Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Нагаев, О больших отклонениях автономизированной суммы, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 4, 794–802

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp197>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:19:50

9. Ткачук С. Г. Теорема о больших отклонениях в $\mathbf{R}^s$ в случае устойчивого предельного закона. — Случайные процессы и статистические выводы. Ташкент: Фан, 1974, в. 4, с. 178–184.
10. Nagaev S. V. Large deviations of sums of independent random variables. — Ann. Probab., 1979, v. 7, № 5, p. 745–789.

Поступила в редакцию
17.III.2003

© 2004 г.

НАГАЕВ С. В.*

О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ АВТОНОРМИРОВАННОЙ СУММЫ¹⁾

В работе выведены экспоненциальные оценки для вероятностей больших отклонений автонормированной суммы независимых случайных величин. При этом не предполагается, что слагаемые одинаково распределены.

Ключевые слова и фразы: неравенство Берри–Эссеена, отношение Ляпунова, автонормированная сумма, большие отклонения.

1. Введение. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Обозначим $b_j^2 = \mathbf{E}X_j^2$, $B_n^2 = \sum_{j=1}^n b_j^2$, $\beta_{3,j} = \mathbf{E}|X_j|^3$, $C_n = \sum_{j=1}^n \beta_{3,j}$, $L_n = C_n/B_n^3$.

Положим $V_n^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Целью настоящей работы является изучение больших отклонений автонормированной суммы S_n/V_n , точнее вывод верхних оценок для вероятности $\mathbf{P}\{S_n > V_n x\}$ с явно вычисленными постоянными.

Автонормированные суммы изучаются уже давно (см., например, [1]), однако в основном с асимптотической точки зрения и для одинаково распределенных слагаемых (подробную библиографию см., например, в [2]). К.-М. Шао [3] показал, что если $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и конечной дисперсией, то для любого $2 \leq x \leq n^{1/2}/2$

$$\mathbf{P}\{S_n > x V_n\} \leq (1 + x^{-1}) \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} + A x^2 \Delta_{n,x}\right),$$

где A — абсолютная постоянная,

$$\Delta_{n,x} = \mathbf{E}X^2 I\left(|X| > \frac{\sqrt{n}}{x}\right) + \frac{x}{\sqrt{n}} \mathbf{E}|X|^3 I\left(|X| \leq \frac{\sqrt{n}}{x}\right).$$

Значение постоянной A явно не вычисляется.

К. Ван и Б.-И. Джин [4] вывели неравномерную экспоненциальную оценку Берри–Эссеена для разности

$$\delta_n(x) = \mathbf{P}\{S_n < x V_n\} - \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона.

С другой стороны, Э. Жине, Ф. Гётце и Д. М. Мейсон [5] доказали, что

$$\mathbf{E} \exp\left\{\frac{(S_n/V_n)^2}{4(1+4e/3)^2 M_n}\right\} \leq 2 \quad \text{и} \quad \mathbf{E} \exp\left\{t \left|\frac{S_n}{V_n}\right|\right\} \leq \exp\left\{\left(1 + \frac{4e}{3}\right) M_n^2 t^2\right\}$$

* Институт математики им. С. Л. Соболева, 630090 Новосибирск-90, Россия; e-mail: nagaev@math.nsk.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00493), а также INTAS (грант № 99-01317).

для всех $t > 0$, где $M_n := \max[1, \sup_{k \leq n} \mathbf{E}|S_k/V_k|]$. Второе из этих неравенств используется в [6] при выводе закона повторного логарифма для автономизированных сумм.

Если X_i симметричны, то $M_n = 1$. В общем случае постоянная M_n в работе [5] не оценивается.

Что касается неодинаково распределенных слагаемых, то в работе [7] была получена оценка

$$\mathbf{P}\{S_n > x(4B_n + V_n)\} \leq 24 \exp\left(-\frac{x^2}{1152}\right) \quad (1)$$

в предположении, что $\mathbf{E}X_j = 0$.

Сформулируем теперь наши основные результаты.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{E}X_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, и $C_n < \infty$. Тогда для всех $x > 0$ и любого натурального l

$$\mathbf{P}\{S_n > xV_n\} < \left(\frac{x^2}{4l \ln 2} + l\right) \exp\left(-\frac{x^2}{4}(1 - 2^{3l/2+2} c_0 L_n x)\right) + \exp\left(-\frac{c(l)}{L_n^2}\right), \quad (2)$$

где $c_0 = (e^{1/2}/6 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}) \approx 1.1285$, $c(l) = \frac{8}{27}(1 - 2^{-l})^3$.

Заметим, что полученная оценка нетривиальна лишь при выполнении условия $x < (2^{3l/2+2} c_0 L_n)^{-1}$. Если X_i одинаково распределены, то это условие записывается следующим образом:

$$x < \gamma_0 \frac{\sigma^3}{\beta_3} \sqrt{n},$$

где $\beta_3 = \mathbf{E}|X_1|^3$, $\gamma_0 = (2^{3l/2+2} c_0)^{-1}$.

С другой стороны, $|S_n| \leq \sqrt{n}V_n$, т.е. $\mathbf{P}\{S_n > xV_n\} = 0$ для $x > \sqrt{n}$. Следовательно, оценка (2) не покрывает лишь зону между $\gamma_0 \sigma^3 \sqrt{n}/\beta_3$ и $\sqrt{n}$.

В неравенство (2) в отличие от соответствующего неравенства Нагаева–Фука, содержащего нормальную компоненту (см., например, [8]), не входит сумма вероятностей $\sum_1^n \mathbf{P}\{X_i > y\}$ и поправочный член $(A_t/x^t)^{x/y}$, где A_t — сумма абсолютных моментов порядка t . По форме неравенство (2) наиболее близко к нижней оценке для вероятностей больших отклонений сумм независимых случайных величин, выведенной в статье [9].

Следующий результат дополняет оценку (2).

Теорема 2. Пусть $\mathbf{E}X_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, и $C_n < \infty$. Тогда для $x \geq \gamma_0/L_n$ и любого натурального l

$$\mathbf{P}\{S_n > xV_n\} \leq \left(\frac{\gamma_0 x}{8L_n \ln 2} + l + 2\right) \exp\left(-\frac{\gamma_0 x}{8L_n}\right) + \exp\left(-\frac{c(l)}{L_n^2}\right), \quad (3)$$

где второе слагаемое такое же, как и в неравенстве (2).

По форме неравенства (2) и (3) близки к неравенствам Бернштейна и Петрова (см., например, [10, гл. 3, § 4, теоремы 16 и 18]), однако, и это следует подчеркнуть особо, они не требуют никаких ограничений на моменты выше третьего.

Из неравенства (3) с очевидностью следует, что существует константа c такая, что

$$\mathbf{P}\{S_n > xV_n\} < \exp\left(-\frac{c}{L_n^2}\right) \quad (4)$$

при $\gamma_0/L_n \leq x \leq \sqrt{n}$. Следующий пример показывает, что в неравенстве (4) нельзя заменить L_n^{-2} на n .

П р и м е р. Пусть $X, X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{P}\{X = 1\} = 1 - p$, $\mathbf{P}\{X = (p-1)/p\} = p$. Оценим величину $\mathbf{P}\{S_n = \sqrt{n}V_n\}$. Несложно видеть, что

$$\mathbf{P}\{S_n = \sqrt{n}V_n\} = \mathbf{P}^n\{X = 1\} = (1-p)^n.$$

Заметим, что при $p < \frac{1}{2}$

$$(1-p)^n > \exp\left(-\frac{3}{2}np\right).$$

Подсчитаем теперь ляпуновское отношение $\mathbf{E}|X|^3/(\mathbf{E}X^2)^{3/2}$. Очевидно,

$$\mathbf{E}X^2 = \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 p + 1 - p = \frac{1-p}{p}.$$

Далее, $\mathbf{E}|X|^3 = ((1-p)/p)^3 p + 1 - p = (1-p)/p^2 (1-2p+2p^2)$. Поэтому

$$\frac{\mathbf{E}|X|^3}{(\mathbf{E}X^2)^{3/2}} = \frac{1-2p+2p^2}{\sqrt{p(1-p)}}.$$

Следовательно,

$$np = L_n^{-2} \frac{(1-2p+2p^2)^2}{1-p}.$$

В результате имеем

$$\mathbf{P}\{S_n = \sqrt{n} V_n\} > \exp\left(-\frac{c(p)}{L_n^2}\right),$$

где $c(p) = 3(1-2p+2p^2)^2/(2(1-p))$.

Конечно, возникает вопрос, насколько точны оценки (2) и (3). Ниже в виде небольшой таблицы приведены приближенные значения постоянных, участвующих в теоремах 1 и 2, для значений $l = 1, 2, 3$.

Таблица 1.

l	$c_1(l)$	$c_2(l)$	$c_3(l)$	$\gamma_0(l)$
1	12.765713	0.001236	0.009792	0.078335
2	36.106889	0.008673	0.003462	0.027696
3	102.125703	0.015687	0.001224	0.009792

Здесь $c_1(l) = 2^{3l/2+2} c_0$, $c_3(l) = \gamma_0(l)/8$. В качестве $c_2(l)$ берется $c(l)$.

В таблице 2 приведены значения оценок (2) и (3) для $l = 1$, вычисленные с помощью предыдущей таблицы. Значения выше разделительной линии соответствуют оценке (2), а ниже этой линии — оценке (3). Вычисления произведены с точностью до 10^{-6} .

Таблица 2.

$x \backslash L_n^{-2}$	3000	10000	15000	20000	25000
1	2.774351	2.702184	2.686403	2.677039	2.670668
2	2.605084	2.109839	2.013257	1.957800	1.920833
3	3.175261	1.558555	1.330579	1.210873	1.135424
4	<u>6.692966</u>	1.238906	0.851605	0.681067	0.584738
5	0.470326	1.253775	0.602907	0.389676	0.289301
6	0.306102	1.946563	0.549310	0.258392	0.154439
7	0.197178	<u>5.623631</u>	0.754240	0.227715	0.100565
8	0.125940	0.005672	1.830928	0.306398	0.090459
9	0.079870	0.002341	<u>9.219483</u>	0.723213	0.127314
10	0.050347	0.000959	0.000126	3.439368	0.317432
11	0.031572	0.000390	0.000041	<u>37.83</u>	1.586743
12	0.019709	0.000158	0.000013	0.000002	<u>17.99</u>
13	0.012255	0.000063	0.000004	0.000000	0.000000
14	0.007593	0.000025	0.000001	0.000000	0.000000
15	0.004690	0.000010	0.000000	0.000000	0.000000
16	0.002889	0.000004	0.000000	0.000000	0.000000
17	0.001775	0.000002	0.000000	0.000000	0.000000
18	0.001088	0.000001	0.000000	0.000000	0.000000
19	0.000665	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
20	0.000406	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Таблица 2 (продолжение).

$x \backslash L_n^{-2}$	30000	40000	100000	1000000
1	2.665975	2.659401	2.643847	2.625663
2	1.893994	1.856952	1.771825	1.676647
3	1.082763	1.012938	0.864572	0.717582
4	0.522484	0.446118	0.306486	0.197051
5	0.232202	0.170543	0.081922	0.034572
6	0.105623	0.061966	0.017454	0.003931
7	0.055009	0.023586	0.003154	0.000296
8	0.036758	0.010384	0.000515	0.000015
9	0.035319	0.005839	0.000081	0.000001
10	0.054673	0.004629	0.000013	0.000000
11	0.152681	0.005710	0.000002	0.000000
12	0.860999	0.012083	0.000000	0.000000
13	<u>10.98</u>	0.048362	0.000000	0.000000
14	0.000000	0.403527	0.000000	0.000000
15	0.000000	<u>7.733759</u>	0.000000	0.000000
16	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
17	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
18	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
19	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
20	0.000000	0.000000	0.000001	0.000000

Мы видим, что оценка (2) дает приемлемый результат только при очень малых значениях L_n . При больших значениях x происходит стабилизация значений, поскольку основную роль начинает играть второе слагаемое оценки (3), которое не зависит от x .

Заметим, что первое слагаемое в правой части неравенства (2) не может быть меньше 0.66 ни при каких значениях L_n , если $x = 3$.

Посмотрим, что получится, если убрать неприятный множитель перед экспонентой и заменить $x^2/4$ на $x^2/2$ и $2^{3l/2+2}$ на 1. Тогда первое слагаемое в (2) не превосходит

$$P(x, L_n) \equiv \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} (1 - c_0 L_n x) \right\}.$$

При $x = 3$ и $L_n < 1/(10c_0)$ мы получаем оценку

$$P(3, L_n) \leq \exp \left\{ -\frac{81}{20} \right\} \approx 0.017.$$

По-видимому, постоянные в теоремах 1 и 2 далеки от оптимальных и их можно уточнить, применив более тонкую технику. Этот вопрос требует дальнейших исследований.

Интересно сравнить полученные нами оценки с неравенством (1). Во-первых, оценка (1) нетривиальна при $x > 60.5$. Далее, для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \frac{S_n}{V_n} > x \left(4 \frac{B_n}{V_n} + 1 \right) \right\} &= \mathbf{P} \left\{ \frac{S_n}{V_n} > x \left(4 \frac{B_n}{V_n} + 1 \right), V_n < \varepsilon B_n \right\} \\ &+ \mathbf{P} \left\{ \frac{S_n}{V_n} > x \left(4 \frac{B_n}{V_n} + 1 \right), V_n \geq \varepsilon B_n \right\} = P_1 + P_2. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$P_2 > \mathbf{P} \left\{ \frac{S_n}{V_n} > x \left(\frac{4}{\varepsilon} + 1 \right), V_n \geq \varepsilon B_n \right\} > \mathbf{P} \left\{ \frac{S_n}{V_n} > x \left(\frac{4}{\varepsilon} + 1 \right) \right\} - \mathbf{P} \{ V_n < \varepsilon B_n \}.$$

В результате мы получаем неравенство

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{S_n}{V_n} > x \left(\frac{4}{\varepsilon} + 1 \right) \right\} < \mathbf{P} \{ S_n > x(4B_n + V_n) \} + \mathbf{P} \{ V_n < \varepsilon B_n \}.$$

Оценивая первое слагаемое в правой части с помощью (1), а второе с помощью леммы 3, имеем для $0 < \varepsilon < 1$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{V_n} > x\right\} < 24 \exp\left(-\frac{x^2 \varepsilon^2}{1152(4 + \varepsilon)^2}\right) + \exp\left(-\frac{8(1 - \varepsilon^2)^3}{27L_n^2}\right). \quad (5)$$

По форме это неравенство близко к (2). Разница заключается в том, что в первом слагаемом в показателе экспоненты отсутствует ляпуновское отношение. Из таблицы 2 следует, что неравенство (2) может давать нетривиальный результат при $x \leq 4$. Правда при этом ляпуновское отношение должно быть не больше 0.008165. В то же время неравенство (5) нетривиально лишь при $x > 60.5(4/\varepsilon + 1)$.

Рассмотрим теперь S_n^2/V_n^2 как случайное блуждание. Положим

$$\Delta_{n+1} = \frac{S_{n+1}^2}{V_{n+1}^2} - \frac{S_n^2}{V_n^2}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\Delta_{n+1} < \sup_{a, b, x} \left(\frac{(a+x)^2}{b^2 + x^2} - \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (6)$$

Найдем

$$\sup_x \frac{(a+x)^2}{b^2 + x^2}$$

для фиксированных a и b .

Очевидно,

$$\frac{d}{dx} \ln \frac{(a+x)^2}{b^2 + x^2} = \frac{2}{a+x} - \frac{2x}{b^2 + x^2} = \frac{2(b^2 - ax)}{(a+x)(b^2 + x^2)}.$$

Значит,

$$\sup_x \frac{(a+x)^2}{b^2 + x^2} = 1 + \frac{a^2}{b^2}.$$

Возвращаясь к (6), видим, что $\Delta_{n+1} \leq 1$.

Легко заметить, что

$$\Delta_{n+1} = \frac{2X_{n+1}S_n}{V_n^2} + \left(1 - \frac{S_{n+1}^2}{V_{n+1}^2}\right) \frac{X_{n+1}^2}{V_n^2} \leq \frac{2X_{n+1}S_n}{V_n^2} + \frac{X_{n+1}^2}{V_n^2}.$$

Следовательно, случайное блуждание S_n^2/V_n^2 мажорируется некоторым субмартингалом.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Для произвольных случайных величин X и Y и всех $h > 0$, $x > 0$ и $y > 0$

$$\mathbf{P}\{X \geq x, Y^2 \leq y^2\} \leq e^{h^2 y^2 - hx} \mathbf{E} e^{hX - h^2 Y^2}.$$

Доказательство. Требуемая оценка следует из неравенства

$$\mathbf{E}\{e^{hX - h^2 Y^2}; X \geq x, Y^2 \leq y^2\} \geq e^{hx - h^2 y^2} \mathbf{P}\{X \geq x, Y^2 \leq y^2\}. \quad (7)$$

Лемма 2. Для произвольной случайной величины X с $\mathbf{E}X = 0$ и любого $h > 0$

$$\mathbf{E} e^{hX - h^2 X^2/2} \leq 1 + c_0 \beta_3 h^3, \quad (8)$$

где $c_0 = (e^{1/2}/6 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2})$, $\beta_3 = \mathbf{E}|X|^3$.

Доказательство. Раскладывая e^{hX} в ряд Тейлора, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp \left\{ hX - \frac{h^2 X^2}{2} \right\} &= \mathbf{E} e^{-h^2 X^2/2} + h \mathbf{E} X e^{-h^2 X^2/2} + \frac{h^2}{2} \mathbf{E} X^2 e^{-h^2 X^2/2} \\ &\quad + \mathbf{E} \left(e^{hX} - 1 - hX - \frac{h^2 X^2}{2} \right) e^{-h^2 X^2/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Очевидно,

$$\mathbf{E}e^{-h^2 X^2/2} = 1 - \sigma^2 \frac{h^2}{2} + \mathbf{E}\left(e^{-h^2 X^2/2} - 1 + \frac{h^2 X^2}{2}\right), \quad (10)$$

где $\sigma^2 = \mathbf{E}X^2$. Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(e^{-h^2 X^2/2} - 1 + \frac{h^2 X^2}{2}\right) &= \mathbf{E}\left\{e^{-h^2 X^2/2} - 1 + \frac{h^2 X^2}{2}; \frac{h^2 X^2}{2} \leq 1\right\} \\ &\quad + \mathbf{E}\left\{e^{-h^2 X^2/2} - 1 + \frac{h^2 X^2}{2}; \frac{h^2 X^2}{2} > 1\right\} \equiv E_1 + E_2. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} E_1 &\leq \frac{h^4}{8} \mathbf{E}\left\{X^4; \frac{h^2 X^2}{2} \leq 1\right\} \leq \frac{h^3}{4\sqrt{2}} \mathbf{E}\left\{|X|^3; \frac{h^2 X^2}{2} \leq 1\right\}, \\ E_2 &\leq \frac{h^2}{2} \mathbf{E}\left\{X^2; \frac{h^2 X^2}{2} > 1\right\} < \frac{h^3}{2\sqrt{2}} \mathbf{E}\left\{|X|^3; \frac{h^2 X^2}{2} > 1\right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}\left(e^{-h^2 X^2/2} - 1 + \frac{h^2 X^2}{2}\right) < \frac{h^3}{2\sqrt{2}} \beta_3. \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что

$$\mathbf{E}e^{-h^2 X^2/2} = 1 - \frac{h^2}{2} + \theta \frac{h^3}{2\sqrt{2}} \beta_3, \quad |\theta| \leq 1. \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{E}X e^{-h^2 X^2/2} = \mathbf{E}X(e^{-h^2 X^2/2} - 1) = \theta \frac{\beta_3 h^3}{2}. \quad (13)$$

Далее,

$$\mathbf{E}X^2 e^{-hX^2} \leq \sigma^2. \quad (14)$$

Если $x > 0$, то

$$e^{hx} - 1 - hx - \frac{h^2 x^2}{2} < e^{hx} \frac{h^3 x^3}{6}.$$

Заметим, что $hx - h^2 x^2/2 \leq \frac{1}{2}$. Стало быть, для $x > 0$

$$\left(e^{hx} - 1 - hx - \frac{h^2 x^2}{2}\right) e^{-h^2 x^2/2} \leq e^{hx - h^2 x^2/2} \frac{h^3 x^3}{6} \leq \frac{e^{1/2}}{6} h^3 x^3.$$

Для $x \leq 0$

$$\left(e^{hx} - 1 - hx - \frac{h^2 x^2}{2}\right) e^{-h^2 x^2/2} \leq \frac{h^3 |x|^3}{6}.$$

Значит,

$$\mathbf{E}\left(e^{hX} - 1 - hX - \frac{h^2 X^2}{2}\right) e^{-h^2 X^2/2} \leq \frac{e^{1/2}}{6} h^3 \beta_3. \quad (15)$$

Комбинируя (9) и (12)–(15), получаем требуемый результат.

З а м е ч а н и е. Неравенство типа (8) с постоянной $c_0 = 28.462$ можно получить из леммы 1 в работе [3].

Лемма 3. Для всех $0 < \varepsilon < 1$

$$\mathbf{P}\left\{\sum_1^n X_i^2 < B_n^2 \varepsilon\right\} \leq \exp\left(-\frac{8(1-\varepsilon)^3}{27L_n^2}\right). \quad (16)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что для любой случайной величины X

$$\mathbf{E}e^{-hX^2} = 1 - hb^2 + \mathbf{E}(e^{-hX^2} - 1 + hX^2).$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{-hX^2} - 1 + hX^2) &= \mathbf{E}(e^{-hX^2} - 1 + hX^2; hX^2 \leq \sqrt{2}) \\ &\quad + \mathbf{E}(e^{-hX^2} - 1 + hX^2; hX^2 > \sqrt{2}) = E_1 + E_2. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} E_1 &< \frac{h^2}{2} \mathbf{E}(X^4; hX^2 \leq \sqrt{2}) \leq \frac{h^{3/2}}{\sqrt{2}} \mathbf{E}(|X|^3; hX^2 \leq \sqrt{2}), \\ E_2 &< h \mathbf{E}(X^2; hX^2 > \sqrt{2}) \leq \frac{h^{3/2}}{\sqrt{2}} \mathbf{E}(|X|^3; hX^2 \leq \sqrt{2}), \end{aligned}$$

мы приходим к неравенству

$$\mathbf{E}e^{-hX^2} \leq 1 - b^2h + \frac{\beta_3}{\sqrt{2}} h^{3/2}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\left\{\sum_1^n X_i^2 < x\right\} < e^{hx} \prod_1^n \mathbf{E}e^{-hX_i^2} < \exp\left((x - B_n^2)h + \frac{C_n}{\sqrt{2}} h^{3/2}\right).$$

При $x < B_n^2$

$$\min_h \left((x - B_n^2)h + \frac{C_n}{\sqrt{2}} h^{3/2} \right)$$

достигается в точке h_0 , удовлетворяющей уравнению

$$(x - B_n^2) + \frac{3}{2\sqrt{2}} C_n h^{1/2} = 0.$$

Очевидно,

$$h_0^{1/2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{B_n^2 - x}{C_n}.$$

В результате мы получаем оценку

$$\mathbf{P}\left\{\sum_1^n X_i^2 < x\right\} < \exp\left(-\frac{8(B_n^2 - x)^3}{27C_n^2}\right).$$

Полагая в этом неравенстве $x = \varepsilon B_n^2$, получаем желаемый результат.

3. Доказательство теоремы 1. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_n > V_n x; y^2 \leq V_n^2 < 2y^2\} &\leq \mathbf{P}\{S_n > xy; y^2 \leq V_n^2 < 2y^2\} \\ &\leq \mathbf{P}\{S_n > xy; V_n^2 < 2y^2\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Полагая в лемме 1 $X = S_n$, $Y^2 = V_n^2/2$, заключаем, что

$$\mathbf{P}\{S_n > xy; V_n^2 < 2y^2\} \leq \exp(-hxy + y^2 h^2) \mathbf{E} \exp\left(S_n h - \frac{V_n^2 h^2}{2}\right). \quad (18)$$

Заметим, что $\min_h (y^2 h^2 - hxy)$ достигается при $h = x/(2y)$.

Полагая $h = x/(2y)$, имеем

$$\min_h (y^2 h^2 - hxy) = -\frac{x^2}{4}. \quad (19)$$

Применяя лемму 2, получаем

$$\mathbf{E} \exp\left(S_n h - \frac{V_n^2 h^2}{2}\right) = \prod_1^n \mathbf{E} \exp\left(hX_i - \frac{h^2 X_i^2}{2}\right) < \prod_1^n (1 + c_0 \beta_{3,i} h^3) < \exp(c_0 C_n h^3). \quad (20)$$

Из (18)–(20) следует, что

$$\mathbf{P}\{S_n > xy; V_n^2 < 2y^2\} \leq \exp\left(-\frac{x^2}{4} + c_0 C_n \left(\frac{x}{2y}\right)^3\right). \quad (21)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_n > V_n x; V_n^2 \geq 2^{-l} B_n^2\} &= \sum_{k=1-l}^N \mathbf{P}\{S_n > V_n x; 2^{k-1} B_n^2 \leq V_n^2 < 2^k B_n^2\} \\ &+ \mathbf{P}\{S_n > V_n x; V_n^2 \geq 2^N B_n^2\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Полагая $y^2 = 2^{k-1} B_n^2$ в (21), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_n > V_n x; 2^{k-1} B_n^2 \leq V_n^2 < 2^k B_n^2\} &\leq \mathbf{P}\{S_n > 2^{(k-1)/2} B_n x; V_n^2 < 2^k B_n^2\} \\ &\leq \exp\left(-\frac{x^2}{4} + c_0 C_n \left(\frac{x}{2^{(k-1)/2} B_n}\right)^3\right). \end{aligned} \quad (23)$$

По неравенству Маркова

$$\mathbf{P}\{S_n > V_n x; V_n^2 \geq 2^N B_n^2\} \leq \mathbf{P}\{V_n^2 \geq 2^N B_n^2\} \leq 2^{-N}.$$

Пусть N удовлетворяет условию

$$2^N \leq e^{x^2/4} < 2^{N+1}.$$

Тогда

$$2^{-N} < 2e^{-x^2/4}, \quad N \leq \frac{x^2}{4 \ln 2}. \quad (24)$$

В результате имеем

$$\mathbf{P}\{S_n > V_n x; V_n^2 \geq 2^N B_n^2\} < 2e^{-x^2/4}. \quad (25)$$

Из (22)–(25) следует, что

$$\mathbf{P}\{S_n > V_n x; V_n^2 > 2^{-l} B_n^2\} < \left(\frac{x^2}{4 \ln 2} + l\right) \exp\left(-\frac{x^2}{4} (1 - 2^{2+3l/2} c_0 L_n x)\right). \quad (26)$$

Теперь рассмотрим случай $V_n^2 \leq 2^{-l} B_n^2$. В силу леммы 3

$$\mathbf{P}\{S_n > V_n x; V_n^2 \leq 2^{-l} B_n^2\} < \mathbf{P}\{V_n^2 \leq 2^{-l} B_n^2\} \leq \exp\left\{-\frac{8}{27} (1 - 2^{-l})^3 L_n^{-2}\right\}. \quad (27)$$

Комбинируя (26) и (27), получаем неравенство (2).

4. Доказательство теоремы 2. По (18) и (20)

$$\mathbf{P}\{S_n > xy; V_n < 2y^2\} \leq \exp(-hxy + y^2 h^2 + c_0 C_n h^3).$$

Следовательно, полагая $y^2 = 2^{k-1} B_n^2$ и $h = \gamma_0 / (2y L_n)$, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_n > x V_n; 2^{k-1} B_n^2 \leq V_n^2 < 2^k B_n^2\} &\leq \mathbf{P}\{S_n > x^{(k-1)/2} B_n; V_n^2 < 2^k B_n^2\} \\ &\leq \exp\left(-\frac{x \gamma_0}{2 L_n} + \frac{\gamma_0^2}{4 L_n^2} + c_0 C_n \left(\frac{\gamma_0}{2^{(k+1)/2} L_n B_n}\right)^3\right). \end{aligned} \quad (28)$$

Для $k \geq 1 - l$

$$\frac{c_0 \gamma_0}{2^{3(k+1)/2}} < \frac{1}{8}.$$

Следовательно,

$$c_0 C_n \left(\frac{\gamma_0}{2^{(k+1)/2} L_n B_n}\right)^3 < \frac{\gamma_0^2}{8 L_n^2}. \quad (29)$$

Если $x > \gamma_0 L_n^{-1}$, то

$$x \gamma_0 L_n^{-1} > \gamma_0^2 L_n^{-2}. \quad (30)$$

Из (28)–(30) вытекает, что для $x > \gamma_0 L_n^{-1}$

$$\mathbf{P}\{S_n > xV_n, 2^{k-1}B_n^2 \leq V_n^2 < 2^k B_n^2\} \leq \exp\left(-\frac{\gamma_0 x}{8L_n}\right). \quad (31)$$

Пусть N таково, что

$$2^N \leq \exp\left(\frac{\gamma_0 x}{8L_n}\right) < 2^{N+1}.$$

Тогда

$$2^{-N-1} < \exp\left(-\frac{\gamma_0 x}{8L_n}\right), \quad (32)$$

$$N \leq \frac{\gamma_0 x}{8L_n \ln 2}. \quad (33)$$

Используя (32) и неравенство Маркова, получаем

$$\mathbf{P}\{S_n > xV_n; V_n^2 > 2^N B_n^2\} < \mathbf{P}\{V_n^2 > 2^N B_n^2\} < 2 \exp\left(-\frac{\gamma_0 x}{8L_n}\right). \quad (34)$$

С другой стороны, по (31) и (33)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1-l}^N \mathbf{P}\{S_n > xV_n; 2^{k-1}B_n^2 \leq V_n^2 < 2^k B_n^2\} &< (N+l) \exp\left(-\frac{\gamma_0 x}{8L_n}\right) \\ &< \left(\frac{\gamma_0 x}{8L_n \ln 2} + l\right) \exp\left(-\frac{\gamma_0 x}{8L_n}\right). \end{aligned} \quad (35)$$

Комбинируя (22), (27), (34), (35), приходим к оценке (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Logan B. F., Mallows C. L., Rice S. O., Shepp L. A. Limit distributions of self-normalized sums. — Ann. Probab., 1973, v. 1, № 5, p. 788–809.
2. Bentkus V., Götze F. The Berry–Esseen bounds for Student's statistic. — Ann. Probab., 1996, v. 24, № 1, p. 491–503.
3. Shao Q.-M. A Cramér type large deviation result for Student's t -statistic. — J. Theoret. Probab., 1999, v. 12, № 2, p. 385–398.
4. Wang Q., Jing B.-Y. An exponential nonuniform Berry–Esseen bound for self-normalized sums. — Ann. Probab., 1999, v. 27, № 4, p. 2068–2088.
5. Giné E., Götze F., Mason D. M. When is the Student t -statistic asymptotically standard normal? — Ann. Probab., 1997, v. 25, № 3, p. 1514–1531.
6. Giné E., Mason D. M. On the LIL for self-normalized sums of IID random variables. — J. Theoret. Probab., 1998, v. 11, № 2, p. 351–370.
7. He X., Shao Q.-M. On parameters of increasing dimensions. — J. Multivariate Anal., 2000, v. 73, № 1, p. 120–135.
8. Нагаев С. В. Некоторые уточнения вероятностных и моментных неравенств. — Теория вероятн. и ее примен., 1997, т. 42, в. 4, с. 832–838.
9. Нагаев С. В. Нижние оценки для вероятностей больших отклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 2001, т. 46, в. 1, с. 50–74.
10. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 320 с.