Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Розовский, О точной асимптотике в слабом законе больших чисел для сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения устойчивого закона. II, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2004, том 49, выпуск 4, 803–813

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp198>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:07:07

© 2004 г.

РОЗОВСКИЙ Л. В.*

О ТОЧНОЙ АСИМПТОТИКЕ В СЛАБОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ОБЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗ ОБЛАСТИ ПРЯТЯЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО ЗАКОНА. II¹⁾

Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1, X_2, \dots$ такие, что

$$U_n = \frac{1}{B_n} S_n - n a_n \rightarrow \xi_\alpha \quad \text{по вероятности при } n \rightarrow \infty,$$

где $S_n = X_1 + \dots + X_n$ и $B_n > 0$, a_n — некоторые числа ($n \geq 1$), а случайная величина ξ_α имеет некоторое устойчивое распределение с характеристическим показателем $\alpha \in [1, 2]$, причем при $\alpha \neq 2$ предполагается, что правый хвост распределения ξ_α убывает быстрее его левого хвоста.

Целью работы является нахождение условий, при которых

$$\sum_n f_n \mathbf{P}\{U_n \geq \varepsilon \varphi_n\} \sim \sum_n f_n \mathbf{P}\{\xi_\alpha \geq \varepsilon \varphi_n\}, \quad \varepsilon \searrow 0,$$

где φ_n — положительная последовательность, монотонно растущая к бесконечности и удовлетворяющая некоторым дополнительным ограничениям, а f_n — неотрицательная последовательность такая, что $\sum_n f_n = \infty$.

Ключевые слова и фразы: независимые случайные величины, закон больших чисел, устойчивый закон.

1. Введение. Результаты. Рассмотрим независимые случайные величины $X, X_1, X_2, \dots$ с общей функцией распределения F . Положим $S_n = X_1 + \dots + X_n$ ($n \geq 1$).

Будем предполагать, что F принадлежит области притяжения некоторого невырожденного устойчивого распределения F_α с характеристическим показателем α , т.е. при подходящих a_n и $B_n > 0$ выполняется условие

$$U_n = \frac{1}{B_n} S_n - n a_n \rightarrow \xi_\alpha \quad \text{по вероятности при } n \rightarrow \infty, \quad (1.1)$$

где случайная величина ξ_α имеет распределение F_α .

Так же, как в [8], нас интересуют условия, при которых

$$S(\varepsilon) = \sum_{n \geq 1} f_n \mathbf{P}\{U_n \geq \varepsilon \varphi_n\} \sim \sum_{n \geq 1} f_n \mathbf{P}\{\xi_\alpha \geq \varepsilon \varphi_n\}, \quad \varepsilon \searrow 0, \quad (1.2)$$

где числовые последовательности f_n, φ_n удовлетворяют условиям

$$f_n \geq 0, \quad \sum_{n \geq 1} f_n = \infty, \quad \varphi_n \nearrow \infty. \quad (1.3)$$

Однако, в отличие от [8], будет рассмотрен характеристический показатель $\alpha = 2$ (когда F_α является нормальным распределением), а также случай $1 \leq \alpha < 2$ в предположении, что правый хвост распределения F_α убывает быстрее левого:

$$l_\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - F_\alpha(x)}{F_\alpha(-x)} = 0.$$

* С.-Петербургская химико-фармацевтическая академия, кафедра высшей математики, ул. проф. Попова, 14, 197376 С.-Петербург, Россия; e-mail: l.rozovskii@mail.ru

¹⁾ Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования № E02-1.0-219, гранта РФФИ № 02-01-01099 и гранта НШ № 2258.2003.1.

Принимая во внимание то, что случай $l_\alpha > 0$ ($0 < \alpha < 2$) изучался в [8], и учитывая, что предел l_α всегда существует, а также то, что $F_\alpha(0) = 1$ без потери общности, если $l_\alpha = 0$ ($0 < \alpha < 1$), можно считать, что настоящая работа и [8] охватывают весь допустимый набор предельных устойчивых распределений F_α , при которых имеет смысл изучать соотношение (1.2).

Введем обозначения. Положим

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x), \quad \bar{F}_\alpha(x) = 1 - F_\alpha(x), \quad \psi_\alpha(\varepsilon) = \sum_{n \geq 1} f_n \bar{F}_\alpha(\varepsilon \varphi_n);$$

кроме того, для произвольной последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ будем использовать обозначение $\Delta \lambda_m = \lambda_{m+1} - \lambda_m$.

Сформулируем основной результат статьи, доказательство которого содержится в п. 2.

Предложение 1. *Предположим, что при некотором $\alpha \in [1, 2]$ выполняется условие (1.1), причем*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\bar{F}_\alpha(x)}{\bar{F}_\alpha(-x)} = 0 \quad \text{при } \alpha \neq 2. \quad (1.4)$$

Пусть f_n и φ_n удовлетворяют условию (1.3), а последовательность $b_n = B_n \varphi_n$ не убывает. Если

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_k} < \infty, \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi_k^\delta \sum_{n > k} f_n \varphi_n^{-\delta}}{\sum_{n=1}^k f_n} < \infty \quad (\exists \delta > 0) \quad (1.5)$$

и

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta b_k}{b_k} \frac{b_k^l}{f_k} \sum_{n > k} f_n b_n^{-l} < \infty \quad (\exists l > 0), \quad (1.6)$$

то

$$\sum_{n \geq 1} f_n \mathbf{P}\{U_n \geq \varepsilon \varphi_n\} \sim \psi_\alpha(\varepsilon), \quad \varepsilon \searrow 0,$$

тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\psi_\alpha(\varepsilon)} \sum_{n: \varepsilon \varphi_n \geq 1} n f_n \bar{F}(\varepsilon b_n) = 0. \quad (1.7)$$

Заметим, что условие (1.6) выполняется, если

$$\max_{n > k} \frac{f_n b_n^{-l}}{\Delta b_n} = O(1) \frac{f_k b_k^{-l}}{\Delta b_k}, \quad k \rightarrow \infty \quad (\exists l > 0). \quad (1.6')$$

Приведем одно полезное следствие предложения 1.

Теорема 1. *Пусть при некотором $\alpha \in [1, 2]$ выполняются условия (1.1) и (1.4). Пусть последовательности φ_n и $b_n = B_n \varphi_n$ монотонно растут к бесконечности и*

$$\varphi_n \sim \varphi_{n+1}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

Пусть также

$$f_n \sim \int_{\varphi_n}^{\varphi_{n+1}} g(u) \frac{du}{u}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.9)$$

где положительная функция $g(u)$ удовлетворяет условиям

$$\int_1^\infty g(u) \frac{du}{u} = \infty, \quad (1.10)$$

$$\frac{g(u)}{u^\delta} \text{ убывает при некотором } \delta > 0 \text{ и всех достаточно больших } u. \quad (1.11)$$

Если

$$\max_{n > k} \frac{\Delta \varphi_n}{\varphi_n} \frac{b_n}{\Delta b_n} b_n^{-\gamma} = O(1) \frac{\Delta \varphi_k}{\varphi_k} \frac{b_k}{\Delta b_k} b_k^{-\gamma}, \quad k \rightarrow \infty \quad (\exists \gamma > 0), \quad (1.12)$$

то соотношения

$$\sum_{n \geq 1} f_n \mathbf{P}\{U_n \geq \varepsilon \varphi_n\} \sim \tilde{\psi}_\alpha(\varepsilon) = \int_1^\infty g(u) \bar{F}_\alpha(\varepsilon u) \frac{du}{u}, \quad \varepsilon \searrow 0, \quad (1.13)$$

и

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\tilde{\psi}_\alpha(\varepsilon)} \sum_{n: \varepsilon \varphi_n \geq 1} n f_n \bar{F}(\varepsilon b_n) = 0 \quad (1.14)$$

равносильны.

З а м е ч а н и е 1. В условиях (1.9)–(1.11) вместо функции $g(u)$ можно рассматривать любую эквивалентную ей (при $u \rightarrow \infty$) функцию.

З а м е ч а н и е 2. Если (1.11) выполняется при $\delta < \alpha$, то в условиях теоремы 1 соотношение (1.14) (следовательно и (1.13)) всегда имеет место.

З а м е ч а н и е 3. Пусть положительная функция $g(u)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $\rho \geq 0$. Тогда при $\varepsilon \searrow 0$

$$\tilde{\psi}_\alpha(\varepsilon) \sim g\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \rho^{-1} \mathbf{E}(\xi_\alpha)_+^\rho, \quad \rho > 0, \quad (1.15)$$

$$\tilde{\psi}_\alpha(\varepsilon) \sim \bar{F}_\alpha(0) \int_1^{1/\varepsilon} g(u) \frac{du}{u}, \quad \rho = 0 \quad (1.16)$$

(в (1.15) и всюду в дальнейшем используется обозначение $x_+ = \max(0, x)$).

Следует сказать, что во всех типичных случаях условие (1.12) выполняется. В частности, это условие справедливо, если

$$0 < \liminf n \frac{\Delta B_n}{B_n} \leq \limsup n \frac{\Delta B_n}{B_n} < \infty \quad (1.17)$$

и

$$\max_{k > n} \frac{\gamma_k}{1 + \gamma_k} (k\varphi_k)^{-\delta} = O(1) \frac{\gamma_n}{1 + \gamma_n} (n\varphi_n)^{-\delta}, \quad n \rightarrow \infty \quad (\exists \delta > 0), \quad (1.18)$$

где $\gamma_n = n\Delta\varphi_n/\varphi_n$.

По поводу условий (1.17), (1.18) заметим, что первое из них имеет место во всех разумных ситуациях — обычно

$$\lim n \frac{\Delta B_n}{B_n} = \frac{1}{\alpha}, \quad (1.19)$$

а второе выполняется, если $\varphi_n/n^\gamma \nearrow$ ($\exists \gamma > 0$) или если $\varphi_n/n^\gamma \searrow$ ($\exists \gamma > 0$) и

$$\max_{k > n} \gamma_k k^{-\delta} = O(1) \gamma_n n^{-\delta}, \quad n \rightarrow \infty \quad (\exists \delta > 0). \quad (1.20)$$

Отметим также, что условие (1.19) равносильно условию

$$B_n = n^{1/\alpha} h_n, \quad \text{где } h_n > 0, \quad n \frac{\Delta h_n}{h_n} \rightarrow 0. \quad (1.21)$$

В качестве одной из иллюстраций вышесказанного приведем следующий результат.

Теорема 2. Пусть при некотором $\alpha \in [1, 2]$ выполняются условия (1.1) и (1.17). Пусть, кроме того, положительная функция $g(u)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $0 \leq \rho < \alpha$ и при $\rho = 0$ удовлетворяет условию (1.10), а монотонно растущая к бесконечности последовательность φ_n удовлетворяет условиям (1.8) и (1.18). Тогда при $\varepsilon \searrow 0$

$$\sum_n g(\varphi_n) \frac{\Delta \varphi_n}{\varphi_n} \mathbf{P}\{U_n \geq \varepsilon \varphi_n\} \sim \begin{cases} g\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \rho^{-1} \mathbf{E}(\xi_\alpha)_+^\rho, & \rho > 0, \\ \bar{F}_\alpha(0) \int_1^{1/\varepsilon} g(u) \frac{du}{u}, & \rho = 0. \end{cases}$$

Теорема 2 при выполнении условия (1.4) является прямым следствием теоремы 1 и замечаний 1–3, а в случае его нарушения вытекает из [8, следствие 2].

Следствие 1. Предположим, что при некотором $\alpha \in (1, 2]$ выполняются условия (1.21) и

$$\frac{S_n}{B_n} \rightarrow \xi_\alpha \quad \text{по вероятности при } n \rightarrow \infty. \quad (1.22)$$

Пусть $b_n = n^{\gamma+1/\alpha} l_n$, $\gamma > 0$, где положительная последовательность (l_n) удовлетворяет условию $n \Delta l_n / l_n \rightarrow 0$. Если $\rho \in [0, \alpha)$, то при $\varepsilon \searrow 0$

$$\sum_n n^{\gamma\rho-1} \left(\frac{l_n}{h_n} \right)^\rho \mathbf{P}\{S_n \geq \varepsilon b_n\} \sim \frac{1}{\gamma} \begin{cases} \rho^{-1} \varepsilon^{-\rho} \mathbf{E}(\xi_\alpha)_+^\rho, & \rho > 0, \\ \bar{F}_\alpha(0) \ln \frac{1}{\varepsilon}, & \rho = 0. \end{cases}$$

Заметим, что следствие 1 при $\gamma\rho = r/p - 1$ и $p = \alpha/(\alpha\gamma + 1)$ является правосторонней версией (и уточнением) результатов работ [2] и [7].

Обозначим через $\ln_j n$ ($j = 1, 2, \dots$) j -кратный натуральный логарифм n (т.е. $\ln_1 n = \ln n$, $\ln_2 n = \ln \ln n$ и т.д.).

Следствие 2. Пусть $\gamma > 0$, $0 \leq \rho < \alpha$. Если при некотором $\alpha \in (1, 2]$ выполнены условия (1.19) и (1.22), то при $\varepsilon \searrow 0$

$$\sum_{n: \ln_k n \geq 1} (\ln_k n)^{\gamma\rho} \frac{1}{n \prod_{j=1}^k \ln_j n} \mathbf{P}\{S_n \geq \varepsilon B_n (\ln_k n)^\gamma\} \sim \frac{1}{\gamma} \begin{cases} \rho^{-1} \varepsilon^{-\rho} \mathbf{E}(\xi_\alpha)_+^\rho, & \rho > 0, \\ \bar{F}_\alpha(0) \ln \frac{1}{\varepsilon}, & \rho = 0. \end{cases}$$

Мы не рассматриваем в следствиях 1 и 2 случай $\alpha = 1$, поскольку из условия (1.22) при $\alpha = 1$ следует, что предположение (1.4) нарушается, а эта ситуация была детально изучена в [8].

Следствие 3. Пусть $\gamma > 0$, $\rho \geq \alpha$. Если при некотором $\alpha \in (1, 2]$ выполнены условия (1.4) и

$$\frac{S_n}{n^{1/\alpha}} \rightarrow \xi_\alpha \quad \text{по вероятности при } n \rightarrow \infty, \quad (1.23)$$

то

$$\sum_{n: \ln_k n \geq 1} (\ln_k n)^{\gamma\rho} \frac{1}{n \prod_{j=1}^k \ln_j n} \mathbf{P}\{S_n \geq \varepsilon n^{1/\alpha} (\ln_k n)^\gamma\} \sim \frac{1}{\gamma\rho} \varepsilon^{-\rho} \mathbf{E}(\xi_\alpha)_+^\rho, \quad \varepsilon \searrow 0, \quad (1.24)$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{E}[\ln_k X > 0] X^\alpha \ln_k^{\gamma(\rho-\alpha)} X \left(\prod_{j=1}^k \ln_j X \right)^{-1} < \infty. \quad (1.25)$$

Если $\alpha = 2$ и $k \geq 2$ или $k = 1$ и $\gamma(\rho - 2) \leq 1$, то условие (1.25) вытекает из предположения

$$\mathbf{E}X = 0, \quad \mathbf{E}X^2 = 1. \quad (1.26)$$

Если же $k = 1$ и $\gamma(\rho - 2) > 1$, то (1.25) равносильно условию $\mathbf{E}X_+^2 \ln^{\gamma(\rho-2)-1} (1 + X_+) < \infty$. Таким образом, следствие 3 обобщает и уточняет соответствующие результаты из [2], [9] и [4].

В заключение приведем еще одно следствие теоремы 1.

Следствие 4. Пусть $1 < \alpha \leq 2$, $0 < p < \alpha \leq r$ и $\rho = \alpha(r - p)/(\alpha - p)$. Если выполнены условия (1.23) и (1.4), то

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^\rho \sum_{n \geq 1} n^{r/p-2} \mathbf{P}\{S_n \geq \varepsilon n^{1/p}\} = \frac{p}{r-p} \mathbf{E}(\xi_\alpha)_+^\rho \quad (1.27)$$

тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}X_+^r < \infty$.

При $\alpha = 2$ соотношение (1.27) является правосторонним вариантом (и уточнением) результата работы [6] (см. также [1]–[5]). Напоминаем, что из (1.23) при $1 < \alpha \leq 2$ следует $\mathbf{E}X = 0$, а если $\alpha = 2$, то и $\mathbf{E}X^2 < \infty$.

Проверка того, что следствия 1 и 2 вытекают из теоремы 2, а следствия 3 и 4 — из теоремы 1, осуществлена в конце п. 3.

2. Доказательство предложения 1. Обозначим $P_n(\varepsilon) = \mathbf{P}\{U_n \geq \varepsilon\varphi_n\}$. Пусть положительная функция $M = M(\varepsilon)$ как угодно медленно растет к бесконечности при $\varepsilon \searrow 0$. Положим $n_1 = \max\{n: \varphi_n \leq 1/\varepsilon\}$, $n_2 = \max\{n: \varphi_n \leq M/\varepsilon\}$. Имеем

$$S(\varepsilon) = \left(\sum_{1 \leq n < M} + \sum_{M \leq n \leq n_2} + \sum_{n > n_2} \right) f_n P_n(\varepsilon) = S_1 + S_2 + S_3. \quad (2.1)$$

Функция распределения $F_\alpha(x)$ абсолютно непрерывна и меньше единицы при любом конечном x , если $1 \leq \alpha \leq 2$. Отсюда и из условия (1.1) заключаем, что $\mathbf{P}\{U_n \geq x\} \rightarrow \bar{F}_\alpha(x)$ равномерно по x при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно,

$$P_n(\varepsilon) \sim \bar{F}_\alpha(\varepsilon\varphi_n), \quad M \leq n \leq n_2, \quad \varepsilon \searrow 0,$$

т.е.

$$S_2 \sim \sum_{M \leq n \leq n_2} f_n \bar{F}_\alpha(\varepsilon\varphi_n), \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (2.2)$$

Учитывая, что $\psi_\alpha(\varepsilon) \nearrow \infty$ при $\varepsilon \searrow 0$, найдем

$$\max \left(S_1, \sum_{1 \leq n < M} f_n \bar{F}_\alpha(\varepsilon\varphi_n) \right) \leq \sum_{1 \leq n < M} f_n = o(\psi_\alpha(\varepsilon)), \quad \varepsilon \searrow 0, \quad (2.3)$$

если M растет к бесконечности достаточно медленно.

Принимая во внимание, что в условиях предложения 1 правый хвост распределения F_α убывает быстрее любой степени x (см., например, [11]), с помощью (1.5) при некоторых $\gamma, \delta > 0$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{n > n_2} f_n \bar{F}_\alpha(\varepsilon\varphi_n) &\leq A_1 M^{-\gamma} \sum_{n > n_1} f_n (\varepsilon\varphi_n)^{-\delta} \leq A_2 M^{-\gamma} (\varepsilon\varphi_{n_1})^{-\delta} \sum_{n=1}^{n_1} f_n \\ &\leq \frac{A_2 M^{-\gamma} (\varphi_{n_1+1}/\varphi_{n_1})^\delta}{\bar{F}_\alpha(1)} \psi_\alpha(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где A_i — некоторые постоянные, не зависящие от ε . Отсюда и из (2.2), (2.3) следует

$$S_1 + S_2 \sim \psi_\alpha(\varepsilon), \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (2.5)$$

Сравнивая (2.1) и (2.5), видим, что соотношение (1.2) имеет место тогда и только тогда, когда

$$S_3 = o(\psi_\alpha(\varepsilon)), \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (2.6)$$

Далее, покажем, что условие (1.7) является следствием (2.6).

Положим $D(x) = \mathbf{E}X^2 \mathbf{I}[|X| \leq x]$.

Лемма 1 (см. [10, гл. XVII, § 5], [13, гл. 4, § 2]). Пусть выполняются условия предложения 1. Тогда функция $D(x)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $2 - \alpha$,

$$\frac{nD(B_n)}{B_n^2} \rightarrow c, \quad na_n - \frac{n}{B_n} \int_{-B_n}^{B_n} x dF(x) \rightarrow \gamma \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (2.7)$$

где $c > 0$ и γ — некоторые постоянные, и, кроме того, хвосты распределений F и F_α удовлетворяют условиям $(x \rightarrow \infty)$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 \bar{F}(x)}{D(x)} &\rightarrow 0, & \frac{x^2 F(-x)}{D(x)} &\rightarrow \frac{2 - \alpha}{2}, \\ x^\alpha \bar{F}_\alpha(x) &\rightarrow 0, & x^\alpha F_\alpha(-x) &\rightarrow \frac{2 - \alpha}{2} c. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Лемма 2. Пусть $\{X_{nk}; 1 \leq k \leq n, n \geq 1\}$ — последовательность серий независимых и одинаково в каждой серии распределенных случайных величин. Положим $S_n = \sum_{k=1}^n X_{nk}$, $Q_n^+(u) = n\mathbf{P}\{X_{n1} \geq u\}$. При любых x и c имеет место оценка $\mathbf{P}\{S_n > x\} \geq (1 - \eta) Q_n^+(c) + \mathbf{P}\{S_n - X_{nn} < x - c\}$.

Утверждение леммы 2 следует из [12, (33)].

Положим $X_{nk} = X_k/B_n - a_n$, $c = x - a_n$, $x = \varepsilon\varphi_n$ и $\varepsilon\varphi_n \geq 1$. С помощью лемм 1 и 2 получим, что при некотором $\delta > 0$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$P_n(\varepsilon) \geq \delta \bar{F}(\varepsilon\varphi_n B_n). \quad (2.9)$$

Действительно, при $n \rightarrow \infty$, в силу (2.7), (2.8), имеем $Q_n^+(c) = n \bar{F}(\varepsilon\varphi_n B_n) \leq n \bar{F}(B_n) = o(1)$ и $1 - \eta = \mathbf{P}\{S_n - X_n/B_n \geq 0\} + o(1) = \bar{F}_\alpha(0) + o(1) \geq \delta > 0$.

Из (2.6) и (2.9) следует оценка

$$\sum_{n \geq n_2} n f_n \bar{F}(\varepsilon b_n) = o(\psi_\alpha(\varepsilon)), \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (2.10)$$

Кроме того (см. (2.7), (2.8)),

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} n f_n \bar{F}(\varepsilon b_n) \leq \frac{\max_{n \geq n_1} n \bar{F}(B_n)}{\bar{F}_\alpha(M)} \sum_{n=n_1}^{n_2} f_n \bar{F}_\alpha(\varepsilon\varphi_n) = o(\psi_\alpha(\varepsilon)), \quad \varepsilon \searrow 0,$$

если M растет достаточно медленно.

Итак, (1.7) есть следствие (2.6).

Докажем теперь, что из (1.5)–(1.7) вытекает (2.6).

Лемма 3. Положим (см. также обозначения в лемме 2)

$$\Theta_n(u) = n \mathbf{P}\{X_{n1} < u\}, \quad \beta_2(u) = u^{-2} \int_{-u}^u y^2 d\Theta_n(y).$$

Пусть $\varkappa_n > 0$ изменяется таким образом, что

$$\int_{|y| > \varkappa_n} d\Theta_n(y) + \beta_2(\varkappa_n) + \left| \frac{1}{\varkappa_n} \int_{-\varkappa_n}^{\varkappa_n} y d\Theta_n(y) \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

Тогда при любом $t > 0$ и всех достаточно больших n равномерно по $x > \max(\varkappa_n, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_n > x\} &\leq Q_n^+(x - \varkappa_n) + Q_n^+\left(\frac{x}{3}\right) + \exp\left(-\frac{1}{3\beta_2(x)}\right) \\ &\quad + \exp\left(-\frac{x}{2}\right) + x^{-t} \int_1^x y^t d\Theta_n(y). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Лемма 3 представляет частный случай [12, (4), (7), (9) при $\gamma = \frac{1}{3}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$, $r = 1$].

Воспользуемся леммой 3 при $X_{nk} = X_k/B_n - a_n$, $x = \varepsilon\varphi_n$ и $n > n_2$ (см. (2.1)), предполагая, что $\varkappa_n = M/2$, а $\varepsilon \searrow 0$. Поскольку в этом случае условие (2.11) выполняется (см. соответствующие рассуждения в [8]), оценка (2.12) будет справедлива при всех достаточно малых положительных ε . Обозначим слагаемые в правой части неравенства (2.12) через $I_1, \dots, I_5$ соответственно и оценим их сверху.

При $x \geq M$, очевидно, $I_1 = Q_n^+(x - \varkappa_n) \leq I_2 = Q_n^+(x/3) \leq n \bar{F}(x B_n/4)$. Далее, $\int_1^x y^t d\Theta_n(y) = n \int_{(1+a_n)B_n}^{(x+a_n)B_n} (y/B_n - a_n)^t dF(y)$. Отсюда получим

$$\int_1^x y^t d\Theta_n(y) \leq 2^t \left(n \int_0^{2x B_n} \left(\frac{y}{B_n} \right)^t dF(y) + |a_n|^t n \bar{F}\left(\frac{B_n}{2}\right) \right).$$

Принимая во внимание лемму 1, видим, что

$$I_1 + I_2 + I_4 + I_5 \leq A x^{-t} \left(1 + \frac{n}{B_n^t} \int_0^{x B_n} y^{t-1} \bar{F}(y) dy \right), \quad (2.13)$$

где A — некоторая положительная постоянная.

Теперь оценим слагаемое $I_3 = \exp\{-1/(3\beta_2(x))\}$. Имеем

$$\beta_2(x) = \frac{n}{(x B_n)^2} \int_{(-x+a_n)B_n}^{(x+a_n)B_n} (y - a_n B_n)^2 dF(y).$$

Следовательно, если $\mathbf{D}X = \sigma^2 < \infty$, то равномерно по $x > x_0$

$$\beta_2(x) \sim \frac{n\sigma^2}{(x B_n)^2}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

Пусть теперь $\mathbf{D}X = \infty$. Поскольку $(y - a_n B_n)^2 \geq \frac{1}{2} y^2 - (a_n B_n)^2$, то применяя (2.7) и оценку $(\int_{|y| \leq z} |y| dF(y))^2 = o(D(z))$, $z \rightarrow \infty$, найдем

$$\begin{aligned} \beta_2(x) &\geq \frac{n}{(x B_n)^2} \int_{|y| \leq x B_n/2} (y - a_n B_n)^2 dF(y) \geq \frac{n}{(x B_n)^2} \left(\frac{1}{2} D\left(\frac{B_n}{2}\right) - (a_n B_n)^2 \right); \\ (a_n B_n)^2 &\leq 2 \left(\int_{|y| \leq B_n} y dF(y) \right)^2 + 2 \left(\frac{B_n}{n} \right)^2 (\gamma + o(1))^2 = o(D(B_n)), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.14) следует, что

$$\beta_2(x) \geq \frac{1}{3} \frac{n}{(x B_n)^2} D\left(\frac{x B_n}{2}\right) \geq x^{-\alpha+\eta}, \quad x > x_\eta, \quad \forall \eta > 0, \quad (2.15)$$

где последняя оценка имеет место в силу правильной изменчивости функции $D(z)$ (см. лемму 1).

Из (2.12), (2.13) и (2.15) при всех достаточно малых ε и всех n таких, что $\varepsilon \psi_n > M$, следует

$$\mathbf{P}\{U_n \geq \varepsilon \psi_n\} \leq A \left((\varepsilon \psi_n)^{-t} + \frac{n}{(\psi_n B_n)^t} \int_0^{\psi_n B_n} u^{t-1} \bar{F}(\varepsilon u) du \right), \quad (2.16)$$

где постоянная t может быть сколь угодно велика, а A не зависит от n и ε .

Оценим S_3 по (2.16). Имеем

$$S_3 \leq A \sum_{n \geq n_2} f_n (\varepsilon \psi_n)^{-t} + A \sum_{n > n_1} f_n \frac{n}{(\psi_n B_n)^t} \int_0^{\psi_n B_n} u^{t-1} \bar{F}(\varepsilon u) du = S_{31} + S_{32}. \quad (2.17)$$

Здесь (см. (2.4))

$$S_{31} = o(\psi_\alpha(\varepsilon)), \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (2.18)$$

Остается оценить S_{32} . Положим $b_n = \psi_n B_n$. Очевидно,

$$\sum_{n > n_1} n f_n b_n^{-t} \int_0^{b_n} u^{t-1} \bar{F}(\varepsilon u) du \leq J_1 + J_2, \quad (2.19)$$

где

$$J_1 = \int_0^{b_{n_1}} u^{t-1} \bar{F}(\varepsilon u) du \sum_{n > n_1} n f_n b_n^{-t}. \quad (2.20)$$

Имеем (см. (2.4)) при $\alpha < \delta \leq t$, обозначив $n_1 + 1$ через m :

$$\sum_{n > n_1} n f_n b_n^{-t} \leq A_1 \frac{m \varphi_m^\delta}{b_m^t} \sum_{n > n_1} f_n (\varepsilon \varphi_n)^{-\delta} \leq A_2 \frac{m}{b_m^t} \sum_{n=1}^{n_1} f_n \leq A_3 \frac{m}{b_m^t} \psi_\alpha(\varepsilon). \quad (2.21)$$

Учитывая, что $\varepsilon \varphi_m > 1$ (см. (2.1)) и $z^{-t} \int_0^z u^{t-1} \bar{F}(u) du = o(D(z)/z^2)$, $z \rightarrow \infty$ (см. лемму 1), получим

$$\begin{aligned} \frac{m}{b_m^t} \int_0^{b_m} u^{t-1} \bar{F}(\varepsilon u) du &\leq \frac{m}{B_m^t} \int_0^{B_m} u^{t-1} \bar{F}(u) du \\ &= o\left(\frac{m D(B_m)}{B_m^2}\right) = o(1), \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Из (2.20)–(2.22) следует

$$J_1 = o(\psi_\alpha(\varepsilon)), \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (2.23)$$

Рассмотрим величину J_2 . Имеем

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{n > n_1} n f_n b_n^{-t} \sum_{k=n_1}^{n-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} u^{t-1} \bar{F}(\varepsilon u) du \\ &= \sum_{k \geq n_1} \left(\sum_{n > k} n f_n b_n^{-t} \right) \int_{b_k}^{b_{k+1}} u^{t-1} \bar{F}(\varepsilon u) du, \\ \int_{b_k}^{b_{k+1}} u^{t-1} \bar{F}(\varepsilon u) du &\leq \bar{F}(\varepsilon b_k) (b_{k+1} - b_k) b_{k+1}^{t-1}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Принимая во внимание (см. (2.7)) соотношение $n/b_n^2 \sim c/(\varphi_n^2 D(B_n))$, $n \rightarrow \infty$, видим, что при всех достаточно больших k

$$\sum_{n > k} n f_n b_n^{-t} \leq 2 \frac{k}{b_k^2} \sum_{n > k} f_n b_n^{-t+2}.$$

Отсюда, из (2.24) и из условий (1.5)–(1.7) найдем

$$J_2 \leq A \sum_{k \geq n_1} k f_k \bar{F}(\varepsilon b_k) = o(\psi_\alpha(\varepsilon)), \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (2.25)$$

Вследствие (2.1), (2.16)–(2.19), (2.23) и (2.25), условие (2.6) вытекает из (1.7). Предложение 1, таким образом, полностью доказано.

3. Прочие доказательства. Покажем, что теорема 1 вытекает из предложения 1. Нам следует проверить, что при условиях теоремы 1 имеют место соотношения (1.5), (1.6) и, кроме того,

$$\psi_\alpha(\varepsilon) \sim \tilde{\psi}_\alpha(\varepsilon), \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (3.1)$$

Справедливость первого утверждения доказана в [8, п. 2].

Докажем, что соотношение (1.12) влечет (1.6') и, следовательно, (1.6). Имеем в силу (1.11)

$$A_1 g(\varphi_{n+1}) \frac{\Delta \varphi_n}{\varphi_n} \leq f_n \leq A_2 g(\varphi_n) \frac{\Delta \varphi_n}{\varphi_n},$$

где постоянные A_i зависят лишь от δ . Отсюда, считая без потери общности, что постоянные l, δ, γ из условий (1.6'), (1.11), (1.12) удовлетворяют неравенству $l \geq \delta + \gamma$, и принимая во внимание условия (1.11), (1.12), найдем при $n > k$ и $k \rightarrow \infty$, что

$$\begin{aligned} f_n \frac{b_n^{-l}}{\Delta b_n} &\leq A_2 \frac{\Delta \varphi_n}{\varphi_n} \frac{b_n}{\Delta b_n} b_n^{-\gamma} \frac{g(\varphi_n)}{b_n^\delta} b_n^{-l+\gamma+\delta-1} \leq A_2 \frac{g(\varphi_{k+1})}{b_{k+1}^\delta} b_{k+1}^{-l+\gamma+\delta-1} \frac{\Delta \varphi_n}{\varphi_n} \frac{b_n}{\Delta b_n} b_n^{-\gamma} \\ &= O(1) g(\varphi_{k+1}) \frac{\Delta \varphi_k}{\varphi_k} \frac{1}{\Delta b_k} b_k^{-l} \left(\frac{b_k}{b_{k+1}} \right)^{l+1-\gamma} = O(1) \frac{f_k b_k^{-l}}{\Delta b_k}, \end{aligned}$$

что доказывает требуемое утверждение.

Проверим теперь справедливость соотношения (3.1). Пусть положительная функция $M = M(\varepsilon)$ достаточно медленно растет к бесконечности при $\varepsilon \searrow 0$. Тогда (напомним, что $\psi_\alpha(0) = \infty$)

$$\int_1^M g(u) \bar{F}_\alpha(\varepsilon u) \frac{du}{u} \leq \int_1^M g(u) \frac{du}{u} = o(\tilde{\psi}_\alpha(\varepsilon)), \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (3.2)$$

Далее (см. (2.4), (1.11)), если $l > \delta$, то

$$\begin{aligned} \int_{M/\varepsilon}^\infty g(u) \bar{F}_\alpha(\varepsilon u) \frac{du}{u} &\leq \varepsilon^{-l} \int_{M/\varepsilon}^\infty g(u) u^{-l} \frac{du}{u} \leq \varepsilon^{-l} \frac{g(1/\varepsilon)}{(1/\varepsilon)^\delta} \int_{M/\varepsilon}^\infty u^{\delta-l} \frac{du}{u} \\ &= o\left(g\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \searrow 0, \end{aligned}$$

но

$$\tilde{\psi}_c(\varepsilon) \geq \int_{1/\varepsilon}^{2/\varepsilon} g(u) \bar{F}_\alpha(\varepsilon u) \frac{du}{u} \geq \bar{F}_\alpha(2) \frac{g(1/\varepsilon)}{(1/\varepsilon)^\delta} \int_{1/\varepsilon}^{2/\varepsilon} u^\delta \frac{du}{u} \geq A g\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (3.3)$$

откуда следует, что

$$\int_{M/\varepsilon}^{\infty} g(u) \bar{F}_{\alpha}(\varepsilon u) \frac{du}{u} = o(\tilde{\psi}_{\alpha}(\varepsilon)), \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (3.4)$$

Из (3.2) и (3.3) вытекает

$$\tilde{\psi}_{\alpha}(\varepsilon) \sim \int_M^{M/\varepsilon} g(u) \bar{F}_{\alpha}(\varepsilon u) \frac{du}{u}, \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (3.5)$$

Аналогичные рассуждения приводят к равенству

$$\tilde{\psi}_{\alpha}(\varepsilon) \sim \sum_{n=n_0}^{n_2} \int_{\varphi_n}^{\varphi_{n+1}} g(u) \frac{du}{u} \bar{F}_{\alpha}(\varepsilon \varphi_n), \quad (3.6)$$

где $n_0 = \max(n: \varphi_n \leq M)$, $n_2 = \max(n: \varphi_n \leq M/\varepsilon)$.

Соотношение (3.1) следует из (3.5) и (3.6), поскольку при условии (1.8) $\bar{F}_{\alpha}(\varepsilon \varphi_n) \sim \bar{F}_{\alpha}(\varepsilon \varphi_{n+1})$, $n_0 \leq n \leq n_2$, $\varepsilon \searrow 0$, если, конечно, M растет к бесконечности не слишком быстро.

Далее, убедимся в справедливости замечания 2. Положим $h(x) = D(x)x^{\alpha-2}$ (см. лемму 1). При условиях (1.1), (1.4) функция $h(x)$ медленно меняется на бесконечности, $\bar{F}(z) = o(h(z)/z^{\alpha})$, $z \rightarrow \infty$, и $nh(B_n)/B_n^{\alpha} \rightarrow c$. Обозначим $\sum_{*} n f_n h(\varepsilon B_n \varphi_n) (\varepsilon B_n \varphi_n)^{-\alpha}$, где суммирование производится по n таким, что $\varepsilon \varphi_n \geq 1$, через J_{ε} . Принимая во внимание вышесказанное, найдем

$$\sum_{*} n f_n \bar{F}(\varepsilon B_n \varphi_n) = o(J_{\varepsilon}), \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (3.7)$$

Пусть $0 < \tau < \alpha - \delta$. Тогда, учитывая свойства медленно меняющихся функций, получим

$$J_{\varepsilon} \sim c\varepsilon^{-\alpha} \sum_{*} f_n \frac{h(\varepsilon \varphi_n B_n)}{h(B_n)(\varepsilon \varphi_n)^{\tau}} \varphi_n^{-\alpha} (\varepsilon \varphi_n)^{\tau} \leq 2c\varepsilon^{\tau-\alpha} \sum_{*} f_n \varphi_n^{\tau-\alpha} \frac{h(\varepsilon \varphi_{n*} B_{n*})}{h(B_{n*})(\varepsilon \varphi_{n*})^{\tau}},$$

где $\varepsilon \varphi_{n*} \geq 1 > \varepsilon \varphi_{n*-1}$. Отсюда и из (1.8), (1.11) следует, что при $\varepsilon \searrow 0$

$$J_{\varepsilon} = O(1) \varepsilon^{\tau-\alpha} \sum_{*} f_n \varphi_n^{\tau-\alpha} = O(1) \varepsilon^{\tau-\alpha} \int_{1/\varepsilon}^{\infty} u^{\tau-\alpha} g(u) \frac{du}{u} = O(1) g\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (3.8)$$

Необходимый результат вытекает из (3.7), (3.8) и (3.3).

Замечание 3 идентично [8, замечание 2, пп. 1 и 2].

Импликация (1.17), (1.18) $\implies$ (1.12) несложно проверяется при помощи равенства

$$\frac{\Delta b_n}{b_n} = \frac{B_{n+1}}{B_n} \frac{\Delta \varphi_n}{\varphi_n} + \frac{\Delta B_n}{B_n} \quad (3.9)$$

с учетом соотношения (см. (2.7)) $B_{n+1} \sim B_n$, $n \rightarrow \infty$, и того, что B_n имеет степенной порядок роста.

Утверждения относительно условий (1.17), (1.18) вытекают из следующего элементарного результата.

Лемма 4. Имеем

$$\liminf n \frac{\Delta \varphi_n}{\varphi_n} > 0 \iff \frac{\varphi_n}{n^{\gamma}} \nearrow, \quad \limsup n \frac{\Delta \varphi_n}{\varphi_n} < \infty \iff \frac{\varphi_n}{n^{\gamma}} \searrow \quad (\exists \gamma > 0).$$

Доказательство. Проверим первое утверждение (второе проверяется аналогично). Положим $\bar{\varphi}_n = \varphi_n/n^{\gamma}$, $\gamma > 0$. Тогда

$$\frac{\Delta \varphi_n}{\varphi_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\gamma} \frac{\bar{\varphi}_{n+1}}{\bar{\varphi}_n - 1}$$

и если $\bar{\varphi}_n \nearrow$, то

$$n \frac{\Delta \varphi_n}{\varphi_n} \geq n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\gamma} - 1 \right) \sim \gamma,$$

откуда $\liminf n \Delta \varphi_n / \varphi_n > 0$.

Обратно, если $\Delta\varphi_n/\varphi_n \geq \delta > 0$ при некотором δ и всех достаточно больших n , то при $0 < \gamma < \min(1, \delta)$

$$\begin{aligned}\Delta\bar{\varphi}_n &= \frac{\Delta\varphi_n}{(n+1)^\gamma} - \left(\frac{1}{n^\gamma} - \frac{1}{(n+1)^\gamma} \right) \varphi_n \\ &\geq \frac{\delta\varphi_n}{n} (n+1)^{-\gamma} - (n+1)^{-\gamma} \varphi_n \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^\gamma - 1 \right) \geq \frac{(\delta - \gamma)\varphi_n}{n} (n+1)^{-\gamma} > 0,\end{aligned}$$

т.е. $\bar{\varphi}_n \nearrow$. Лемма 4 доказана.

Равносильность условий (1.19) и (1.21) проверяется с помощью равенства

$$\begin{aligned}n \frac{\Delta B_n}{B_n} &= n \frac{\Delta h_n}{h_n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1/\alpha} + n \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1/\alpha} - 1 \right) \\ &= (1 + o(1)) n \frac{\Delta h_n}{h_n} + \frac{1}{\alpha} + o(1), \quad n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Следствие 1 вытекает из теоремы 2 при $a_n = 0$ (см. (1.1)) и $g(u) = u^\rho$, поскольку из (1.21), (1.24) и (3.9) следует, что $n\Delta\varphi_n/\varphi_n \rightarrow \gamma$ (напоминаем, что $\varphi_n = b_n/B_n$).

Следствие 2 аналогично [8, следствие 5] и также вытекает из теоремы 2.

Далее, докажем, что теорема 1 влечет следствие 3. Применим теорему 1 при $B_n = n^{1/\alpha}$, $a_n = 0$, $\varphi_n = \ln_k^\gamma n$, $g(u) = u^\rho$, $\rho \geq \alpha$. Учитывая, что

$$\frac{\Delta\varphi_n}{\varphi_n} \sim \frac{\gamma}{n \prod_{j=1}^k \ln_j n}, \quad n \rightarrow \infty,$$

найдем, что (1.24) равносильно условию

$$\sum_{n: \varepsilon\varphi_n \geq 1} \frac{\ln_k^{\gamma\rho} n}{\prod_{j=1}^k \ln_j n} \bar{F}(\varepsilon n^{1/\alpha} \ln_k^\gamma n) = o(\varepsilon^{-\rho}), \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (3.10)$$

Стандартные рассуждения показывают, что (3.10) равносильно условию

$$\int_{t_\varepsilon}^\infty t^{\alpha-1} \frac{\ln_k^{(\rho-\alpha)} t}{\prod_{j=1}^k \ln_j t} \bar{F}(t) dt = o\left(\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\rho-\alpha}\right), \quad \varepsilon \searrow 0,$$

в котором $t_\varepsilon = (\varphi^{-1}(1/\varepsilon))^{1/\alpha}$, а $\varphi^{-1}(x)$ — функция, обратная к $\varphi(x) = \ln_k x$. Поскольку $\rho - \alpha \geq 0$, отсюда следует, что (3.10) равносильно (1.25), что и требовалось.

В заключение покажем, что следствие 4 вытекает из теоремы 1. Пусть в (1.8), (1.9) $\varphi_n = n^\gamma$, $g(u) = u^\rho$, где $\gamma = 1/p - 1/\alpha$, p и ρ такие, как в следствии 4. Если выполнены условия (1.23), (1.4), то из теоремы 1 при $B_n = n^{1/\alpha}$, $a_n = 0$ (см. (1.1)) и соотношения (1.15) следует, что (1.27) равносильно условию

$$I_\varepsilon = \sum_{n \geq \varepsilon^{-1/\gamma}} n^{\gamma\rho} \bar{F}(\varepsilon n^{1/p}) = o(\varepsilon^{-\rho}), \quad \varepsilon \searrow 0. \quad (3.11)$$

Несложно проверить, что (3.11) равносильно условию

$$\int_z^\infty t^{r-1} \bar{F}(t) dt = o(z^{r-\alpha}), \quad z \rightarrow \infty,$$

которое, в свою очередь, равносильно соотношению $\mathbf{E}X_+^r < \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baum L. E., Katz M. Convergence rates in the law of large numbers. — Trans. Amer. Math. Soc., 1965, v. 120, p. 108–123.
2. Gut A., Spătaru A. Precise asymptotics in the Baum–Katz and Davis laws of large numbers. — J. Math. Anal. Appl., 2000, v. 248, № 1, p. 233–246.

3. Розовский Л. В. Некоторые предельные теоремы для больших отклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения нормального закона. — Записки научн. семин. ПОМИ, 2002, т. 294, с. 165–193.
4. Li D. L., Wang X. C., Rao M. B. Some results on convergence rates for probabilities of moderate deviations for sums of random variables. — Internat. J. Math. Math. Sci., 1992, v. 15, № 3, p. 481–498.
5. Heyde C. C. A supplement to the strong law of large numbers. — J. Appl. Probab., 1975, v. 12, p. 173–175.
6. Chen R. A remark on the tail probability of a distribution. — J. Multivariate Anal., 1978, v. 8, № 2, p. 328–333.
7. Spătaru A. Precise asymptotics in Spitzer's law of large numbers. — J. Theoret. Probab., 1999, v. 12, № 3, p. 811–819.
8. Розовский Л. В. О точной асимптотике в слабом законе больших чисел для сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения устойчивого закона. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 3, с. 589–596.
9. Gut A., Spătaru A. Precise asymptotics in the law of the iterated logarithm. — Ann. Probab., 2000, v. 28, № 4, p. 1870–1883.
10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.
11. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983, 304 с.
12. Розовский Л. В. Одна оценка для вероятностей больших отклонений. — Матем. заметки, 1987, т. 42, № 1, с. 145–156.
13. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317 с.

Поступила в редакцию
5.II.2003

© 2004 г.

ШОЛОМИЦКИЙ А. Г.*

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ПУАССОНОВСКОЙ СХОДИМОСТИ МАРТИНГАЛОВ¹⁾

Доказана теорема о необходимых условиях пуассоновской сходимости сумм слагаемых, являющихся мартингал-разностями. Условия теоремы обобщают классические условия сходимости сумм независимых слагаемых.

Ключевые слова и фразы: мартингал, закон Пуассона, слабая сходимость.

В [6] были получены некоторые результаты о необходимых условиях нормальной сходимости сумм мартингал-разностей. Оказывается, что тем же методом можно получить необходимые условия и для пуассоновского случая.

Ниже символом $\mathcal{L}$ обозначается закон распределения случайной величины, сходимость законов понимается в смысле слабой сходимости соответствующих распределений, пуассоновский закон с параметром λ обозначается $\mathcal{P}(\lambda)$. Символы $\rightarrow$ и $\xrightarrow{P}$

* Центральный экономико-математический институт РАН, Нахимовский пр-т, 47, 117418 Москва, Россия; e-mail: ags@cemi.rssi.ru

¹⁾ Работа частично поддержана грантом РФФИ 03-01-00479 и грантом РАН по 6-му конкурсу-экспертизе научных проектов молодых ученых (грант № 105).