. 144–173.
5. Розовский Л. В. Одна оценка для вероятностей односторонних больших отклонений. — Матем. заметки, 1987, т. 42, № 1, с. 145–156.
6. Höglund T. A unified formulation of the central limit theorem for small and large deviations from the mean. — *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, 1979, B. 49, H. 1, S. 105–117.
7. Bahadur R. R., Ranga Rao R. On deviations of the sample mean. — *Ann. Math. Statist.*, 1960, v. 31, № 4, p. 1015–1027.
8. Золотарев В. М. Об одной новой точке зрения на предельные теоремы, учитывающие большие отклонения. — В сб.: Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс: Гос. изд-во полит. и научн. литер. ЛитССР, 1962, с. 43–47.
9. Петров В. В. О вероятностях больших отклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. X, в. 2, с. 310–322.
10. Розовский Л. В. Вероятности больших отклонений на всей оси. — Теория вероятн. и ее примен., 1993, т. 38, в. 1, с. 79–109.
11. Розовский Л. В. Вероятности больших отклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения нормального закона. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. 34, в. 4, с. 686–705.
12. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
13. Ким Л. И., Нагаев А. В. О несимметричной проблеме больших отклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в. 2, с. 335–346.
14. Амосова Н. Н. О вероятностях больших отклонений в случае устойчивых предельных распределений. — Матем. заметки, 1984, т. 35, № 1, с. 125–131.
15. Нагаев С. В. Об асимптотическом поведении вероятностей односторонних больших отклонений. — Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. XXVI, в. 2, с. 369–372.
16. Нагаев А. В. О несимметричной проблеме больших отклонений в случае устойчивого предельного закона. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. XXVIII, в. 4, с. 637–645.
17. Christof G., Wolf W. Convergence Theorems with a Stable Limit Law. Berlin: Akademie-Verlag, 1992.

Поступила в редакцию

9.II.1995