Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Круглов, О неравенствах для вероятностей больших уклонений в схеме Бернулли, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 4, 785–790

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp195>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 12:52:53

Задача 2. Пусть $f_0 = 0$. Требуется найти предельное распределение f такое, что $f_m \rightarrow f$ (в том или ином смысле).

Построенное в разделе 4 основное решение уравнения (1.1) дает решение задачи 2 и единственное решение задачи 1 в классе ML .

Лемма 4.1 и теорема 5.1 имеют простую вероятностную интерпретацию в рамках описанной выше модели. Величина $\int g(x) dx$ представляет собой количество частиц, производимое источниками за единицу времени. В лемме 4.1 ν_1 является коллективной скоростью течения частиц — их ухода в бесконечность по направлению орта первой координатной оси. Согласно теореме 5.1, вектор $\nu \neq 0$ определяет как направление, так и скорость течения.

При $\nu = 0$ такое направление отсутствует, вследствие чего происходит бесконечное накопление частиц со временем в конечной части пространства при ненулевом первичном источнике g .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
2. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления. М.: Советское радио, 1967, 299 с.
3. Севастьянов Б. А. Теория восстановления. — Итоги науки и техники, сер. теория вероятн., матем. статист., теорет. кибернет., 1974, т. 11, с. 98–128.
4. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975, 443 с.
5. Yengibarian N. B. Renewal equation on the whole line. — Stochastic Process. Appl., 2000, v. 85, № 2, p. 237–247.
6. Прёсдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979, 493 с.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981, 543 с.
8. Енгибарян Н. Б., Арабаджян Л. Г. О факторизации кратных интегральных операторов Винера–Хопфа. — Докл. АН СССР, 1986, т. 291, № 1, с. 11–14.
9. Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б. Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. — Итоги науки и техники, сер. матем. анализ, 1984, т. 22, с. 175–240.
10. Енгибарян Н. Б. Уравнения восстановления на полуоси. — Изв. РАН, 1999, т. 63, № 1, с. 61–76.

Поступила в редакцию
30.VII.2002

© 2004 г.

КРУГЛОВ В. М.*

О НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ В СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ¹⁾

Обсуждаются известные неравенства для вероятностей больших уклонений для сумм бернуллиевских случайных величин. Доказаны более сильные варианты некоторых из упомянутых неравенств.

Ключевые слова и фразы: схема Бернулли, большие уклонения.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: vkrug@dataforce.net

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 02-01-01080, 02-01-00949, 01-01-00644.

1. Введение. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определены независимые случайные величины X_n , $n \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$, каждая из которых принимает два значения единица и нуль с вероятностями $p \in [0, 1]$ и $q = 1 - p$. Такие случайные величины называют бернуллиевскими. Последовательность $\{S_n\}_{n \geq 1}$ сумм $S_n = X_1 + \dots + X_n$ обладает многими замечательными свойствами. Именно по этой причине она используется для иллюстрации целого ряда вероятностных закономерностей асимптотического характера. Последовательность сумм бернуллиевских случайных величин также может быть объектом специальных исследований. Например, было бы интересно найти точные верхние оценки вероятностей $\mathbf{P}\{|n^{-1}S_n - p| \geq \varepsilon\}$ и $\mathbf{P}\{\sup_{k \geq n} |k^{-1}S_k - p| \geq \varepsilon\}$ для данного $\varepsilon > 0$. Известные оценки этих вероятностей, как правило, вытекают из односторонних верхних оценок вероятностей $\mathbf{P}\{n^{-1}S_n \geq p + \varepsilon\}$, $\mathbf{P}\{n^{-1}S_n \leq p - \varepsilon\}$, $\mathbf{P}\{\sup_{k \geq n} k^{-1}S_k \geq p + \varepsilon\}$, $\mathbf{P}\{\inf_{k \geq n} k^{-1}S_k \leq p - \varepsilon\}$. Сформулированная задача относится к классу задач о больших отклонениях для сумм случайных величин.

На с. 102 учебника по теории вероятностей Дж. В. Успенского [1] приведены следующие неравенства:

$$\mathbf{P}\{|n^{-1}S_n - p| \geq \varepsilon\} \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}, \quad \mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} |k^{-1}S_k - p| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{2e^{-n\varepsilon^2/2}}{1 - e^{-\varepsilon^2/2}}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что второе из этих неравенств вытекает из первого неравенства.

В статье [2] Х. Чернова, посвященной изучению статистических критериев, доказаны следующие два неравенства:

$$\mathbf{P}\{n^{-1}S_n \geq p + \varepsilon\} \leq |m(p + \varepsilon)|^n, \quad \mathbf{P}\{n^{-1}S_n \leq p - \varepsilon\} \leq |m(p - \varepsilon)|^n, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (2)$$

где $m(x) = \inf\{e^{-x\lambda} \mathbf{E}e^{\lambda X_1} : \lambda \in \mathbf{R}\}$, $x \in \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

Функцию $m(x)^n$ можно записать в виде $m(x)^n = e^{-n\phi(x)}$, где

$$\phi(x) = \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \left[\frac{\lambda}{n} x - \ln(pe^{\lambda/n} + q) \right] = \sup_{u \in \mathbf{R}} [ux - \ln(pe^u + q)].$$

Несложные рассуждения приводят к следующим равенствам:

$$\phi(x) = \sup_{u \geq 0} [ux - \ln(pe^u + q)] = x \ln \frac{x}{p} + (1 - x) \ln \frac{1 - x}{q}, \quad p \leq x \leq 1, \quad (3)$$

$$\phi(x) = \sup_{u \leq 0} [ux - \ln(pe^u + q)] = x \ln \frac{x}{p} + (1 - x) \ln \frac{1 - x}{q}, \quad 0 \leq x \leq p. \quad (4)$$

В частности, $\phi(0) = 0$ и $\phi(x) = \infty$, $0 < x \leq 1$, если $p = 0$; $\phi(1) = 0$ и $\phi(x) = \infty$, $0 \leq x < 1$, если $p = 1$. М. Окамото [3] доказал, что

$$\phi(x) \geq 2(x - p)^2, \quad \text{если } 0 \leq x \leq 1, \quad (5)$$

$$\phi(x) \geq \frac{(x - p)^2}{2pq}, \quad \text{если } \frac{1}{2} \leq p \leq x \leq 1 \text{ или } 0 \leq x \leq p \leq \frac{1}{2}, \quad (6)$$

$$\phi(x) \geq 2(\sqrt{x} - \sqrt{p})^2, \quad \text{если } p \leq x \leq 1, \quad (7)$$

$$\phi(x) \geq (\sqrt{x} - \sqrt{p})^2, \quad \text{если } 0 \leq x \leq p. \quad (8)$$

Чтобы неравенство (6) согласовывалось со значениями функции ϕ при $p = 0$ и $p = 1$, следует положить $(x - p)^2/(2pq) = 0$ при $x = p = 0$ и $x = p = 1$.

Теорема 1 (М. Окамото, [3]). Пусть $0 < p < 1$. Для любых $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbf{N}$ справедливы следующие неравенства:

$$\mathbf{P}\{n^{-1}S_n \geq p + \varepsilon\} \leq e^{-2n\varepsilon^2}, \quad \mathbf{P}\{n^{-1}S_n \leq p - \varepsilon\} \leq e^{-2n\varepsilon^2}, \quad (9)$$

$$\mathbf{P}\{n^{-1}S_n \geq p + \varepsilon\} \leq \exp \left\{ -\frac{n\varepsilon^2}{2pq} \right\}, \quad \text{если } p \geq \frac{1}{2}, \quad (10)$$

$$\mathbf{P}\{n^{-1}S_n \leq p - \varepsilon\} \leq \exp \left\{ -\frac{n\varepsilon^2}{2pq} \right\}, \quad \text{если } p \leq \frac{1}{2}, \quad (11)$$

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{n^{-1}S_n} \geq \sqrt{p} + \varepsilon\right\} \leq e^{-2n\varepsilon^2}, \quad \mathbf{P}\left\{\sqrt{n^{-1}S_n} \leq \sqrt{p} - \varepsilon\right\} \leq e^{-n\varepsilon^2}. \quad (12)$$

В личном архиве В. М. Золотарева сохранилась рукопись А. Н. Колмогорова, датированная апрелем 1962 года. Часть этой рукописи опубликована в виде статьи [4]. В ней, среди прочего, доказано неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} k^{-1} S_k \geq p + \varepsilon\right\} \leq e^{-2n\varepsilon^2(1-\varepsilon)}.$$

Для $p = \frac{1}{2}$ оно уточняется следующим образом:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} k^{-1} S_k \geq \frac{1}{2} + \varepsilon\right\} \leq e^{-2n\varepsilon^2}. \quad (13)$$

Для доказательства своих неравенств А. Н. Колмогоров привлекает понятие, которое в современной теории вероятностей известно под названием марковского момента. По существу, он использует теорию мартингалов.

В рукописи А. Н. Колмогорова дважды (на разных страницах) встречается запись

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} k^{-1} S_k \geq p + \varepsilon\right\} \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}. \quad (14)$$

Около одной из них написано «оценка Вейнгартена». Около другой записи того же самого неравенства написано латинскими буквами Weingarten. Обе эти записи сопровождаются одинаковыми вычислениями, которые, по-видимому, представляют собой доказательство неравенства (14). Найти какие-либо публикации по теории вероятностей или математической статистике, принадлежащие автору с фамилией Вейнгартен (Weingarten), не удалось. Возможно, А. Н. Колмогоров воспользовался каким-нибудь неравенством Джулиуса Вейнгартена (Julius Weingarten, 1836–1910) — немецкого математика, известного специалиста в области теории поверхностей. Прояснить ситуацию не удалось.

Читатель, несомненно, заметил, что правая часть неравенства (14) совпадает с правой частью первого неравенства в (1), цитированного по учебнику Дж. В. Успенского [1]. В своей рукописи А. Н. Колмогоров упоминает этот учебник, но ничего не говорит о неравенствах (1). Возможно, это объясняется тем, что неравенство (1) не выделено в отдельное утверждение, а содержится внутри доказательства теоремы Кантелли об усиленном законе больших чисел.

Доказательства некоторых из приведенных выше неравенств, в частности, доказательства неравенств (9), можно также найти в ряде современных учебников по теории вероятностей, например, в [5, с. 131] и [6, с. 80]. Авторы учебников [5] и [6] не объясняют происхождение неравенств (9). Читатель сам может убедиться, что доказательства неравенств (9), приведенные в этих учебниках, похожи на доказательства этих неравенств в упомянутой статье М. Окамото.

Идея А. Н. Колмогорова использовать теорию мартингалов для доказательства неравенств вида (13) независимо была реализована А. Н. Ширяевым. В его учебнике (см. [6, с. 431]) содержатся следующие два неравенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} k^{-1} S_k > p + \varepsilon\right\} &\leq \exp\left\{-n \sup_{\lambda > 0} \left[\lambda(p + \varepsilon) - \ln \mathbf{E} e^{\lambda X_1}\right]\right\}, \\ \mathbf{P}\left\{\inf_{k \geq n} k^{-1} S_k < p - \varepsilon\right\} &\leq \exp\left\{-n \sup_{\lambda < 0} \left[\lambda(p - \varepsilon) - \ln \mathbf{E} e^{\lambda X_1}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Из (3)–(5) следует, что правые части этих неравенств не превосходят величины $e^{-2n\varepsilon^2}$. Строгие неравенства под знаком вероятности можно заменить на нестрогие неравенства. Оба этих неравенства доказаны с использованием мартингальной техники. Первое из них содержит в качестве частного случая неравенство (13).

2. Новые неравенства. В этом пункте будет показано, как с помощью теории мартингалов можно усилить неравенства (10)–(12). Нам понадобятся неравенства (5)–(8). Первые три из них несложно доказать с помощью дифференциального исчисления. Напротив, доказательство неравенства (8), предложенное М. Окамото [3],

довольно длинное и сопряжено с большими вычислениями. Пользуясь стандартными приемами, мы докажем несколько более сильное неравенство

$$\phi(x) \geq \begin{cases} (\sqrt{p} - \sqrt{x})^2, & 0 \leq x < \beta(p), \\ 2(\sqrt{p} - \sqrt{x})^2, & \beta(p) \leq x \leq p, \end{cases} \quad (15)$$

где $0 \leq \beta(p) < p$ для всех $p \in [0, 1]$. В частности, $\beta(0) = \beta(1) = 0$. При $p \in (0, 1)$ величина $\beta(p)$ является наименьшим положительным корнем уравнения

$$\ln \frac{x}{p} - \ln \frac{1-x}{q} + 2\sqrt{\frac{p}{x}} - 2 = 0. \quad (16)$$

Ниже мы убедимся, что это уравнение имеет два различных положительных решения, лежащие в $[0, p]$. Одно из них, как легко убедиться, равно p .

Сначала мы докажем неравенство (15) для $p \in (0, 1)$. Обозначим $\psi(x) = 2(\sqrt{p} - \sqrt{x})^2$, $f(x) = \phi(x) - \psi(x)$, $x \in [0, p]$. Первая и вторая производные функции f равны

$$f'(x) = \ln \frac{x}{p} - \ln \frac{1-x}{q} + 2\sqrt{\frac{p}{x}} - 2, \quad f''(x) = \frac{\sqrt{p}x + \sqrt{x} - \sqrt{p}}{x^{3/2}(1-x)}.$$

Функция f'' неположительна на множестве $0 \leq x < b$ и неотрицательна на множестве $b \leq x \leq p$, где $b = ((\sqrt{1+4p} - 1)/(2\sqrt{p}))^2$ — положительный корень уравнения $\sqrt{p}x + \sqrt{x} - \sqrt{p} = 0$. Непосредственно проверяется, что для всех $p \in (0, 1]$ выполняется неравенство $b < p$. На множестве $[b, p]$ функция f' не убывает и, следовательно, $f' \leq 0$, так как $f'(p) = 0$. На множестве $[0, b]$ непрерывная функция f' не возрастает и, следовательно, $f'(\beta) = 0$ для некоторого $\beta = \beta(p) \in (0, b)$, так как $f'(0) = \infty$ и $f'(b) < 0$. Тем самым доказано, что $f' \leq 0$ на множестве $[\beta(p), p]$. Поэтому функция f неотрицательна на множестве $[\beta(p), p]$, так как она не возрастает и $f(p) = 0$. Неравенство (15) для $x \in [0, \beta(p)]$ следует из (8). Ниже мы дадим простое доказательство неравенства (8).

Нам осталось доказать неравенство (15) при $p = 0$ и $p = 1$. Если $p = 0$, то $\phi(0) = 0 = \psi(0)$ и $\phi(x) = \infty > \psi(x)$, $0 < x \leq 1$. Если $p = 1$, то $\phi(x) = \infty > \psi(x)$, $0 \leq x < 1$, и $\phi(0) = 0 = \psi(0)$. Мы видим, что $\beta(0) = \beta(1) = 0$. Попутно было установлено, что при $p \in (0, 1)$ уравнение (16) имеет два различных положительных корня $\beta(p)$ и p . Неравенство (15) доказано.

С помощью похожих рассуждений можно доказать неравенство (8). Требуется рассмотреть только случай $p \in (0, 1)$. Положим $\lambda(x) = \phi(x) - \psi(x)/2$, $x \in [0, p]$. Рассуждая, как выше, мы найдем $\gamma(p) \in (0, p)$ такое, что производная λ' неотрицательна на множестве $[0, \gamma(p)]$ и неположительна на множестве $[\gamma(p), p]$. На множестве $[\gamma(p), p]$ функция λ неотрицательна, так как она не возрастает и $\lambda(p) = 0$. На множестве $[0, \gamma(p)]$ функция λ неотрицательна, так как она не убывает и $\lambda(0) = -\ln q - p \geq 0$ для любого $p \in (0, 1)$. Неравенство (8) доказано.

Следующая теорема является основным утверждением настоящей заметки.

Теорема 2. Для любых $p \in [0, 1]$, $\alpha \geq 2$, $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbf{N}$ справедливы следующие неравенства:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} k^{-1} S_k \geq p + \varepsilon\right\} \leq \exp\left\{-\frac{n\varepsilon^2}{2pq}\right\}, \quad \text{если } \frac{1}{2} \leq p \leq 1, \quad (17)$$

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{k \geq n} k^{-1} S_k \leq p - \varepsilon\right\} \leq \exp\left\{-\frac{n\varepsilon^2}{2pq}\right\}, \quad \text{если } 0 \leq p \leq \frac{1}{2}, \quad (18)$$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} (k^{-1} S_k)^{1/\alpha} \geq p^{1/\alpha} + \varepsilon\right\} \leq e^{-2n\varepsilon^\alpha}, \quad (19)$$

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{k \geq n} (k^{-1} S_k)^{1/\alpha} \leq p^{1/\alpha} - \varepsilon\right\} \leq e^{-2n\varepsilon^\alpha}, \quad \text{если } \varepsilon \leq p^{1/\alpha} - (\beta(p))^{1/\alpha}, \quad (20)$$

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{k \geq n} (k^{-1} S_k)^{1/\alpha} \leq p^{1/\alpha} - \varepsilon\right\} \leq e^{-n\varepsilon^\alpha}, \quad \text{если } \varepsilon > p^{1/\alpha} - (\beta(p))^{1/\alpha}, \quad (21)$$

где $\beta(p)$ определено в (15). При $p = 1$ и $p = 0$ правые части в (17) и (18) полагаются равными нулю.

Так как $pq \leq \frac{1}{4}$, то из (17) и (18) для указанных там значений p вытекают уже известные нам неравенства

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} k^{-1} S_k \geq p + \varepsilon\right\} \leq e^{-2n\varepsilon^2}, \quad \mathbf{P}\left\{\inf_{k \geq n} k^{-1} S_k \geq p - \varepsilon\right\} \leq e^{-2n\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Если $p = 0$ или $p = 1$, то все вероятности событий, о которых говорится в формулировке теоремы, равны нулю. Поэтому перечисленные неравенства требуется доказать для $p \in (0, 1)$. Неравенства (17)–(21) достаточно доказать при предположении, что $p - \varepsilon > 0$, $p + \varepsilon < 1$, $p^{1/\alpha} - \varepsilon > 0$, $p^{1/\alpha} + \varepsilon < 1$. Действительно, если, например, $p + \varepsilon > 1$, то левая часть неравенства (17) равна нулю, так как значения случайных величин S_k/k , $k \in \mathbf{N}$, лежат в сегменте $[0, 1]$. Если $p + \varepsilon = 1$ и для любого $\eta > 0$, $p + \eta < 1$, справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} k^{-1} S_k \geq p + \eta\right\} \leq \exp\left\{-\frac{n\eta^2}{2pq}\right\},$$

то

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} k^{-1} S_k \geq 1\right\} \leq \mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} k^{-1} S_k \geq p + \eta\right\} \leq \exp\left\{-\frac{n\eta^2}{2pq}\right\}.$$

Полагая $\eta \uparrow \varepsilon$, мы приходим к (17) с $p + \varepsilon = 1$. Для доказательства теоремы нам понадобятся некоторые сведения. Напомним их.

Пусть $\mathcal{F}_n$ — сигма-алгебра, порожденная случайными величинами S_k , $k \in \mathbf{N}$, $k \geq n$. Ясно, что $\mathcal{F}_{n+1} \subseteq \mathcal{F}_n$, $n \in \mathbf{N}$. Можно доказать, что для каждого $n \in \mathbf{N}$ условное математическое ожидание $\mathbf{E}(n^{-1} S_n | \mathcal{F}_{n+1})$ случайной величины $n^{-1} S_n$ относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{n+1}$ равно $\mathbf{P}$ -почти всюду случайной величине $(n+1)^{-1} S_{n+1}$. Доказательство этого равенства можно прочесть, например, в учебнике [7, с. 369]. В соответствии с общепринятой терминологией последовательность $\{n^{-1} S_n\}_{n \geq 1}$ называется обращенным мартингалом относительно убывающей последовательности сигма-алгебр $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$.

Привлекая неравенство Иенсена (см. [5, с. 105]) для условных математических ожиданий, мы получим, что $e^{\lambda S_{n+1}/(n+1)} \leq \mathbf{E}(e^{\lambda S_n/n} | \mathcal{F}_{n+1})$ $\mathbf{P}$ -почти всюду для любого $\lambda \in \mathbf{R}$. Привлекая еще раз общепринятую терминологию, мы можем сказать, что последовательность $\{e^{\lambda S_n/n}\}_{n \geq 1}$ является обращенным субмартингалом относительно убывающей последовательности сигма-алгебр $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$. Для него выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\max_{n \leq k \leq n+r} e^{\lambda S_k/k} \geq e^{\lambda a}\right\} \leq e^{-\lambda a} \mathbf{E} e^{\lambda S_n/n},$$

справедливое для любых $a \in \mathbf{R}$, $n, r \in \mathbf{N}$. Заметим, кстати, что оно совпадает с максимальным неравенством (см. [6, с. 525]) для субмартингала $e^{\lambda S_{n+r}/(n+r)}, \dots, e^{\lambda S_n/n}$ относительно возрастающего семейства сигма-алгебр $\mathcal{F}_{n+r}, \dots, \mathcal{F}_n$. Полагая $r \rightarrow \infty$ в предыдущем неравенстве, мы получим $\mathbf{P}\{\sup_{k \geq n} e^{\lambda S_k/k} \geq e^{\lambda a}\} \leq e^{-\lambda a} \mathbf{E} e^{\lambda S_n/n}$, $a, \lambda \in \mathbf{R}$. Правую часть этого неравенства можно записать в следующем виде:

$$e^{-\lambda a} \mathbf{E} e^{\lambda S_n/n} = \exp\left\{-n\left[\lambda n^{-1} a - \ln(pe^{\lambda/n} + q)\right]\right\}.$$

В результате мы приходим к неравенству

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} e^{\lambda S_k/k} \geq e^{\lambda a}\right\} \leq \exp\left\{-n\left[\lambda n^{-1} a - \ln(pe^{\lambda/n} + q)\right]\right\}, \quad a, \lambda \in \mathbf{R}. \quad (22)$$

Докажем (17). Полагая $a = p + \varepsilon$ и $\lambda > 0$ в (22), мы получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} k^{-1} S_k \geq p + \varepsilon\right\} &= \mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} e^{\lambda S_k/k} \geq e^{\lambda(p+\varepsilon)}\right\} \\ &\leq \exp\left\{-n\left[\lambda n^{-1}(p+\varepsilon) - \ln(pe^{\lambda/n} + q)\right]\right\}. \end{aligned}$$

При $\lambda = n \ln((p + \varepsilon)q / (1 - p - \varepsilon)p)$ мы получим $\lambda(p + \varepsilon)/n - \ln(pe^{\lambda/n} + q) = \phi(p + \varepsilon)$. Отсюда и из (3) и (6) следует (17).

Доказательство неравенства (18) аналогично. Полагая $a = p - \varepsilon$ и $\lambda < 0$ в (22), мы получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\inf_{k \geq n} k^{-1} S_k \leq p - \varepsilon\right\} &= \mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} \lambda k^{-1} S_k \geq \lambda(p - \varepsilon)\right\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} e^{\lambda S_k/k} \geq e^{\lambda(p - \varepsilon)}\right\} \\ &\leq \exp\left\{-n\left[\lambda n^{-1}(p - \varepsilon) - \ln(pe^{\lambda/n} + q)\right]\right\}. \end{aligned}$$

При $\lambda = n \ln((p - \varepsilon)q/(1 - p + \varepsilon)p)$ мы получим $\lambda(p - \varepsilon)/n - \ln(pe^{\lambda/n} + q) = \phi(p - \varepsilon)$. Отсюда и из (4) и (6) следует (18).

Докажем (19). Положив $a = (p^{1/\alpha} + \varepsilon)^\alpha$ и $\lambda > 0$ в (22), мы получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} (k^{-1} S_k)^{1/\alpha} \geq p^{1/\alpha} + \varepsilon\right\} &= \mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} e^{\lambda S_k/k} \geq e^{\lambda(p^{1/\alpha} + \varepsilon)^\alpha}\right\} \\ &\leq \exp\left\{-n\left[\lambda n^{-1}(p^{1/\alpha} + \varepsilon)^\alpha - \ln(pe^{\lambda/n} + q)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Привлекая равенство (3), мы можем выбрать $\lambda > 0$ такое, чтобы $\lambda(p^{1/\alpha} + \varepsilon)^\alpha/n - \ln(pe^{\lambda/n} + q) = \phi((p^{1/\alpha} + \varepsilon)^\alpha)$. Нетрудно указать конкретное значение требуемого λ . По этому поводу см. доказательство неравенства (17). В силу (7) и легко проверяемого неравенства $\sqrt{p} + \varepsilon^{\alpha/2} \leq (p^{1/\alpha} + \varepsilon)^{\alpha/2}$ мы получим $\phi((p^{1/\alpha} + \varepsilon)^\alpha) \geq 2\varepsilon^\alpha$ и, следовательно,

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} (k^{-1} S_k)^{1/\alpha} \geq p^{1/\alpha} + \varepsilon\right\} \leq e^{-2n\varepsilon^\alpha}.$$

Доказательство (20) и (21) аналогично. Полагая $a = (p^{1/\alpha} - \varepsilon)^\alpha$ и $\lambda < 0$ в (22), мы получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\inf_{k \geq n} (k^{-1} S_k)^{1/\alpha} \leq p^{1/\alpha} - \varepsilon\right\} &= \mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} (\lambda k^{-1} S_k) \geq \lambda(p^{1/\alpha} - \varepsilon)^\alpha\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq n} e^{\lambda S_k/k} \geq e^{\lambda(p^{1/\alpha} - \varepsilon)^\alpha}\right\} \leq \exp\left\{-n\left[\lambda n^{-1}(p^{1/\alpha} - \varepsilon)^\alpha - \ln(pe^{\lambda/n} + q)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Привлекая равенство (4), мы можем выбрать $\lambda < 0$ такое, чтобы $\lambda(p^{1/\alpha} - \varepsilon)^\alpha/n - \ln(pe^{\lambda/n} + q) = \phi((p^{1/\alpha} - \varepsilon)^\alpha)$. В силу (15)

$$\phi((p^{1/\alpha} - \varepsilon)^\alpha) \geq \begin{cases} \left(\sqrt{p} - (p^{1/\alpha} - \varepsilon)^{\alpha/2}\right)^2, & 0 \leq (p^{1/\alpha} - \varepsilon)^\alpha < \beta(p), \\ 2\left(\sqrt{p} - (p^{1/\alpha} - \varepsilon)^{\alpha/2}\right)^2, & \beta(p) \leq (p^{1/\alpha} - \varepsilon)^\alpha \leq p. \end{cases}$$

Отсюда и из неравенства $\sqrt{p} = (p^{1/\alpha} - \varepsilon + \varepsilon)^{\alpha/2} \geq (p^{1/\alpha} - \varepsilon)^{\alpha/2} + \varepsilon^{\alpha/2}$ следуют (20) и (21). Теорема доказана.

При подготовке этой заметки мне помогли содержательные беседы с моими товарищами. Особенно я благодарен профессорам В. М. Золотареву и В. Е. Бенингу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Uspensky J. V.* Introduction to Mathematical Probability. New York and London: McGraw-Hill, 1937, 411 p.
2. *Chernoff H.* A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations. — Ann. Math. Statist., 1952, v. 23, p. 493–507.
3. *Okamoto M.* Some inequalities relating to the partial sum of binomial probabilities. — Ann. Inst. Statist. Math., 1958, v. 10, p. 29–35.
4. *Колмогоров А. Н.* Некоторые неравенства, связанные с усиленным законом больших чисел. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 2, с. 249–253.
5. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986, 431 с.
6. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989, 640 с.
7. *Laha R. G., Rohatgi V. K.* Probability Theory. New York: Wiley, 1979, 557 p.

Поступила в редакцию
29.V.2003