Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Тихов, Асимптотики статистических оценок по цензурированным выборкам для распределений с правильно меняющимися хвостами, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 3, 531–552

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp1951>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 05:56:06

© 1997 г.

ТИХОВ М. С.*

АСИМПТОТИКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ПО ЦЕНЗУРИРОВАННЫМ ВЫБОРКАМ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ ХВОСТАМИ

В работе рассматривается асимптотическое поведение оценок Питмена $\hat{\theta}_n$ параметра сдвига плотности $f(x - \theta) = C(1 + \alpha)(x - \theta)^\alpha L(x - \theta)$, $x \downarrow \theta$, $\alpha > -1$, $L(x) = 1 + D_1(1 + \ell(1 + \alpha)^{-1})x^\ell + o(x^\ell)$, $\ell > 0$, по наблюдениям за первыми k порядковыми статистиками $(X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(k)})$, когда $k = k(n) \rightarrow \infty$, $k/n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Указаны предельные распределения $\hat{\theta}_n$ в зависимости от области значений параметра α . В доказательстве используются свойства и асимптотические разложения гипергеометрических функций многих переменных. Приводятся простые асимптотически эффективные оценки параметра θ как линейные функции от наблюдаемых порядковых статистик.

Ключевые слова и фразы: цензурированные выборки, правильно меняющаяся плотность, параметр сдвига, параметрическое оценивание.

1. Введение. Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с.в.), имеющих плотность распределения $f(x - \theta)$, $\theta \in \mathbf{R}^1$, относительно меры Лебега на прямой с носителем на интервале (θ, ∞) , причем $f(x)$ удовлетворяет условию:

$$f(x) = C(1 + \alpha)x^\alpha L(x) \quad \text{при } x \downarrow 0, \quad (1)$$

где $\alpha > -1$ и C известны, $L(x) = 1 + D_1(1 + \nu\ell)x^\ell + o(x^\ell)$, $\ell > 0$, $\nu = 1/(1 + \alpha)$, $L(x)$ — медленно меняющаяся функция. Пусть $\{X_n^{(i)}, 1 \leq i \leq n\}$ — вариационный ряд (в.р.), $X_n^{(i)} = X_n^{(i)}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ есть i -я порядковая статистика, а $X_n^{(1,k)} = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \dots, X_n^{(k)})$ есть отрезок вариационного ряда. Цель статьи — исследовать поведение оценок Питмена $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_n^{(1,k)})$ параметра сдвига θ плотности $f(x - \theta)$ со свойством (1), построенных по отрезку в.р. $X_n^{(1,k)}$, когда $k = k(n) \rightarrow \infty$, но $k/n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Так как замена $Y = -X$ или $Z = 1/X$ можно переносить

*Нижегородский университет им. Н. И. Лобачевского, кафедра прикладной теории вероятностей, пр. Гагарина, 23, 603600 Нижний Новгород, Россия.

результаты, найденные для отрезка в.р. $X_n^{(1,k)}$ на результаты для отрезка $X_n^{(n-k+1,n)} = (X_n^{(n-k+1)}, \dots, X_n^{(n)})$, и плотности $f_Y(x) = f(-x)$ или $f_Z(x) = x^{-2}f(x^{-1})$, то мы будем рассматривать только отрезок $X_n^{(1,k)}$ и плотность $f(x)$.

Асимптотическое поведение статистик, построенных как по отрезку $X_n^{(1,k)}$, так и по $X_n^{(n-k+1,n)}$, рассматривали Р. Дэвис (R. Davis) и С. Резник (S. Resnik) [18], П. Холл (P. Hall) и А. Уэлш (A. Welsh) [20], С. Чёргё (S. Csörgö) [17], М. Тихов [15]. В применении к распределению (1) исследовался в основном случай $\alpha > 1$. В [19] П. Холл (P. Hall) изучил асимптотическое поведение оценок максимального правдоподобия (ОМП) параметра сдвига θ плотности $f_1(\theta - x)$, $f_1(x) = C(1 + \alpha)x^\alpha(1 + O(x^\ell))$, $x \downarrow 0$, где $\alpha \geq 0$, $\ell > 0$. В частности, он доказал асимптотическую нормальность ОМП параметра θ , построенных по отрезку в.р. $X_n^{(n-k+1,n)}$, когда $\alpha \geq 1$, при известных C и α , а также асимптотическую нормальность ОМП параметров α и θ . Его доказательства основывались на представлении А. Реньи (A. Rényi) [21] для порядковых статистик из показательного распределения.

В данной статье изучается асимптотическое поведение оценок Питмена $\hat{\theta}_n$ при известных C и α на базе метода И. А. Ибрагимова и Р. З. Хасьминского [6]. Для применения этого метода сначала устанавливается локальное асимптотическое поведение отношения правдоподобия (ОП) (теорема 1) подходом, разработанным в работах [12]–[14], на основании чего показывается, что имеет место указанное в теореме 2 предельное распределение оценок Питмена. Локальное асимптотическое поведение ОП в случае плотности (1) выводится исходя из свойств и асимптотических разложений гипергеометрических функций одной и многих переменных. Это позволяет охватить также значения $\alpha \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Для случаев $\alpha \geq 1$ и $\alpha = 0$ в п. 5 приводятся простые оценки параметра сдвига θ и доказываются их асимптотическая эффективность, когда $f(x) = (1 + \alpha)x^\alpha$, $0 < x < 1$. В случае $0 < |\alpha| < 1$ сравниваются две оценки параметра сдвига θ , порядок сходимости которых такой же, как и у оценки Питмена. Подсчитано, что для α , больших примерно 0.205, первая из них лучше, чем вторая, а при α , меньших — хуже в смысле предельной дисперсии.

2. Обозначения. Положим

$$\lambda_n = (Cn)^{-\nu} L^*\left(\frac{1}{nC}\right), \quad b_n = \left(\frac{k}{nC}\right)^\nu L^*\left(\frac{k}{nC}\right),$$

$$a_n = b_n \nu k^{-1/2}, \quad z = a_n x_2 + b_n, \quad \beta_n = \frac{1}{\mu(n)},$$

$L^*(x) = 1 - D_1 \nu x^\ell + o(x^\ell)$ есть сопряженная с $L(x) = 1 + D_1 x^\ell + o(x^\ell)$ медленно меняющаяся функция [10, с. 31], $\nu = 1/(1 + \alpha)$, $\mu(n)$ — нормирующий множитель, вид которого определяется областью значений

параметра α (см. теорему 1).

Если $F(x)$ — функция распределения (ф.р.) с плотностью распределения (п.р.) $f(x)$, удовлетворяющей условию (1), то $F(x)$ удовлетворяет условию

$$F(x) = Cx^{1+\alpha}L_1(x) \quad \text{при } x \downarrow 0. \quad (2)$$

Объектом нашего исследования будет *случайная функция*

$$\begin{aligned} \xi_n(u) = \ln f_n \left(X_n^{(1)} - \frac{u}{\mu(n)}, \dots, X_n^{(k)} - \frac{u}{\mu(n)} \right) \\ - \ln f_n(X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(k)}), \quad u \in \mathbf{R}^1, \end{aligned}$$

где

$$f_n(y_1, \dots, y_k) = \begin{cases} (n-k+1)_k \prod_{i=1}^k f(y_i) (1-F(y_k))^{n-k}, \\ \quad \text{если } y_1 < \dots < y_k, \\ 0 \quad \text{в противном случае,} \end{cases}$$

есть плотность распределения вектора $X_n^{(1,k)}$, $(n-k+1)_k = \Gamma(n+1)/\Gamma(n-k+1)$ есть символ Похгаммера ($k = 1, 2, \dots, n$), $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, а также *оценки Питмена*

$$\hat{\theta}_n = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \theta f_n(X_n^{(1)} - \theta, \dots, X_n^{(k)} - \theta) d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} f_n(X_n^{(1)} - \theta, \dots, X_n^{(k)} - \theta) d\theta}$$

параметра сдвига θ .

Мы подберем нормирующий множитель $\mu(n)$ таким, чтобы предельные распределения $\mu(n)(\hat{\theta}_n - \theta)$ при $n \rightarrow \infty$ были бы невырожденными.

Определим функции:

$$\psi_n(x, u) = \ln f \left(x - \frac{u}{\mu(n)} \right) - \ln f(x),$$

$$M_n(x, u) = \ln \left(1 - F \left(x - \frac{u}{\mu(n)} \right) \right) - \ln (1 - F(x)),$$

$$V_n(\mathbf{t}; x) = \exp \left\{ i \sum_{j=1}^m t_j \psi_n(x, u_j) \right\}, \quad \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m),$$

$$I_n(\mathbf{t}; z) = \int_{-\infty}^z V_n(\mathbf{t}; x) f(x) dx, \quad U_n(\mathbf{t}; z) = \frac{I_n(\mathbf{t}; z)}{F(z)}.$$

Положим $t_+ = \sum_{j=1}^m t_j$, и пусть $\varphi_n(\mathbf{t}) = \mathbf{E}(\exp\{i \sum_{j=1}^m \xi_n(u_j) t_j\})$ есть характеристическая функция вектора $(\xi_n(u_1), \dots, \xi_n(u_m))$, где символ $\mathbf{E}_\theta(\cdot)$ обозначает математическое ожидание по распределению $F(x - \theta)$, $\mathbf{E}(\cdot) = \mathbf{E}_0(\cdot)$.

Через $\eta(\alpha)$ будем обозначать случайную величину, имеющую распределение Вейбулла с ф.р. $G_\alpha(x) = 1 - \exp(-x^{1+\alpha})$, $x > 0$, полагая $\eta(0) = \eta$; через ζ — с.в., имеющую стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$ с ф.р. $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2) dx$, а через $N(0, \sigma^2)$ — с.в., имеющую ф.р. $\Phi(x/\sigma)$.

Нам понадобится гипергеометрическая функция многих переменных Лауричелла $F_1(a, b_1, \dots, b_m; c; x_1, \dots, x_m)$, которая определяется в виде интеграла (см. [9, с. 452, 7.2.4.57]):

$$F_1(a, b_1, \dots, b_m; c; x_1, \dots, x_m) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{c-a-1} (1-ux_1)^{-b_1} \dots (1-ux_m)^{-b_m} du,$$

$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$, $|\arg(1-x_i)| < \pi$, $i = 1, 2, \dots, m$, а также в виде сходящегося ряда (см. [9, с. 449, 7.2.4.15]):

$$F_1(a, b_1, \dots, b_m; c; x_1, \dots, x_m) = \sum_{s_1, \dots, s_m \geq 0} \frac{(a)_{s_1+\dots+s_m} (b_1)_{s_1} \dots (b_m)_{s_m}}{(c)_{s_1+\dots+s_m}} \frac{x_1^{s_1}}{s_1!} \dots \frac{x_m^{s_m}}{s_m!},$$

$|x_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, m$. Пусть, кроме того,

$$\varphi_x(t, u) = \exp \left\{ x^{1+\alpha} \left(1 - F_1 \left(-it\alpha, -\alpha - 1; -\alpha; \frac{u}{x} \right) \right) \right\},$$

если $u < x$, для $t \in \mathbf{R}^1$, $\alpha \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, где $F_1(a, b_1; c; x)$ в случае одного переменного есть гипергеометрическая функция Гаусса (см. [2, 2.1.1(2), с. 69; 2.1.3(10), с. 72]).

Пусть

$$J_n(\theta) = E_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) \ln f_n(X_n^{(1)} - \theta, \dots, X_n^{(k)} - \theta)^2$$

есть количество информации, содержащееся в отрезке в.р. $X_n^{(1,k)}$.

3. Результаты. Основной результат статьи составляют следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть плотность $f(x)$ удовлетворяет условию (1). Тогда конечномерные распределения случайных функций $\{\xi_n(u), u \in \mathbf{R}^1\}$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к конечномерным распределениям функции $\{\xi(u), u \in \mathbf{R}^1\}$, причем

(i) если (U1): $\alpha > 1$, $\mu(n) = \nu^{-1} C^\nu n^\nu k^{1/2-\nu} / L^*(k/n)$, $k = k(n) \rightarrow \infty$ и $k = o(n^{r/(r+1/2)})$, где $r = \min(\nu\ell, 1)$ при $L(x) \neq 1$, $r = 1$ при $L(x) = 1$, то

$$\xi(u) = -\frac{1}{2} u^2 \alpha^2 (\alpha^2 - 1)^{-1} + u \alpha (\alpha^2 - 1)^{-1/2} \zeta;$$

(ii) если (U2): $\alpha = 1$, $\mu(n) = (Cn \ln k)^{1/2} / L^*(k/n)$, $k^{(\tau+1/2)/\tau} n^{-1} \times (\ln k)^{-1/2} \rightarrow 0$, то

$$\xi(u) = -\frac{1}{2} u^2 + u\zeta;$$

(iii) если (U3): $\alpha = 0$ и $\mu(n) = Cn$, то

$$\xi(u) = \begin{cases} u & \text{для } u \leq \eta, \\ -\infty & \text{для } u > \eta; \end{cases}$$

(iv) если (U4): $0 < |\alpha| < 1$, $\mu(n) = C^\nu n^\nu$, то последовательность характеристических функций $\varphi_n(t) = E(\exp(it\xi_n(u)))$ сходится к функции

$$(1 + \alpha) \int_u^\infty x^\alpha \exp \{ -x^{1+\alpha} F_1(-it\alpha, -\alpha - 1; -\alpha; ux^{-1}) \} dx.$$

Теорема 2. Пусть $\hat{\theta}_n$ — оценка Питмена параметра сдвига распределения $F(x - \theta)$, построенная по отрезку в.р. $X_n^{(1,k)}$, $k = k(n) \rightarrow \infty$, $k/n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, где $F(x)$ удовлетворяет условию (2).

(i) Если $\alpha > 1$ и выполнено условие (U1), то

$$n^\nu k^{1/2-\nu} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, (1-2\nu)\nu^2(1-\nu)^{-2} C^{-2\nu});$$

(ii) если $\alpha = 1$ и выполнено условие (U2), то

$$(n \ln k)^{1/2} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, C^{-1});$$

(iii) если $\alpha = 0$, то

$$Cn(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \eta - 1.$$

Теорема 3. Пусть плотность $f(x)$ удовлетворяет условию (1). Тогда для любой последовательности оценок $\{T_n\}$ параметра сдвига плотности $f(x - \theta)$ и любого $\beta > 0$ имеют место следующие утверждения:

(i) при условии (U1)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|\theta - t| < \delta} E_t |\mu(n)(T_n - t)|^\beta \geq \frac{(2(1-2\nu))^{\beta/2} \Gamma((\beta+1)/2)}{(1-\nu)^\beta \Gamma(\frac{1}{2})};$$

(ii) при условии (U2)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|\theta - t| < \delta} E_t |\mu(n)(T_n - t)|^\beta \geq 2^{\beta/2} \frac{\Gamma((\beta+1)/2)}{\Gamma(\frac{1}{2})};$$

(iii) при условии (U3)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|\theta - t| < \delta} \mathbf{E}_t |\mu(n)(T_n - t)|^\beta \geq \min_u \int_0^\infty |y - u|^\beta e^{-y} dy.$$

В теореме 1 определено локальное асимптотическое поведение отношения правдоподобия, в теореме 2 указаны предельные распределения оценок Питмена. Теорема 3 дает асимптотически минимаксные границы рисков статистических оценок.

4. Доказательства. Установим сначала асимптотическое поведение порядковых статистик $X_n^{(k)}$ и $X_n^{(1)}$.

Лемма 1. Пусть ф.р. $F(x) = Cx^{1+\alpha}L(x)$, $L(x)$ — произвольная медленно меняющаяся в нуле функция, а $L^*(x)$ — сопряженная с $L(x)$ медленно меняющаяся функция. Неравенство $L(x) \neq 1$ понимается в том смысле, что $L(x)$ не равна единице из некоторой окрестности нуля

$$\lambda_n = (Cn)^{-\nu} L^*\left(\frac{1}{nC}\right), \quad b_n = \left(\frac{k}{nC}\right)^\nu L^*\left(\frac{k}{nC}\right), \quad a_n = b_n \nu k^{-1/2}.$$

(i) Если $k \rightarrow \infty$, $k/n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\mathbf{P}\left\{\frac{X_n^{(k)} - b_n}{a_n} < x\right\} \rightarrow \Phi(x). \quad (3)$$

(ii) Если $k = 1$, то

$$P\{X_n^{(1)} < x\lambda_n\} \rightarrow G_\alpha(x). \quad (4)$$

Доказательство. Рассмотрим часть (i) леммы. Как известно (см. [11, с. 254, теорема 2]), для сходимости (3) необходимо и достаточно, чтобы при любых $x \in \mathbf{R}^1$

$$\frac{nF(a_n x + b_n) - k}{\sqrt{k}} \rightarrow x, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Из определения коэффициентов a_n и b_n для $F(x) = Cx^{1+\alpha}L(x)$ имеем:

$$nF(a_n x + b_n) = k \left(1 + \frac{x\nu}{\sqrt{k}}\right)^{1+\alpha} \delta_n,$$

где

$$\delta_n = \left(L^*\left(\frac{k}{nC}\right) L^\nu\left(\left(\frac{k}{nC}\right)^\nu \left(1 + \frac{x\nu}{\sqrt{k}}\right)\right) L^*\left(\frac{k}{nC}\right)\right)^{1+\alpha}.$$

Известно [см. 10, с. 30, теорема 1.5], что если $L(x)$ и $L^*(x)$ — сопряженные медленно меняющиеся функции, то $L^*(x) L(xL^*(x)) \rightarrow 1$ при

$x \rightarrow \infty$, поэтому $\delta_n \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, равномерно по $|x| \leq C_2 < \infty$. Значит, при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $|x| \leq C_2$ выполняется $nF(a_n x + b_n) \sim k(1 + x/\sqrt{k} + o(1/\sqrt{k}))$, поэтому соотношение (5), а за ним и (3), будут иметь место.

Перейдем к части (ii). Из определения правильно меняющихся функций $F(\tau x)/F(x) \rightarrow \tau^{1+\alpha}$ ($x \downarrow 0$, $\tau > 0$). По теореме 6 из [11, с. 197] необходимым и достаточным условием принадлежности $F(x)$ области притяжения закона $G_\alpha(x)$ является выполнение условия $nF(\lambda_n x) \rightarrow x^{1+\alpha}$, $n \rightarrow \infty$. Для доказательства последнего необходимо использовать лемму 1.8 из [10, с. 29], согласно которой если $F(x) = Cx^{1+\alpha}L(x)$ при $x \downarrow 0$, то единственной асимптотически обратной к $F(x)$ функцией будет $R^*(x) = (x/C)^\nu L^*(x/C)$, что доказывает (4).

Доказательство теоремы 1. Мы будем доказывать сходимость характеристических функций (х.ф.) $\varphi_n(t)$ к предельной х.ф. $\varphi(t)$, откуда будет следовать сходимость конечномерных распределений функций $\{\xi_n(u), u \in \mathbf{R}^1\}$ к распределениям случайной функции $\{\xi(u), u \in \mathbf{R}^1\}$.

Пользуясь свойствами порядковых статистик, получаем

$$\begin{aligned}\varphi_n(t) &= \mathbf{E} \left(\mathbf{E} \left(\exp \left\{ i \sum_{j=1}^m t_j \xi_n(u_j) \right\} \middle| X_n^{(1)}, X_n^{(k)} \right) \right) \\ &= \mathbf{E}(Q_n(t; X_n^{(1)}, X_n^{(k)})) \\ &= \iint_{y < z} Q_n(t; y, z) p_n^{(1,k)}(y, z) dy dz \quad (t \in \mathbf{R}^m),\end{aligned}\quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}Q_n(t; y, z) &= \frac{\int_y^z V_n(t; x) f(x) dx}{(F(z) - F(y))^{k-2}} V_n(t; y) V_n(t; z) \\ &\quad \times \exp \left\{ i(n-k) \sum_{j=1}^m t_j M_n(z, u_j) \right\}, \\ p_n^{(1,k)}(y, z) &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1) \Gamma(k-1)} \\ &\quad \times (F(z) - F(y))^{k-2} (1 - F(z))^{n-k} f(y) f(z)\end{aligned}$$

для $y < z$, и $p_n^{(1,k)}(y, z) = 0$ в противном случае.

Сделаем в (6) замену переменных: $z = a_n x_2 + b_n$, $y = \lambda_n x_1$. Тогда

$$\begin{aligned}\varphi_n(t) &= \iint_{\lambda_n x_1 < a_n x_2 + b_n} Q_n(t; \lambda_n x_1, a_n x_2 + b_n) \\ &\quad \times a_n \lambda_n p^{(1,k)}(\lambda_n x_1, a_n x_2 + b_n) dx_1 dx_2.\end{aligned}$$

Известно (см. [11, с. 46, 53]), что $a_n \lambda_n p_n^{(1,k)}(\lambda_n x_1, a_n x_2 + b_n)$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к плотности $h_1(x_1) h_2(x_2)$, где $h_1(x) = (1 + \alpha) x^\alpha \exp(-x^{1+\alpha})$, для $x > 0$; $h_2(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$; причем эта сходимость равномерна по $(x_1, x_2) \in B$, где $B = \{(x_1, x_2): 0 < x_1 \leq C_1, |x_2| \leq C_2\}$.

Из определения функции $Q_n(t; y, z)$ следует, что $|Q_n(t; y, z)| \leq 1$ для любых y, z . Кроме того, $P\{X^{(1)} > \lambda_n C_1, |X_n^{(k)} - b_n| > a_n C_2\} \leq P\{|X_n^{(k)} - b_n| > a_n C_2\}$. Поэтому (см. [15, с. 662]) можно выбрать $C_2 > 0$ так, чтобы для заданного $\varepsilon > 0$ выполнялись неравенства: $\varepsilon C_2^2 > 2$ и $P\{|X_n^{(k)} - b_n| > a_n C_2\} < \varepsilon$.

В таком случае из работы [13] получаем, что достаточно найти предел при $n \rightarrow \infty$ функции $Q_n(t; \lambda_n x_1, a_n x_2 + b_n)$ для $(x_1, x_2) \in B$, к чему мы сейчас и перейдем.

Пусть $u < 0$. Заметим, что $F(\lambda_n x_1)/F(a_n x_2 + b_n) \sim O(1/k)$ и $V_n(t; y) = 1 + o(1)$, $V_n(t; z) = 1 + o(1)$ равномерно на множестве B , поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$Q_n(t; \lambda_n x_1, a_n x_2 + b_n) = U_n^k(t, a_n x_2 + b_n) \exp \left\{ i(n-k) \sum_{j=1}^m t_j M_n(a_n x_2 + b_n, u_j) \right\} (1 + o(1)).$$

Так как $U_n(t; x) = I_n(t; x)/F(x)$, то рассмотрим функцию

$$I_n(t; z) = \int_0^z C(1 + \alpha) x^\alpha g(x) L(x) dx, \quad (7)$$

где $g(x) = \prod_{j=1}^m (1 - \beta_n u_j/x)^{it_j \alpha}$.

Заменим в интеграле (7) переменную x на zv . В таком случае

$$I_n(t; z) = C(1 + \alpha) z^{\alpha+1} \int_0^1 v^\alpha g(zv) L(zv) dv.$$

Ясно, что $|g(zv)| \leq 1$. Пусть $A(z) = \int_0^1 v^\alpha (L(zv)/L(z) - 1) dv$. По теореме о равномерной сходимости для медленно меняющихся функций (см. [10, с. 10]) $A(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$. Значит, при $z \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \int_0^1 v^\alpha g(zv) L(zv) dv &\sim L(z) \int_0^1 v^\alpha g(zv) dv, \\ U_n(t; z) &\sim (1 + \alpha) \int_0^1 v^\alpha g(zv) dv, \end{aligned}$$

поэтому в дальнейшем будем обозначать $U_n(t; z) = (1 + \alpha) \int_0^1 v^\alpha g(zv) dv$.

С л у ч а й (i). Используя интегральное представление гипергеометрической функции Лауричелла, запишем функцию $U_n(t; z)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 U_n(t; z) &= \frac{1 + \alpha}{\alpha + 1 - i\alpha t_+} \prod_{j=1}^m \left(-\frac{u_j \beta_n}{z} \right)^{i\alpha t_j} \\
 &\times F_1 \left(\alpha + 1 - i\alpha t_+, -i\alpha t_1, \dots, -i\alpha t_m; \alpha + 2 - i\alpha t_+; \right. \\
 &\quad \left. \frac{z}{\beta_n u_1}, \dots, \frac{z}{\beta_n u_m} \right), \quad (8)
 \end{aligned}$$

поскольку $\operatorname{Re}(\alpha + 2 - i\alpha t_+) > \operatorname{Re}(\alpha + 1 - i\alpha t_+) > 0$.

Пусть для начала $m = 1$. Тогда F_1 есть гипергеометрическая функция Гаусса одной переменной. Из формулы 2.10.(2) [2, с. 116] для аналитического продолжения гипергеометрического ряда получаем (если $\alpha \neq 2, 3, \dots$ и $\beta_n = a_n$)

$$\begin{aligned}
 U_n(t; z) &= - \left(\frac{a_n u}{z} \right)^{1+\alpha} \frac{\Gamma(\alpha + 1 - i\alpha) \Gamma(-\alpha)}{\Gamma(-i\alpha)} \\
 &\quad + F_1 \left(-i\alpha, -\alpha - 1; -\alpha; \frac{a_n u}{z} \right), \quad (9)
 \end{aligned}$$

где

$$F_1 \left(-i\alpha, -\alpha - 1; -\alpha; \frac{a_n u}{z} \right) = 1 + \frac{it a_n u}{\nu z} + \frac{i\alpha(1 - i\alpha) a_n^2 u^2}{2\nu(1 - \alpha) z^2} + o\left(\frac{1}{k}\right). \quad (10)$$

Так как $\alpha + 1 > 2$, то в (9) первое слагаемое будет порядка $o(1/k)$. Из (9) и (10) теперь нетрудно вывести, что

$$U_n(t; z) = 1 - \frac{itu}{\sqrt{k}} + \frac{itx_2 u}{k(1 + \alpha)} - \frac{i\alpha t(i\alpha - 1)u^2}{2(\alpha^2 - 1)k} + o\left(\frac{1}{k}\right). \quad (11)$$

В то же время при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 M_n(z, u) &= \frac{u\sqrt{k}}{n} + \frac{(2x_2 - u)u\alpha}{2n(1 + \alpha)} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
 &\quad + O\left(\frac{k^{\nu\ell+1/2}}{n^{\nu\ell+1}}\right) + O\left(\frac{k^{3/2}}{n^2}\right). \quad (12)
 \end{aligned}$$

Из условия (U1) заключаем, что $O(k^{\nu\ell+1/2}/n^{\nu\ell+1}) + O(k^{3/2}/n^2) = o(1/n)$.

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$Q_n(t; \lambda_n x_1, a_n x_2 + b_n) \longrightarrow \exp \left\{ itux_2 + \left(-D + t^2 - \frac{i\alpha}{1 + \alpha} \right) \frac{u^2}{2} \right\}, \quad (13)$$

где $D(t) = t^2 \alpha^2 (\alpha^2 - 1)^{-1} + i\alpha^2 (\alpha^2 - 1)^{-1}$.

Если же α равно целому числу (в нашем случае 2, 3, ...), то мы воспользуемся разложением гипергеометрической функции Гаусса вида 2.10.(9) [2, с. 117], согласно которому

$$U_n(t; z) = (-1)^\alpha \left(-\frac{a_n u}{z}\right)^{1+\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1-it\alpha)}{j\Gamma(-it\alpha)\Gamma(\alpha+1+j)} \left(\frac{a_n u}{z}\right)^j + \sum_{j=0}^{\alpha} \frac{(\alpha+1)\Gamma(j-it\alpha)}{(\alpha+1-j)\Gamma(-it\alpha)\Gamma(j+1)} \left(\frac{a_n u}{z}\right)^j + \left(-\frac{a_n u}{z}\right)^{1+\alpha} \frac{\Gamma(\alpha+1-it\alpha)}{\Gamma(-it\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \left(\ln\left(-\frac{a_n u}{z}\right) + h'_0\right),$$

где $h'_0 = \Psi(\alpha+2) - \Psi(\alpha+1-it\alpha)$, $\Psi(x) = (d/dx)(\ln \Gamma(x))$ есть дигамма-функция,

$$\Psi(\alpha+1-it\alpha) = \frac{1}{\alpha-it\alpha} + \frac{1}{\alpha-1-it\alpha} + \dots + \frac{1}{2-it\alpha} + \frac{1}{1-it\alpha} + \Psi(1-it\alpha),$$

$$\Psi(\alpha+2) = -\gamma + \sum_{j=1}^{\alpha+1} j^{-1},$$

$$\Psi(1-it\alpha) = \overline{\Psi(1+it\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \dots,$$

$$\operatorname{Re}(\Psi(1+it\alpha)) = -\gamma + t^2 \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} (n^2 + t^2 \alpha^2)^{-1},$$

$$\operatorname{Im}(\Psi(1+it\alpha)) = t\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + t^2 \alpha^2)^{-1},$$

γ — постоянная Эйлера (см. [1, 6.3.7, 6.3.13, с. 84–85]). Значит, $|h'_0| \leq H < \infty$ для любого t из ограниченного множества, где H — некоторая константа.

В случае целого α соотношение (13) нетрудными рассуждениями, аналогичными предыдущим, выводится из этого представления. Итак, (13) доказано для $u < 0$ и $\alpha > 1$.

Пусть $u > 0$. Тогда в формуле (6) в выражении для $Q_n(t; y, z)$ будем иметь $y = \max\{\beta_n u, \lambda_n x_1\}$. Так как

$$|x_1| \leq C_1, \quad \beta_n \sim \frac{k^{1/2+\nu} n^{-\nu}}{L^*(k/(nC))}, \quad \lambda_n \sim n^{-\nu} L^*\left(\frac{1}{nC}\right),$$

$L^*(1/(nC))L^*(k/(nC))n^{-\delta} = o(k^{-3\delta/2})$ для любого $\delta > 0$, то $\lambda_n/\beta_n = o(k^{(3\delta-1)/2-\nu})$, т.е. $\lambda_n/\beta_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Поэтому найдется такое n_0 , что $y = \beta_n u$ для $n > n_0$. Кроме того, $F(b_n + a_n x_2) - F(\beta_n u) \sim F(b_n + a_n x_2)$

при $n \rightarrow \infty$. Значит, если обозначить $Q_n \equiv Q_n(t; \beta_n u, z)$, то

$$Q_n = U_n^{k-1}(t; z) \exp \{itnM_n(z, u)\} (1 + o(1)),$$

где

$$\begin{aligned} U_n(t; z) = & \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha - it} \left(-\frac{uan}{z} \right)^{it\alpha} \\ & \times F_1 \left(\alpha + 1 - it\alpha, -it\alpha; \alpha + 2 - it\alpha; \frac{z}{a_n u} \right) \\ & - \left(-\frac{uan}{z} \right)^{1+\alpha} \frac{\Gamma(\alpha + 1 - it\alpha) \Gamma(it\alpha)}{\Gamma(\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

Теперь, чтобы получить соотношение (13), остается повторить рассуждения для случая $u < 0$.

Окончательно,

$$\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t) = \exp \left\{ -\frac{it\alpha^2 u^2}{2(\alpha^2 - 1)} - \frac{t^2 \alpha^2 u^2}{2(\alpha^2 - 1)} \right\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

В общем случае ($m \geq 2$) при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость

$$\begin{aligned} \varphi_n(\mathbf{t}) \rightarrow \varphi(\mathbf{t}) &= E \left(\exp \left\{ i \sum_{j=1}^m \xi(u_j) t_j \right\} \right) \\ &= \exp \left\{ -\frac{i\alpha^2}{2(\alpha^2 - 1)} \sum_{j=1}^m u_j^2 t_j - \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2 - 1)} \left(\sum_{j=1}^m u_j t_j \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

которая доказывается индукцией по m , используя следующую формулу, выражающую гипергеометрическую функцию от $(m + 1)$ переменных через гипергеометрическую функцию m и одного переменных.

Лемма 2. Пусть $s = s_1 + s_2 + \dots + s_m$. Тогда

$$\begin{aligned} & F_1(a, b_1, b_2, \dots, b_m, b; c; x_1, x_2, \dots, x_m, x) \\ &= \sum_{s_1, s_2, \dots, s_m=0}^{\infty} \frac{(a)_s (c-a)_s}{(c-s-1)(c)_{2s}} \\ & \times \prod_{j=1}^m \frac{x_j^{s_j}}{s_j!} (b)_{s_j} (b)_s x^s F_1(a+s, b+s; c+2s; x) \\ & \times F_1(a+s, b_1+s_1, b_2+s_2, \dots, b_m+s_m; c+2s; x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (15) \end{aligned}$$

$|x| < 1, |x_j| < 1, j = 1, 2, \dots, m$.

Формула (15) устанавливается путем сравнения коэффициентов разложения левой и правой частей. Она обобщает формулу 6.7.2.4 из [9, с. 415].

С л у ч а й (ii). Пусть $\alpha = 1$, $u < 0$, $\varepsilon_n(z) = -\beta_n u/z$. Тогда (см. [2, с. 117, формула 2.10.(9)])

$$U_n(t, z) = -2\varepsilon_n^2(z) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(it)_{j+2}}{j(j+2)!} (-\varepsilon_n(z))^j + 1 + 2it\varepsilon_n(z) + it(it-1)\varepsilon_n^2(z) (\ln \varepsilon_n(z) + h'_0),$$

где $h'_0 = \Psi(3) - \Psi(2-it)$. Но $|h'_0| \leq H < \infty$ для любого t из ограниченного множества, H — подходящая константа. Кроме того,

$$\begin{aligned} |(-it)_{j+2}| &= |(j+1-it)(j-it)\cdots(-it)| \\ &\leq (j+2)! \left(1 + \frac{|t|}{j+2}\right) \left(1 + \frac{|t|}{j+1}\right) \cdots (1+|t|) \\ &\leq (j+2)! (1+|t|)^{j+2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(it)_{j+2}}{j(j+2)!} \varepsilon_n^j(z) \right| &\leq (1+|t|)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{((1+|t|)|\varepsilon_n(z)|)^j}{j} \\ &= (1+|t|)^2 \ln \left(1 - (1+|t|)|\varepsilon_n(z)|\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так как $(\mu(n)b_n)^{-2} = 1/(k \ln k) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), причем сходимость равномерна по $|x_2| \leq C_2 < \infty$. Значит, в представлении $U_n(t; z)$ можно ограничиться тремя последними слагаемыми:

$$U_n(t; z) = 1 - \frac{itu}{\sqrt{k \ln k}} + \frac{it(it-1)u^2}{2k} + o\left(\frac{1}{k}\right).$$

Кроме того ($\nu = \frac{1}{2}$),

$$M_n(z, u) = \frac{2u\sqrt{k}}{n\sqrt{\ln k}} + o\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{k^{3/2}}{n^2\sqrt{\ln k}}\right) + O\left(\frac{k^{\nu\ell+1/2}}{n^{\nu\ell+1}\sqrt{\ln k}}\right).$$

Следовательно, в силу (U2),

$$Q_n(t; y, z) \rightarrow \exp \left\{ -\frac{t^2 u^2}{2} - \frac{itu^2}{2} \right\}, \quad n \rightarrow \infty,$$

и

$$\varphi_n(t) \rightarrow \exp \left\{ -\frac{t^2 u^2}{2} - \frac{itu^2}{2} \right\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Если $u > 0$, то рассуждения проводятся аналогично случаю (i), и поэтому (16) будет иметь место и в этом случае. Для $m \geq 2$ доказательство сходимости конечномерных распределений случайных функций $\xi_n(u)$ к

конечномерным распределениям функции $\xi(u)$ использует формулу (15) и проводится индукцией по m .

С л у ч а й (iii). Здесь $\xi_n(u) = -\infty$ для $u > \lambda_n X_n^{(1)}$. Кроме того, из (8) следует, что $U_n(t; z) = 1$, $nM_n(z, u) \rightarrow u$ для $u < z$, поэтому

$$\varphi_n(t) \rightarrow \exp\{itu\}, \quad n \rightarrow \infty,$$

откуда получаем результат (iii) теоремы 1.

С л у ч а й (iv). Пусть $0 < |\alpha| < 1$, $u < \lambda_n x_1$ (здесь $\lambda_n = \beta_n$). Зафиксируем пару порядковых статистик $(X_n^{(1)}, X_n^{(k)})$ и рассмотрим интеграл

$$I_n(t; y, z) = \int_y^z (v - \beta_n u)^{it\alpha} v^{-it\alpha} C(1 + \alpha) v^\alpha dv.$$

Положим $z = b_n + a_n x_2$, $y = \beta_n x_1$ и обозначим $I_n = I_n(t; \beta_n x_1, b_n + a_n x_2)$. Тогда $I_n = I_n^{(1)} - I_n^{(2)}$, где

$$\begin{aligned} I_n^{(1)} &= C(1 + \alpha) \int_0^z (v - u\beta_n)^{it\alpha} v^{-it\alpha + \alpha} dv \\ &= C(1 + \alpha) (-u\beta_n)^{1+\alpha} \frac{\Gamma(1 + \alpha - it\alpha) \Gamma(-\alpha - 1)}{\Gamma(-it\alpha)} \\ &\quad + C z^{1+\alpha} F_1 \left(-it\alpha, -\alpha - 1; -\alpha; \frac{u\beta_n}{z} \right), \\ I_n^{(2)} &= C(1 + \alpha) \int_0^{x_1 \beta_n} (v - u\beta_n)^{it\alpha} v^{-it\alpha + \alpha} dv \\ &= C(1 + \alpha) (-u\beta_n)^{1+\alpha} \frac{\Gamma(1 + \alpha - it\alpha) \Gamma(-\alpha - 1)}{\Gamma(it\alpha)} \\ &\quad + C (x_1 \beta_n)^{1+\alpha} F_1 \left(-it\alpha, -\alpha - 1; -\alpha; \frac{u}{x_1} \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{I_n}{F(b_n + a_n x_2) - F(x_1 \beta_n)} \\ &= \frac{F_1(-it\alpha, -\alpha - 1; -\alpha; uk^{-\nu}(1 + x_2 \nu k^{-1/2})^{-1})}{1 - x_1^{1+\alpha} k^{-1} (1 + x_2 \nu k^{-1/2})^{-1-\alpha}} \\ &\quad - \frac{x_1^{1+\alpha}}{k(1 + x_2 \nu k^{-1/2})^{1+\alpha} - x_1^{1+\alpha}} F_1 \left(-it\alpha, -\alpha - 1; -\alpha; \frac{u}{x_1} \right) \\ &= 1 - it(\alpha + 1) uk^{-\nu} + x_1^{1+\alpha} k^{-1} \left(1 - F_1 \left(-it\alpha, -\alpha - 1; -\alpha; \frac{u}{x_1} \right) \right) \\ &\quad + o\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

и

$$U_n^k = \exp \left\{ -it(1+\alpha)uk^{1-\nu} + x_1^{1+\alpha} \left(1 - F_1 \left(-it\alpha, -\alpha-1; -\alpha; \frac{u}{x_1} \right) \right) \right\} (1+o(1)).$$

В то же время при $n \rightarrow \infty$

$$nM_n(b_n + a_n x_2, u) = u(1+\alpha)k^{1-\nu} + O(k^{2-\nu}n^{-1}) + O\left(\frac{k^{1-\nu+\nu\ell}}{n^{\nu\ell}}\right).$$

В случае $-1 < \alpha < 0$ имеем $1-\nu < 0$, а значит, $2-\nu < 1$ и для $0 < \alpha < 1$ будет выполнено $0 < 1-\nu < \frac{1}{2}$, $1 < 2-\nu < \frac{3}{2}$. Поэтому, в силу условия (U4),

$$Q_n(t; \beta_n x_1, a_n x_2 + b_n) \rightarrow \exp \left\{ x_1^{1+\alpha} \left(1 - F_1 \left(-it\alpha, -\alpha-1; -\alpha; \frac{u}{x_1} \right) \right) \right\}.$$

Для $u > \lambda_n X_n^{(1)}$, $\xi_n(u) = -\infty$. Таким образом, при $n \rightarrow \infty$

$$\varphi_n(t) = E\left(\exp\{it\xi_n(u)\}\right) \rightarrow (1+\alpha) \int_u^\infty x^\alpha \varphi_x(t) \exp\{-x^{1+\alpha}\} dx.$$

Последнее завершает доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Обозначим $\Lambda_n(u) = \exp\{\frac{1}{2}\xi_n(u)\}$. Согласно [6, с. 246, теорема 3.2.1] для доказательства сходимости распределений оценок (в случае $\alpha \geq 1$) к предельному распределению достаточно показать:

$$(A) \quad E(\Lambda_n(u_2) - \Lambda_n(u_1))^2 \leq C_3(u_2 - u_1)^2 \quad \text{для } n > n_0, (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2;$$

(Б) для любого $N > 0$ существует такая постоянная C_N , что при $n > n_0$ и всех $u \in \mathbf{K} \subset R^1$, где $\mathbf{K}$ — компакт,

$$E(\Lambda_n(u)) \leq C_N |u|^{-N}.$$

Докажем (А). Используя неравенство Коши–Буняковского, условия (U1), (U2) теоремы 1, получим (считая, что $u_2 > u_1$):

$$\begin{aligned} & E(\Lambda_n(u_2) - \Lambda_n(u_1))^2 \\ &= 4E\left(\int_{u_1/\mu(n)}^{u_2/\mu(n)} \frac{\partial}{\partial t} f_n^{1/2}(X_n^{(1)} - t, \dots, X_n^{(k)} - t) dt\right)^2 \\ &\leq C_4 \frac{|u_2 - u_1|}{\mu(n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathbf{E} \left(\int_{u_1/\mu(n)}^{u_2/\mu(n)} \left(\frac{\partial}{\partial t} f_n(X_n^{(1)} - t, \dots, X_n^{(k)} - t) \right)^2 \right. \\
& \left. \times f_n(X_n^{(1)} - t, \dots, X_n^{(k)} - t) dt \right) \\
& \leq \sup_{u_1/\mu(n) \leq t \leq u_2/\mu(n)} J_n(t) C_5(u_2 - u_1)^2 \leq C_3(u_2 - u_1)^2. \quad (17)
\end{aligned}$$

Итак, неравенство (А) установлено (в последнем соотношении надо повторить доказательство соответствующих частей теоремы 1 (i), (ii)).

Перейдем к выводу неравенства (Б). Пусть $\beta_n(u) = \mathbf{E}(\Lambda_n(u) - 1)^2$. Из неравенства $1 - x \leq e^{-x}$ и неравенства (17) получаем

$$\mathbf{E}(\Lambda_n(u)) = 1 - \frac{1}{2} \beta_n^2(u) \leq \exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta_n^2(u) \right\} \leq \exp \{-C_6 u^2\} \quad (18)$$

для $|u| \leq C_7 \sqrt{k}$ в случае $\alpha > 1$ и для $|u| \leq C_8 \sqrt{k \ln k}$ в случае $\alpha = 1$, где C_7, C_8 есть любые положительные константы (C_6 определяется по C_7, C_8).

Но если $|u| > C_2 + (1 + \alpha)\sqrt{k}$, когда $\alpha > 1$, и $|u| > C_9 \sqrt{k \ln k}$, когда $\alpha = 1$, где C_9 — достаточно большая константа, то $\int_0^{a_n x + b_n} f^{1/2}(v) f^{1/2}(v - \beta_n u) dv = 0$ для $|x| \leq C_2$. Неравенство (Б) и, значит, результаты (i), (ii) теоремы 2 следуют из (18). Результат (iii) теоремы 2 следует из теоремы 5.3.1 [6, с. 348].

Доказательство теоремы 3 повторяет доказательство теорем 2.12.1 и 5.5.3 из [6, с. 223–224, с. 372], поэтому опущено.

5. Примеры. Распределениями, удовлетворяющими условию (1) (или (2)), являются ($\alpha > -1$, $\ell > 0$, $D_1 > 0$ и $C > 0$ известны):

1) распределение Вейбулла с плотностью

$$f(x) = C(1 + \alpha) x^\alpha \exp\{-x^{1+\alpha}\}, \quad x > 0;$$

2) гамма-распределение с плотностью

$$f(x) = C(1 + \alpha) x^\alpha \exp\{-D_1 x^\ell\}, \quad x > 0;$$

3) бета-распределение с плотностью

$$f(x) = C(1 + \alpha) x^\alpha (1 - D_1 x^\ell)^\rho, \quad 0 < x < 1, \quad \rho > 0;$$

4) бета-распределение 2-го рода с плотностью

$$f(x) = C x^\alpha (1 + D_1 x^\ell)^{-q}, \quad q > 0,$$

где C — нормирующая константа.

Для этих примеров соответствующая функция распределения $F(x)$ может быть записана в виде $F(x) = R(x) = C x^{1+\alpha} (1 + D_1 x^\ell + o(x^\ell))$.

Асимптотически взаимно обратной к ней функцией при $x \downarrow 0$ будет $R^*(x) = (x/C)^\nu (1 - \nu D_1(x/C)^{\ell\nu} + o(x^{\ell\nu}))$.

Пусть

$$f(x) = (1 + \alpha)x^\alpha, \quad 0 < x < 1. \quad (19)$$

Для $0 < 2\nu < 1$, $2\nu = 1$ и $\nu = 1$ (соответственно, для $1 < \alpha < \infty$, $\alpha = 1$, $\alpha = 0$) приведем простые оценки параметра сдвига θ плотности (19), представляющие собой линейные комбинации порядковых статистик $X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \dots, X_n^{(k)}$.

Определим статистику t_n^* равенствами

$$\begin{aligned} t_n^* &= t_n^*(X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(k)}) \\ &= (1 - 2\nu)(1 - \nu)^{-1}(\nu k^{2\nu-1} \sum_{j=1}^k j^{-2\nu} X_n^{(j)} + X_n^{(k)}) \end{aligned} \quad (20)$$

в случае $2\nu < 1$,

$$t_n^* = (\ln k)^{-1} \sum_{j=1}^k j^{-1} X_n^{(j)} \quad (21)$$

в случае $2\nu = 1$,

$$t_n^* = X_n^{(1)} + \frac{X_n^{(k)} - X_n^{(1)} - 1}{n - k + 2} \quad (22)$$

в случае $\nu = 1$.

Покажем сначала, что $t_n^*(X_n^{(1)} - \theta, \dots, X_n^{(k)} - \theta) = t_n^*(X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(k)}) - \theta + o(1)$, $\theta \in \mathbf{R}^1$, при $n \rightarrow \infty$. Для этого воспользуемся формулой 23.2.9 из [1, с. 610]:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k j^{-s} &= \zeta(s) + (1-s)^{-1} k^{1-s} + s \int_k^\infty \{x\} x^{-1-s} dx, \\ k &= 1, 2, \dots; \quad \operatorname{Re} s > 0, \end{aligned} \quad (23)$$

когда $s = 2\nu < 1$, где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, а $\{x\}$ — дробная часть числа x . Отметим, что функция $\zeta(s)$ регулярна для комплексных значений $s \neq 1$ (при $s = 1$ она имеет простой полюс с вычетом 1). Так как $\|x\| \leq 1$, то из (23) заключаем, что при $k \rightarrow \infty$

$$\sum_{j=1}^k j^{-2\nu} = \zeta(2\nu) + (1 - 2\nu)^{-1} k^{1-2\nu} + O(k^{-2\nu}). \quad (24)$$

Если $2\nu = 1$, то (см. [5, с. 16, формула (0.131)])

$$\sum_{j=1}^k j^{-1} = \gamma + \ln k + (2k)^{-1} - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\Gamma(k)A_j}{\Gamma(k+j)},$$

$$A_j = j^{-1} \int_0^1 x(1-x)(2-x) \cdots (j-1-x) dx,$$

откуда следует, что $0 < A_j \leq \Gamma(j-1)$, $j = 2, 3, \dots$, и

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{\Gamma(k)A_j}{\Gamma(k+j)} \leq \Gamma(k) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j)}{\Gamma(k+1+j)}.$$

По формуле 5.2.11.10 из [8, с. 710]

$$\Gamma(k) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j)}{\Gamma(k+1+j)} = k^{-2},$$

и, значит,

$$\sum_{j=1}^k j^{-1} = \gamma + \ln k + (2k)^{-1} + O(k^{-2}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Из (24) и (25) получаем, что если $2\nu < 1$, то

$$(1-2\nu)(1-\nu)^{-1} \left(\nu k^{2\nu-1} \sum_{j=1}^k j^{-2\nu} + 1 \right) \\ = 1 + \nu(1-2\nu) \zeta(2\nu) (1-\nu)^{-1} k^{2\nu-1} + O(k^{-1}),$$

а если $2\nu = 1$, то

$$(\ln k)^{-1} \sum_{j=1}^k j^{-1} = 1 + \gamma (\ln k)^{-1} + O((k \ln k)^{-1}).$$

Таким образом,

$$t_n^*(X_n^{(1)} - \theta, \dots, X_n^{(k)} - \theta) = t_n^*(X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(k)}) - \theta + O(k^{2\nu-1}),$$

если $2\nu < 1$, и

$$t_n^*(X_n^{(1)} - \theta, \dots, X_n^{(k)} - \theta) = t_n^*(X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(k)}) - \theta + O((\ln k)^{-1}),$$

если $2\nu = 1$.

Для $\nu = 1$ статистика (22) есть оценка Питмена параметра сдвига θ плотности (19), поэтому $t_n^*(X_n^{(1)} - \theta, \dots, X_n^{(k)} - \theta) = t_n^*(X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(k)}) - \theta$.

Введем обозначение:

$$c_n = \begin{cases} n^{-\nu}(1-2\nu)(1-\nu)^{-1} \left(\nu k^{2\nu-1} \sum_{j=1}^k j^{-\nu} + k^\nu \right), & \text{если } 2\nu < 1, \\ n^{-1/2}(2 \ln k)^{-1} \sum_{j=1}^k j^{-1/2}, & \text{если } 2\nu = 1, \\ 0, & \text{если } \nu = 1. \end{cases} \quad \begin{matrix} (26) \\ (27) \\ (28) \end{matrix}$$

Теорема 4. Пусть $2\nu \leq 1$ или $\nu = 1$,

$$T_n = t_n^* - c_n \quad (29)$$

есть оценка параметра сдвига θ плотности $f(x - \theta)$, где $f(x)$ определяется формулой (19), t_n^* — формулами (20)–(22), а c_n — равенствами (26)–(28) соответственно.

Тогда

(i) если $2\nu < 1$, то

$$(1 + \alpha) n^\nu k^{1/2-\nu} (T_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, (1 - 2\nu) \nu^2 (1 - \nu)^{-2});$$

(ii) если $2\nu = 1$, то $(n \ln k)^{1/2} (T_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, 1)$;

(iii) если $\nu = 1$, то $n(T_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \eta - 1$.

Доказательство. Рассмотрим пункты (i), (ii) теоремы 4 и получим сначала главные члены дисперсии оценки (29) параметра θ . Для этого воспользуемся следующим представлением из работы [5] для порядковых статистик из распределения (19):

$$X_n^{(j)} = \left(\sum_{i=1}^j \frac{\eta_i}{n} \right)^\nu + O\left(\left(\frac{j}{n}\right)^{\nu+1}\right) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (30)$$

равномерно по $1 \leq j \leq k$, где $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ — независимые стандартные показательно распределенные случайные величины.

Положим

$$Z_j = \sum_{i=1}^j (\eta_i - 1), \quad 1 \leq j \leq k.$$

Тогда (см. [5, с. 561])

$$\left(\sum_{i=1}^k \eta_i \right)^\nu = k^\nu + \nu Z_k k^{\nu-1} + O(k^{\nu-1} \ln \ln k). \quad (31)$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{k-1} j^{-2\nu} \left(\sum_{i=1}^j \eta_i \right)^\nu = (1-\nu)^{-1} k^{1-\nu} - \nu \sum_{j=1}^k j^{-1-\nu} Z_j + O(1), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k j^{-1-\nu} Z_j &= \sum_{i=1}^k (\eta_i - 1) \sum_{j=i}^k j^{-1-\nu} \\ D \left(\sum_{j=1}^k j^{-1-\nu} Z_j \right) &= \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=j}^k j^{-1-\nu} \right)^2 = S_k(\nu). \end{aligned} \quad (33)$$

Но

$$\begin{aligned} S_k(\nu) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=i}^k \sum_{h=i}^k (jh)^{-1-\nu} = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{h=1}^j \sum_{i=1}^h + \sum_{h=j+1}^k \sum_{i=1}^j \right) (jh)^{-1-\nu} \\ &= \sum_{j=1}^k j^{-1-\nu} \sum_{h=1}^j h^\nu + \sum_{j=1}^k j^\nu \sum_{h=j+1}^k h^{-1-\nu} \\ &= \sum_{j=1}^k j^{-1-\nu} \sum_{h=1}^j h^{-\nu} + \sum_{j=1}^k j^{-\nu} \sum_{h=1}^k h^{-1-\nu} - \sum_{j=1}^k j^{-1-2\nu} \\ &= 2 \sum_{j=1}^k j^{-1-\nu} \sum_{i=1}^j i^{-\nu} - \sum_{j=1}^k j^{-1-2\nu}. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, получаем:

$$D \left(\sum_{j=1}^k j^{-1-\nu} Z_j \right) = 2 \sum_{j=1}^k j^{-1-\nu} \sum_{i=1}^j i^{-\nu} - \sum_{j=1}^k j^{-1-2\nu}.$$

Для $2\nu \leq 1$ ряд $\sum_{j=1}^\infty j^{-1-2\nu}$ сходится, поэтому при $k \rightarrow \infty$

$$S_k(\nu) \sim \begin{cases} 4 \ln k, & \text{если } \nu = \frac{1}{2}, \\ 2k^{1-2\nu}/(1-\nu)(1-2\nu), & \text{если } \nu < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Для $\nu > \frac{1}{2}$ ряд $S_k(\nu)$ сходится при $k \rightarrow \infty$. Это следует из монотонности и ограниченности последовательности $\{S_k(\nu)\}$, $k = 1, 2, \dots$. Действительно, для $\frac{1}{2} < \nu < 1$, выполняется неравенство $S_k(\nu) \leq 2(1-\nu)^{-1} \zeta(2\nu) - \zeta(1+2\nu)$; а для $\nu > 1$ верно неравенство $S_k(\nu) \leq 2\zeta(1+2\nu)$. Для $\nu = 1$ сумма $S_k(1)$ не превосходит сходящегося ряда $2\zeta(2) + \sum_{j=2}^\infty j^{-2} \ln j$. Положим $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(\nu) = \kappa(\nu)$.

Приведем некоторые компьютерные значения $\kappa(\nu)$: $\kappa(0.85) = 5.111$, $\kappa(0.9) = 4.477$, $\kappa(0.95) = 3.988$, $\kappa(1.0) = 3.602$, $\kappa(1.1) = 3.034$, $\kappa(1.2) = 2.640$, $\kappa(1.5) = 1.967$, $\kappa(2.0) = 1.495$, $\kappa(4.0) = 1.077$, $\kappa(8.0) = 1.004$. Кроме

того, $S_{10000}(0.55) = 21.116$, $S_{100000}(0.55) = 23.385$, $S_{10000}(0.60) = 14.987$, $S_{100000}(0.6) = 15.824$, $S_{10000}(0.75) = 7.108$, $S_{100000}(0.75) = 7.167$.

Заметим также, что для $\nu = \frac{1}{2}$ последовательность $a_k = S_k(\nu) \times (4 \ln k)^{-1}$ при $k \rightarrow \infty$ сходится к 1 при $k \rightarrow \infty$, но довольно медленно. Так, $a_{1000} = 0.81$, $a_{50000} = 0.876$.

Из вышесказанного следует, что если $\nu < \frac{1}{2}$, то

$$\begin{aligned} D(T_n) &\sim n^{-2\nu} \nu^2 (1-2\nu)^2 (1-\nu)^{-2} k^{4\nu-2} \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=i}^k j^{-1-\nu} + k^{-\nu} \right)^2 \\ &\sim n^{-2\nu} \nu^2 (1-2\nu) (1-\nu)^{-2} k^{2\nu-1}, \end{aligned}$$

а если $\nu = \frac{1}{2}$, то

$$D(T_n) \sim (4n)^{-1} (\ln k)^{-2} \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=i}^k j^{-3/2} \right)^2 \sim (n \ln k)^{-1}.$$

Воспользуемся теперь следующей теоремой 5 (см. [3], с. 198). Пусть $Y_1, Y_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным математическим ожиданием μ и конечной дисперсией σ^2 . В таком случае статистика $T_a = \sum_{i=1}^N a_i Y_i$, где $(a_1, a_2, \dots, a_N)$ — ненулевой действительный вектор, при условии

$$\sum_{i=1}^N \frac{a_i^2}{\max_{1 \leq i \leq N} a_i^2} \rightarrow \infty \quad (N \rightarrow \infty)$$

асимптотически нормальна с параметрами

$$\mu_a = \mu \sum_{i=1}^N a_i, \quad \sigma_a^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^N a_i^2.$$

Так как для $2\nu \leq 1$ ряд $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2\nu}$ расходится, а

$$\max_{1 \leq i \leq k} \left(\sum_{j=i}^k j^{-1-\nu} \right)^2 \leq C_9 \zeta^2(1+\nu),$$

то из равенств (20), (30)–(34) и теоремы 5, примененной к статистикам T_n заключаем, что в случае $2\nu < 1$ предельное распределение последовательности $\mu(n)(T_n - \theta)$ будет нормальным $N(0, (1-2\nu)\nu^2(1-\nu)^{-2})$, где $\mu(n) = \nu^{-1} n^\nu k^{1/2-\nu}$, а если $2\nu = 1$, то предельное распределение $(n \ln k)^{1/2}(T_n - \theta)$ — нормальное $N(0, 1)$.

Рассмотрим пункт (iii). Для $\nu = 1$ прямые вычисления дают следующее значение дисперсии

$$D(T_n) = \frac{n-k+1}{(n-k+2)(n+1)(n+2)},$$

Значит,

$$D(T_n) \sim n^{-2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Из леммы 1 (см. также [7, с. 34–35]) следует, что

$$nX_n^{(1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \eta, \quad \text{а} \quad X_n^{(k)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} 0.$$

Это доказывает утверждение (iii) и завершает доказательство теоремы 4.

Для $\frac{1}{2} < \nu < 1$ и $\nu > 1$ (т.е. для $0 < \alpha < 1$ и $-1 < \alpha < 0$ соответственно) можно предложить две оценки параметра θ :

$$\bar{t}_n = \frac{\sum_{j=1}^k j^{-2\nu} X_n^{(j)} - \sum_{j=1}^k j^{-\nu}}{\zeta(2\nu)} \quad (35)$$

и

$$\hat{T}_n = X_n^{(1)} - \omega(\nu)n^{-\nu}, \quad \text{где} \quad \omega(\nu) = \nu^{-\nu}\Gamma(1+\nu). \quad (36)$$

Оценка (35) (а также (20) и (21)) предложена, по-видимому, впервые. Оценка (36) рассматривалась в [11, с. 47, формулы (74), (75)] и в [6, с. 420–421]. Оценки (35) и (36) асимптотически несмещены, и

$$R_1(\nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_\theta(n^\nu(\bar{t}_n - \theta))^2 = \nu^2 \kappa(\nu) \zeta^{-2}(2\nu),$$

$$R_2(\nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_\theta(n^\nu(\hat{T}_n - \theta))^2 = \nu^{-2\nu}(\Gamma(1+2\nu) - \Gamma^2(1+\nu)).$$

Заметим, что для плотности (19) можно показать, что дисперсия оценки Питмена (как и дисперсии статистик (35) и (36)) имеет порядок $n^{-2\nu}$. Численные значения величин $R_1(\nu)$ и $R_2(\nu)$, рассчитанные по таблицам 12–14 из [20, с. 58, 59] и по таблице 26 из [20, с. 92–93], приведены в таблице 1.

**Таблица 1. Предельные квадратичные риски
для $n^\nu(\bar{t}_n - \theta)$ и $n^\nu(\hat{T}_n - \theta)$**

ν	0.600	0.800	0.850	0.900	1.000	2.000	4.000
$R_1(\nu)$	0.182	0.732	0.875	1.024	1.331	5.104	17.088
$R_2(\nu)$	0.560	0.803	0.858	0.908	1.000	1.250	0.606

Таблица 1 показывает, что при ν , меньших примерно 0.83 (соответствующее значение α равно 0.205) оценка $\bar{t}_n$ лучше, чем $\hat{T}_n$, а при ν , больших 0.85, оценка $\hat{T}_n$ лучше, чем $\bar{t}_n$. Так как $R_2(\nu) \sim (\pi/\nu)^{1/2}(2/e)^{2\nu}$, то $R_2(\nu) \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ (т.е. когда $\alpha \rightarrow -1$). Кроме того, $\kappa(\nu) \rightarrow 1$, $\zeta(2\nu) \rightarrow 1$ при $\nu \rightarrow \infty$. Поэтому $R_1(\nu) \sim \nu^2$, когда $\nu \rightarrow \infty$. Если $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$,

то $R_1(\nu) \sim \nu^2(2\nu - 1)^2$, т.е. $R_1(\nu) \rightarrow 0$, в то же время $R_2(\frac{1}{2}) = (4 - \pi)/8 \approx 0.107$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979, 832 с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1; 2. М.: Наука, 1973, 299 с.; 1974, 296 с.
3. Гаек Я., Шидак З. Теория ранговых критериев. М.: Наука, 1971, 376 с.
4. Гизман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965, 656 с.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1963, 1100 с.
6. Ибрагимов И. А., Хасьяминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 528 с.
7. Лидбеттер М., Ротсен Х., Линдгрен Г. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. — М.: Мир, 1989, 392 с.
8. Прудников А. И., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды: элементарные функции. М.: Наука, 1981, 800 с.
9. Прудников А. И., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды: дополнительные главы. М.: Наука, 1986, 800 с.
10. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 832 с.
11. Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика: избранные труды. М.: Наука, 1970, 289 с.
12. Тухов М. С. Асимптотический анализ статистических оценок по цензурированным центральным и промежуточным членами вариационного ряда выборкам. — Записки науч. семин. ЛОМИ, 1981, т. 108, с. 170–192.
13. Тухов М. С. Оценки параметров нерегулярных в окрестности квантилей плотностей по отрезкам вариационного ряда. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. 32, в. 2, с. 382–387.
14. Тухов М. С. Асимптотики отношения правдоподобия по отрезкам вариационного ряда. — Известия ВУЗов: Математика, 1990, № 7, с. 69–79.
15. Тухов М. С. Асимптотики T -оценок. — Теория вероятн. и ее примен., 1992, т. 37, в. 4, с. 658–675.
16. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1968, 344 с.
17. Csörgő S. Limit theorems for sums of order statistics. — В сб.: 6 Международная летняя школа по теории вероятностей и математической статистике (Варна, 1988). Sofia, 1989, с. 5–37.
18. Davis R., Resnik S. Tail estimates motivated by extreme value theory. — Ann. Statist., 1984, v. 12, p. 1467–1487.
19. Hall P. On estimating the endpoint of a distribution. — Ann. Statist., 1982, v. 10, p. 556–568.
20. Hall P., Welsh A. H. Adaptive estimates of parameters of regular variation. — Ann. Statist., 1985, v. 13, p. 331–341.
21. Rényi A. On theory of order statistics. — Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1953, v. 4, p. 191–232.

Поступила в редакцию
20.V.1996