Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лебедев, Максимумы независимых сумм в случае тяжелых хвостов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 4, 791–794

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp196>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 11:44:50

© 2004 г.

ЛЕБЕДЕВ А. В.*

МАКСИМУМЫ НЕЗАВИСИМЫХ СУММ В СЛУЧАЕ ТЯЖЕЛЫХ ХВОСТОВ¹⁾

Рассматривается семейство экстремумов вида

$$Y_{mn} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n X_{ij}, \quad m, n \geq 1,$$

где X_{ij} , $i, j \geq 1$, независимы и имеют одинаковое распределение F , обладающее свойством субэкспоненциальности. Изучается предельное поведение Y_{mn} при $m, n \rightarrow \infty$. Получены различные невырожденные предельные законы (Фреше и Гумбеля) в зависимости от характера относительного роста m, n и свойств хвостов F .

Ключевые слова и фразы: максимумы, суммы, правильно меняющиеся хвосты, субэкспоненциальность, невырожденные предельные законы, линейная нормировка.

Рассмотрим семейство экстремумов вида

$$Y_{mn} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n X_{ij}, \quad m, n \geq 1, \quad (1)$$

где X_{ij} , $i, j \geq 1$, независимы и имеют одинаковое распределение F . Нас интересует предельное поведение Y_{mn} при $m, n \rightarrow \infty$.

Подобные вопросы изучались еще в [1]. Некоторые новые результаты были получены в [2].

Выражение (1) может описывать, например, время выполнения однотипных работ, проводимых параллельно, если каждая из них делится на множество фаз [3]. Особый интерес здесь представляет модель параллельных вычислений на компьютере с большим числом процессоров. В [2] упоминались некоторые нормы матриц из независимых случайных элементов. Формулу (1) можно также рассматривать как дискретизацию (по времени) максимума m случайных процессов с независимымиращениями. Подобная модель для гауссовских процессов с непрерывным временем изучалась в [4].

Основные результаты [2] получены при условии, что F обладает конечными средним и дисперсией. В этих предположениях суммы в (1) оказываются асимптотически нормальными, а для максимумов независимых нормальных случайных величин имеет место предельный закон Гумбеля. Таким образом, при $\mathbf{E}X_{ij} = 0$, $\mathbf{D}X_{ij} = 1$ и некоторых ограничениях на относительный рост $m, n \rightarrow \infty$ были получены пределы вида

$$\mathbf{P}\{a_m n^{-1/2}(Y_{mn} - b_m) \leq x\} \rightarrow \exp\{-e^{-x}\}, \quad (2)$$

где $a_m = (2 \ln m)^{1/2}$, $b_m = (2 \ln m)^{1/2} - (2 \ln m)^{-1/2} \ln(4\pi \ln m)^{1/2}$.

Далее мы изучим случай распределений F с тяжелыми хвостами, не обязательно имеющих конечные средние и дисперсии, но зато обладающих свойством субэкспоненциальности (см. [5], [6]):

$$\overline{F}^{*n}(u) \sim n\overline{F}(u), \quad u \rightarrow \infty, \quad n \geq 2, \quad \text{где } \overline{F}(u) = 1 - F(u). \quad (3)$$

* Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: alebedev@mech.math.msu.su

¹⁾ Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 03-01-00724, 04-01-00700 и гранта НШ 1758.2003.1.

Свойство (3) может иметь место и при $n \rightarrow \infty$, если наложить определенные условия на рост u . Фактически, речь идет о больших отклонениях при нарушении условия Крамера.

Рассмотрим сначала случай, когда F имеет правильно меняющийся хвост, т.е. $\bar{F}(u) \sim u^{-\alpha} L(x)$, $u \rightarrow \infty$, где $\alpha > 0$ и $L(x)$ — медленно меняющаяся функция [7], [8]. Введем последовательность чисел c_n таких, что $n\bar{F}(c_n) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. Тогда $c_n \sim n^{1/\alpha} L^*(n)$, $n \rightarrow \infty$, где $L^*(x)$ — медленно меняющаяся функция, зависящая от L (см. [8]).

Заметим, что если асимптотическое соотношение (3) выполняется при $u_{m,n} = c_{mn}x$, $x > 0$, то из него следует

$$P\{c_{mn}^{-1}Y_{mn} \leq x\} \rightarrow \exp\{-x^{-\alpha}\}, \quad x > 0, \quad (4)$$

т.е. имеет место предельный закон Фреше с тем же показателем. Здесь используем тот факт, что если $k\bar{F}(u_k) \rightarrow \tau$, $k \rightarrow \infty$, то $F^k(u_k) \rightarrow e^{-\tau}$.

Далее будем предполагать для простоты, что $EX_{ij} = 0$ при $\alpha > 1$ и $DX_{ij} = 1$ при $\alpha > 2$ (в противном случае легко произвести линейную перенормировку).

Теорема 1. Если $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2)$ и $F(-x)/\bar{F}(x) \rightarrow r \geq 0$, $x \rightarrow \infty$, то при $m, n \rightarrow \infty$ верно (4).

Доказательство. При условиях теоремы F принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем α (см. [7]), и, согласно [9], соотношение (3) выполняется при $u/c_n \rightarrow \infty$. Для $u_{m,n} = c_{mn}x$, $x > 0$, это условие выполняется, так как $c_{mn}/c_n \rightarrow \infty$ при $m, n \rightarrow \infty$.

Таким образом, в данном случае никаких ограничений на относительный рост $m, n \rightarrow \infty$ нет.

Случай $\alpha = 1$, по-видимому, требует более тонкого анализа, однако (4) выполняется, например, для распределения Коши, что было отмечено в [2].

Теорема 2. Пусть $\alpha > 2$ и $E|X_{ij}|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$, тогда:

1) если $\limsup_{m,n \rightarrow \infty} (\ln m / \ln n) < \alpha/2 - 1$, то верно (2);

2) если $\liminf_{m,n \rightarrow \infty} (\ln m / \ln n) > \alpha/2 - 1$, то верно (4).

Доказательство. При данных условиях по теореме 1.9 из [10] имеет место асимптотическое соотношение

$$\bar{F}^{*n}(u) = \bar{\Phi}(n^{-1/2}u)(1 + o(1)) + n\bar{F}(u)(1 + o(1)), \quad u \geq n^{1/2}, \quad (5)$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

Пусть выполнено условие в 1). Положим $u_{m,n} = n^{1/2}(b_m + x/a_m)$, тогда $u_{m,n} \sim (2n \ln m)^{1/2}$, и $n\bar{F}(u_{m,n}) = o(\bar{\Phi}(u_{m,n}/n^{1/2}))$, $m, n \rightarrow \infty$. При этом условии из (5) следует (2).

Пусть выполнено условие в 2). Положим $u_{m,n} = c_{mn}x$, $x > 0$, тогда $u_{m,n} \sim x(mn)^{1/\alpha} L^*(mn)$, и $\bar{\Phi}(u_{m,n}/n^{1/2}) = o(n\bar{F}(u_{m,n}))$, $m, n \rightarrow \infty$. При этом условии из (5) получаем (3), откуда следует (4).

З а м е ч а н и е 1. Условие $E|X_{ij}|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$ заведомо выполняется при $\alpha > 2$, если $F(-x)/\bar{F}(x) \rightarrow r \geq 0$, $x \rightarrow \infty$. Последнее верно, например, когда случайные величины ограничены снизу ($r = 0$), что имеет место, если мы рассматриваем времена, как в [3] (нормированные средним и дисперсией).

З а м е ч а н и е 2. В случае степенных хвостов условие 2) удастся ослабить до $m/\{n^{\alpha/2-1}(\ln n)^{\alpha/2}\} \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е 3. Теорема 1 обеспечивает устойчивость сходимости: в любом случае имеет место сходимость к одному предельному закону с единой линейной нормировкой. Теорема 2, напротив, показывает неустойчивость: в зависимости от характера относительного роста $m, n \rightarrow \infty$ возможна сходимость к двум различным предельным законам (при соответствующих различных нормировках).

Как известно еще из [5], класс субэкспоненциальных распределений помимо распределений с правильно меняющимися хвостами включает в себя и некоторые распределения, чьи хвосты убывают быстрее любой степени (хотя и медленнее экспоненты, что дало название всему классу), в частности, распределение Вейбулла с показателем меньше единицы.

Рассмотрим случай распределений с «вейбулловскими» хвостами:

$$\bar{F}(x) \sim \exp \left\{ - \left(\frac{x}{c} \right)^\beta \right\}, \quad x \rightarrow \infty, \quad 0 < \beta < 1, \quad c > 0. \quad (6)$$

Для таких распределений имеет место предел

$$\bar{F} \left(b_k^* + \frac{x}{a_k^*} \right) \rightarrow e^{-x}, \quad k \rightarrow \infty, \quad (7)$$

где $a_k^* = \beta(\ln k)^{1-1/\beta}/c$, $b_k^* = c(\ln k)^{1/\beta}$, $k > 1$.

Если для $u_{m,n} = b_{mn}^* + x/a_{mn}^*$ окажется выполненным (3), то из (7) будет следовать

$$\mathbf{P} \left\{ a_{mn}^* (Y_{mn} - b_{mn}^*) \leq x \right\} \rightarrow \exp \{ -e^{-x} \}. \quad (8)$$

Как отмечено в [10], достаточное условие выполнения (3) в этом случае имеет вид $u > \rho(n)n^{1/(2(1-\beta))}$, где $\rho(n)$ — некоторая функция, медленно стремящаяся к бесконечности при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 3. Если выполнено (6) и

$$\liminf_{m,n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln m}{\ln n} > \frac{\beta}{2(1-\beta)},$$

то верно (8).

Доказательство. Из условия теоремы следует существование $\varepsilon > 0$ такого, что при всех достаточно больших m, n верно $\ln m > n^{(1+\varepsilon)\beta/(2(1-\beta))}$. Положим $u_{m,n} = b_{mn}^* + x/a_{mn}^*$, тогда $u_{m,n} \sim c(\ln m)^{1/\beta}$, поскольку $\ln n = o(\ln m)$, и при всех достаточно больших m, n верно $u_{m,n} > p(\ln m)^{1/\beta}$, где $0 < p < c$. Отсюда при всех достаточно больших m, n получаем $u_{m,n} > pn^{(1+\varepsilon)/(2(1-\beta))} > \rho(n)n^{1/(2(1-\beta))}$, что и доказывает теорему.

Замечание 4. Распределения типа (6), если их левые хвосты также убывают быстрее любой степени, имеют моменты любого порядка, так что по теореме 1 из [2] для них верно (2) при $m = O(n^s)$ с любым $s < \infty$. Ситуация в каком-то смысле обратная той, что в теореме 2: предельный закон здесь один (Гумбеля), но при различном характере относительного роста $m, n \rightarrow \infty$ требуется различная линейная нормировка. Вопрос о том, что происходит в промежуточной зоне, остается открытым для дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивченко Г. И. Вариационный ряд для схемы суммирования независимых величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. 18, в. 3, с. 557–570.
2. Лебедев А. В. Предельные теоремы для максимумов независимых случайных сумм. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 3, с. 631–634.
3. Kang S., Serfozo R. F. Extreme values of phase-type and mixed random variables with parallel-processing examples. — J. Appl. Probab., 1999, v. 36, № 1, p. 194–210.
4. Мацак И. К. Об относительной устойчивости экстремальных случайных функций. — Матем. заметки, 2002, т. 71, № 5, с. 787–790.
5. Чистяков В. П. Теорема о суммах независимых положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам. — Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, в. 4, с. 710–718.
6. Рогозин Б. А. О постоянной в определении субэкспоненциальных распределений. — Теория вероятн. и ее примен., 1999, т. 44, в. 2, с. 455–458.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
8. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 142 с.

9. Ткачук С. Г. Теорема о больших уклонениях в $\mathbf{R}^s$ в случае устойчивого предельного закона. — Случайные процессы и статистические выводы. Ташкент: Фан, 1974, в. 4, с. 178–184.
10. Nagaev S. V. Large deviations of sums of independent random variables. — Ann. Probab., 1979, v. 7, № 5, p. 745–789.

Поступила в редакцию
17.III.2003

© 2004 г.

НАГАЕВ С. В.*

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ АВТОНОРМИРОВАННОЙ СУММЫ¹⁾

В работе выведены экспоненциальные оценки для вероятностей больших уклонений автонормированной суммы независимых случайных величин. При этом не предполагается, что слагаемые одинаково распределены.

Ключевые слова и фразы: неравенство Берри–Эссеена, отношение Ляпунова, автонормированная сумма, большие уклонения.

1. Введение. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Обозначим $b_j^2 = \mathbf{E}X_j^2$, $B_n^2 = \sum_{j=1}^n b_j^2$, $\beta_{3,j} = \mathbf{E}|X_j|^3$, $C_n = \sum_{j=1}^n \beta_{3,j}$, $L_n = C_n/B_n^3$.

Положим $V_n^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Целью настоящей работы является изучение больших уклонений автонормированной суммы S_n/V_n , точнее вывод верхних оценок для вероятности $\mathbf{P}\{S_n > V_n x\}$ с явно вычисленными постоянными.

Автонормированные суммы изучаются уже давно (см., например, [1]), однако в основном с асимптотической точки зрения и для одинаково распределенных слагаемых (подробную библиографию см., например, в [2]). К.-М. Шао [3] показал, что если $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и конечной дисперсией, то для любого $2 \leq x \leq n^{1/2}/2$

$$\mathbf{P}\{S_n > x V_n\} \leq (1 + x^{-1}) \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} + A x^2 \Delta_{n,x}\right),$$

где A — абсолютная постоянная,

$$\Delta_{n,x} = \mathbf{E}X^2 I\left(|X| > \frac{\sqrt{n}}{x}\right) + \frac{x}{\sqrt{n}} \mathbf{E}|X|^3 I\left(|X| \leq \frac{\sqrt{n}}{x}\right).$$

Значение постоянной A явно не вычисляется.

К. Ван и Б.-И. Джин [4] вывели неравномерную экспоненциальную оценку Берри–Эссеена для разности

$$\delta_n(x) = \mathbf{P}\{S_n < x V_n\} - \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона.

С другой стороны, Э. Жине, Ф. Гётце и Д. М. Мейсон [5] доказали, что

$$\mathbf{E} \exp\left\{\frac{(S_n/V_n)^2}{4(1+4e/3)^2 M_n}\right\} \leq 2 \quad \text{и} \quad \mathbf{E} \exp\left\{t \left|\frac{S_n}{V_n}\right|\right\} \leq \exp\left\{\left(1 + \frac{4e}{3}\right) M_n^2 t^2\right\}$$

* Институт математики им. С. Л. Соболева, 630090 Новосибирск-90, Россия; e-mail: nagaev@math.nsk.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00493), а также INTAS (грант № 99-01317).