Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Ротарь, Об асимптотических разложениях для локальных структур зависимостей с сильным перемешиванием, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 1, 21–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 08:45:48

© 2007 г.

РОТАРЬ В. И.*

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ДЛЯ ЛОКАЛЬНЫХ СТРУКТУР ЗАВИСИМОСТЕЙ С СИЛЬНЫМ ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ

Эта статья развивает результаты, полученные в работе [28] и касающиеся разложения Эджворта для $\mathbf{E}h(W)$, где W — сумма независимых случайных величин и $h(x)$ — некоторая функция, для случая так называемых цепочек окрестностей зависимости. Наиболее известным примером таких структур является перемешивание на графах. Основное улучшение состоит в замене характеристик ϕ -перемешивания характеристиками сильного (или α -) перемешивания, что существенно расширяет возможности применения. Другое улучшение касается условий гладкости. Мы покажем, как условия гладкости h могут быть заменены условиями гладкости распределения W .

Ключевые слова и фразы: разложение Эджворта, локальная зависимость, окрестность зависимости, метод Стейна.

1. Введение и результаты

1.1. Предыстория и мотивация. Пусть $h(\cdot)$ — некоторая функция и $W = X_1 + \dots + X_n$, где X_i — случайные величины. Эта статья посвящена асимптотическим разложениям для $\mathbf{E}h(W)$.

Результаты, касающиеся асимптотических разложений для различных типов зависимости, и дальнейшие ссылки можно найти, например, в статьях (в хронологическом порядке) [33], [15], [24], [18] (цепи Маркова); [11], [21] (классическое перемешивание); [27] (m -зависимые случайные величины); [12]–[14] (m -зависимые случайные величины и случайные поля); [25] (мартингалы); [19] (случайные поля); [20], [6], [22], [23], [7], [3] (U -статистики); [4] (симметричные статистики). Надо заметить, что данный список далеко не полон.

В этой статье мы продолжаем изучать асимптотические разложения для $\mathbf{E}h(W)$; начало этой работы было положено в статье Й. Ринотта

* Department of Mathematics and Statistics of San Diego State University и Центральный экономико-математический институт РАН, Нахимовский пр-т, 47, 117418 Москва, Россия; e-mail: vrotar@math.ucsd.edu

и автора [28], где структуры зависимости были описаны в терминах разложений W .

В типичной ситуации указанные разложения определяются так называемыми *окрестностями зависимости* (dependency neighborhoods), когда для каждого слагаемого X в сумме указывается множество слагаемых, от которых X существенно зависит. Более точно, для каждого слагаемого X мы рассматриваем цепочку множеств слагаемых $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_d$ такую, что $X \in \mathcal{N}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{N}_d$. Мы предполагаем, что X в определенном смысле существенно зависит только от величин из $\mathcal{N}_1$ и слабо — от величин, не принадлежащих $\mathcal{N}_1$. Аналогично, множество слагаемых $\mathcal{N}_1$ существенно зависит только от величин из $\mathcal{N}_2$, и слабо — от величин, не принадлежащих $\mathcal{N}_2$; и т.д. В случае независимых слагаемых мы определяем все множества $\mathcal{N}_s$ как содержащие только X .

Аналогичные разложения можно найти в [2], [29], а также в ссылках, приведенных в этих работах.

Существенная гибкость такой схемы достигалась благодаря, в частности, тому, что рассматриваемая в [28] и в настоящей статье последовательность $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_d$ является *произвольной* и для каждой отдельной структуры зависимости можно определить такую последовательность $\{\mathcal{N}_s\}$, для которой ошибка аппроксимации была бы мала. В частности, окрестности $\mathcal{N}_s$ могут быть случайными, могут зависеть от значений X и т.д.

Самым типичным примером применения является перемешивание на графах, т.е. когда параметр, индексирующий слагаемые, который обычно понимается как «время» или «пространство», принимает значения, которые можно идентифицировать с вершинами графа; см. [28].

Остаточный член в разложениях в [28] и в данной статье оценивается в терминах отношений Ляпунова или близких характеристик. Упомянутую выше слабую зависимость можно оценить с помощью условий, близких к условиям перемешивания.

В [28] в качестве меры зависимости между двумя σ -алгебрами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ использовалась мера

$$\phi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \sup \left\{ |\mathbf{P}\{B \mid A\} - \mathbf{P}(B)|; A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, \mathbf{P}(A) > 0 \right\}. \quad (1.1.1)$$

Заметим, что впервые условия ϕ -перемешивания были рассмотрены в [16].

Основная цель этой статьи — получить результат, аналогичный результату, полученному в [28], но в терминах меры сильного перемешивания (strong mixing measure)

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \sup \left\{ |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|; A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \right\}. \quad (1.1.2)$$

Условия сильного перемешивания впервые были использованы в [32].

Очевидно, что условия зависимости в терминах α -перемешивания слабее, чем в терминах меры (1.1.1), и переход от ϕ -перемешивания к α -перемешиванию существенно расширяет возможности применений.

В п. 1.2.3 мы рассмотрим простой, но характерный пример ситуации, когда распределение W асимптотически нормально, но характеристики в терминах ϕ не работают так, как это происходит в случае сильного перемешивания.

Метод, примененный в [28] и этой статье, использует подход Стейна и основан, в частности, на некотором специальном представлении (см. п. 2.2), впервые изученном для независимых слагаемых в работе [1] и существенно развитом в [28] для случая зависимых слагаемых. Упомянутое выше представление улучшается и обсуждается в работе [30], включая вопрос о переходе от ϕ - к α -перемешиванию. Цель данной статьи — непосредственно разложения.

Другое улучшение результатов из [28] касается условий гладкости. В [28] рассматривались два типа условий: либо функция h предполагалась достаточно гладкой, либо распределение суммы W должно было быть достаточно гладким. Однако в разложениях, приведенных в [28], второй тип условий хорошо работает только в случае локальной зависимости, т.е. когда X не зависит от величин, не принадлежащих $\mathcal{N}_1$, множество $\mathcal{N}_1$ не зависит от величин не принадлежащих $\mathcal{N}_2$, и т.д.

В этой статье мы покажем, как можно использовать условия гладкости второго типа в общем случае. Полученная форма остаточного члена позволяет нам сделать это с помощью стандартного сглаживания; см. замечание в самом начале п. 2.4.

Что касается других аспектов, кроме перемешивания и условий гладкости, результаты статьи близки к результатам из [28]. Поэтому мы можем сократить изложение, отослав читателя к [28] и [30]. То же касается примеров, которые были рассмотрены в специальном разделе в [28]. С другой стороны, дальнейшее изложение самодостаточно, и нет нужды обращаться к другим статьям, чтобы понять основные результаты работы.

Полные доказательства приведенных ниже теорем достаточно длинные и сложные, но многие их части идентичны доказательствам из [28] или [30]. Мы не будем их повторять, но приведем доказательства модифицированных результатов из [28].

1.2. Основная схема. Фиксируем целое $d \geq 2$ и предположим, что

$$\mathbf{E}X_i = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}|X_i|^{d+1} < \infty \quad \text{для всех} \quad i = 1, \dots, n.$$

Во всех разложениях d — наивысший порядок моментов, входящих в основной член разложений.

1.2.1. Функция h . Зафиксируем некоторую функцию h , положим $h_{\varepsilon+}(x) := \sup_{|y| \leq \varepsilon} h(x+y)$, $h_{\varepsilon-}(x) := \inf_{|y| \leq \varepsilon} h(x+y)$ и предположим, что

$$\omega(\varepsilon; h) := \sup_z \int (h_{\varepsilon+}(x+z) - h_{\varepsilon-}(x+z))(1 + |x|^{3d}) \Phi(x) dx \rightarrow 0, \quad \text{если } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.2.1)$$

где Φ — стандартная нормальная мера. Если h является индикатором интервала или если $h^{(1)}$, т.е. производная h , — равномерно ограниченная функция, что является одним из возможных условий, приведенных ниже, то очевидно, что (1.2.1) выполнено.

1.2.2. Разложения. Рассмотрим одно слагаемое $X = X_i$. Далее мы часто в обозначениях будем опускать индекс i , когда это не будет приводить к недоразумениям. Для каждого X введем d разложений

$$W = W_k + \widetilde{W}_k, \quad k = 1, \dots, d. \quad (1.2.2)$$

Отметим, что разложения (1.2.2) играют роль *свободного параметра*. В качестве примера, можно рассматривать W_k как частичную сумму слагаемых, т.е. $W_k = \sum_{X_j \in \mathcal{N}_k} X_j$, где $X \in \mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}_2 \subseteq \dots$, как выше, но это не является необходимым.

Пусть $W_0 = 0$ и $U_s = W_s - W_{s-1}$ для $1 \leq s \leq d$. Тогда $W_s = U_1 + \dots + U_s$, и $\widetilde{W}_s = U_{s+1} + \widetilde{W}_{s+1}$ для $s = 1, \dots, d-1$. (В предыдущем примере $U_s = \sum_{X_j \in \mathcal{N}_s \setminus \mathcal{N}_{s-1}} X_j$.) В случае независимых величин положим все W_k равными X .

1.2.3. Характеристика структуры зависимости. Пусть $\mathcal{F}_0 = \sigma\{X\}$ — σ -алгебра, порожденная X , и $\mathcal{F}_s = \sigma\{X, U_1, U_2, \dots, U_s\}$. Положим $\widetilde{\mathcal{F}}_s = \sigma\{U_{s+1}, \dots, U_d, \widetilde{W}_d\}$, $s = 0, 1, \dots, d-1$; $\widetilde{\mathcal{F}}_d = \sigma\{\widetilde{W}_d\}$. Таким образом, между $\mathcal{F}_s$ и $\widetilde{\mathcal{F}}_{s+1}$ существует «бреешь» U_{s+1} .

Вспоминая, что $X = X_i$, будем писать U_{ki} , $\widetilde{W}_{si}$ и $\mathcal{F}_{si}$ вместо U_k , $\widetilde{W}_s$ и $\mathcal{F}_s$ соответственно.

Мы говорим о *локальной зависимости*, если $\mathcal{F}_{si}$ и $\widetilde{\mathcal{F}}_{s+1,i}$ независимы для всех $s = 1, \dots, d-1$ и $i = 1, \dots, n$.

Используя определение (1.1.2), введем *характеристику зависимости*

$$K = \sup_{s,i} \alpha(\mathcal{F}_{si}, \widetilde{\mathcal{F}}_{s+1,i}). \quad (1.2.3)$$

В случае локальной зависимости $K = 0$.

В [28] была использована более грубая характеристика, а именно,

$$T = \sup_{s,i} \phi(\mathcal{F}_{si}, \widetilde{\mathcal{F}}_{s+1,i}), \quad (1.2.4)$$

где ϕ определено в (1.1.1). Далее мы рассмотрим простой пример, когда асимптотическая нормальность очевидна, хотя характеристика T

не является малой, а K мало. Для этого нам необходимы следующие представления:

$$\phi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{2} \left\{ \sup_{\xi_1 \in \mathcal{L}_1(\mathcal{A}), \xi_2 \in \mathcal{L}_\infty(\mathcal{B})} \frac{|\mathbf{E}\{\xi_1 \xi_2\} - \mathbf{E}\xi_1 \mathbf{E}\xi_2|}{\|\xi_1\|_1 \|\xi_2\|_\infty} \right\}, \quad (1.2.5)$$

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{2} \left\{ \sup_{\xi_1 \in \mathcal{L}_\infty(\mathcal{A}), \xi_2 \in \mathcal{L}_\infty(\mathcal{B})} \frac{|\mathbf{E}\{\xi_1 \xi_2\} - \mathbf{E}\{\xi_1\} \mathbf{E}\xi_2|}{\|\xi_1\|_\infty \|\xi_2\|_\infty} \right\}; \quad (1.2.6)$$

см., например, [9]. Доказательство того, что правая часть (1.2.5) не превосходит левую часть, см. в [9] и [17, лемма 1.1.9]; выбирая в качестве случайных величин индикаторы, можно практически достичь равенства. То же касается и (1.2.6).

Далее, во-первых, если для некоторого множества D и случайных величин ξ_1 и ξ_2

$$\mathbf{E}\{\xi_1 \xi_2 \mid D\} = \mathbf{E}\{\xi_1 \mid D\} \mathbf{E}\{\xi_2 \mid D\}, \quad (1.2.7)$$

то, как легко проверить,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\xi_1 \xi_2\} - \mathbf{E}\xi_1 \mathbf{E}\xi_2 &= \mathbf{P}(D^c) \left[\mathbf{E}\{\xi_1 \xi_2 \mid D^c\} + \mathbf{E}\{\xi_1; D\} \mathbf{E}\{\xi_2 \mid D\} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{E}\{\xi_2; D\} \mathbf{E}\{\xi_1 \mid D^c\} - \mathbf{E}\xi_1 \mathbf{E}\{\xi_2 \mid D^c\} \right], \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

где $\mathbf{P}(D), \mathbf{P}(D^c) \neq 0$.

Во-вторых, если $\xi_1 \in \mathcal{L}_\infty(\mathcal{A})$, $\xi_2 \in \mathcal{L}_\infty(\mathcal{B})$ и (1.2.7) выполняется, то, учитывая (1.2.8) и (1.2.6), получаем, что

$$\begin{aligned} 2\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &= \sup_{\xi_1 \in \mathcal{L}_\infty(\mathcal{A}), \xi_2 \in \mathcal{L}_\infty(\mathcal{B})} \frac{1}{\|\xi_1\|_\infty \|\xi_2\|_\infty} \mathbf{P}(D^c) \\ &\quad \times \left| \mathbf{E}\{\xi_1 \xi_2 \mid D^c\} + \mathbf{E}\{\xi_1; D\} \mathbf{E}\{\xi_2 \mid D\} - \mathbf{E}\{\xi_2; D\} \mathbf{E}\{\xi_1 \mid D^c\} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{E}\xi_1 \mathbf{E}\{\xi_2 \mid D^c\} \right| \leq 4\mathbf{P}(D^c). \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Рассмотрим теперь частный случай.

П р и м е р. Пусть $Z_1, Z_2, \dots$ — независимые случайные величины, распределенные так же как случайная величина Z , причем $\mathbf{E}Z = 0$, $\mathbf{E}Z^2 = 1$. Чтобы упростить дальнейшие вычисления, предположим, что Z симметрична и отделена от нуля, скажем, $|Z| > \frac{1}{2}$. Пусть $\beta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и для фиксированного n случайная величина $\eta_{(n)} = \pm\beta_n$ с равными вероятностями. Рассмотрим некоторое множество D_n такое, что $\mathbf{P}(D_n) = 1 - \beta_n$, и вектор

$$(Y_{1n}, \dots, Y_{nn}) = \begin{cases} (Z_1, \dots, Z_n) & \text{на множестве } D_n \\ & \text{(с вероятностью } 1 - \beta_n), \\ (\eta_{(n)}, \dots, \eta_{(n)}) & \text{на множестве } D_n^c \\ & \text{(с вероятностью } \beta_n) \end{cases}$$

(мы опускаем формальности определения всех случайных величин на одном пространстве). Пусть $S_n = Y_{1n} + \dots + Y_{nn}$. Очевидно, что последовательность $(S_n/\sqrt{n})$ асимптотически нормальна.

Интуитивно понятно, и мы убедимся в этом в п. 1.3, что в этом случае естественный выбор разложений (1.2.2) — это $W_k = W_{ki} = X_i$ для всех $k = 1, \dots, d$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $U_{1i} = X_i$.

Отметим, что $T \geq \phi(\mathcal{A}_1, \widetilde{\mathcal{A}}_2)$, где $\mathcal{A}_1 = \sigma(Y_{1n})$ и $\widetilde{\mathcal{A}}_2 = \sigma(Y_{2n})$.

Чтобы определить нижнюю границу для $\phi(\mathcal{A}_1, \widetilde{\mathcal{A}}_2)$, мы воспользуемся (1.2.5). Положим $\xi_1 = 1/Y_{1n}$ и $\xi_2 = \text{sign}(Y_{2n})$. Тогда, в силу симметрии и (1.2.8),

$$\mathbf{E}\{\xi_1 \xi_2\} - \mathbf{E}\xi_1 \mathbf{E}\xi_2 = \mathbf{P}(D_n^c) \mathbf{E}\{\xi_1 \xi_2 \mid D_n^c\}.$$

Так как $Y_{1n} = Y_{2n} = \eta_{(n)}$ на D_n^c , то

$$\mathbf{E}\{\xi_1 \xi_2\} - \mathbf{E}\xi_1 \mathbf{E}\xi_2 = \mathbf{P}(D_n^c) \mathbf{E}\{|\eta|^{-1} \mid D_n^c\} = \beta_n(\beta_n^{-1}) = 1.$$

Кроме того, учитывая (1.2.5) и то, что $|Z| > \frac{1}{2}$, получаем:

$$\phi(\mathcal{A}_1, \widetilde{\mathcal{A}}_2) \geq \frac{|\mathbf{E}\{\xi_1 \xi_2\} - \mathbf{E}\xi_1 \mathbf{E}\xi_2|}{\|\xi_1\|_1 \|\xi_2\|_\infty} = \frac{1}{\mathbf{E}\{|Z|^{-1}\}(1 - \beta_n) + (1/\beta_n)\beta_n} \geq \frac{1}{3}.$$

С другой стороны, мера зависимости $\alpha(\cdot, \cdot)$ в этом случае будет работать, учитывая (1.2.9); в нашем примере, благодаря выбору разложения, характеристика

$$K \leq 2\mathbf{P}(D_n^c) = 2\beta_n,$$

т.е. мала. Последняя оценка, примененная к общей оценке из теоремы 1, ведет к правильной скорости сходимости в центральной предельной теореме для достаточно малых β_n .

1.2.4. Обобщенные моменты и кумулянты. Пусть $\mu_{li} = \mathbf{E}\{(|X_i| + |U_{1i}| + \dots + |U_{di}|)^l\}$, $z_{ki} = \sum_{l=2}^k \mu_{li}$ и

$$\bar{\mu}_l = \sum_{i=1}^n \mu_{li}, \quad \bar{z}_k = \sum_{i=1}^n z_{ki}. \quad (1.2.10)$$

Для того чтобы прояснить порядок величин в (1.2.10), предположим, что W уже нормирована таким образом, что

$$|X_i| \leq \frac{Y}{\sqrt{n}} \quad \text{по распределению,} \quad (1.2.11)$$

где Y — положительная случайная величина с $(d+1)$ конечными моментами. (Для двух случайных величин X и Y скажем, что $X \leq Y$ по распределению, если $\mathbf{P}\{X > x\} \leq \mathbf{P}\{Y > x\}$ для любого x .) Также предположим, что случайные величины U_i являются суммами ограниченного числа случайных величин X . Тогда легко показать, что $\bar{\mu}_{l+2} = O(n^{-l/2})$ и $\bar{z}_k = O(1)$.

Далее мы определим модифицированное понятие кумулянтов случайной величины W . В [28] было показано, что в общем случае зависимых слагаемых разумно, вместо обычных кумулянтов W , рассматривать несколько иные характеристики. Это позволяет упростить представление и получить лучший остаточный член разложения. Кроме того, эти характеристики могут использоваться, когда традиционные приемы не работают. Пример этого дается в [28] и [30], и мы не будем повторять его здесь. Обозначим упомянутые характеристики $\bar{\gamma}_k$ и определим их следующим образом.

Так как $\mathbf{E}X_i = 0$, определим первый модифицированный кумулянт как $\bar{\gamma}_1 = 0$. Перейдем к $\bar{\gamma}_2$. Если X_i не зависит от $\widetilde{W}_{1i}$ для каждого i , то, поскольку $\mathbf{E}X_i = 0$, дисперсия W будет равна $\sum_{i=1}^n \mathbf{E}\{X_i U_{1i}\}$. Обозначим эту величину $\bar{\gamma}_2$ и будем рассматривать ее как модификацию дисперсии — второго кумулянта — в общем случае (т.е. и тогда, когда X_i зависит от $\widetilde{W}_{1i}$). Заметим, что $\bar{\gamma}_2$ зависит от выбора разложений (1.2.2). В случае локальной зависимости $\bar{\gamma}_2$ совпадает с $\mathbf{D}W$.

Таким образом, доказывая предельную теорему или устанавливая асимптотические разложения в ней, мы нормируем W таким образом, чтобы единице была равна не дисперсия, а $\bar{\gamma}_2$.

Для того чтобы определить третий модифицированный кумулянт, мы опять должны рассмотреть случай локальной зависимости и написать выражение для третьего кумулянта W в терминах смешанных моментов третьего порядка для случайных величин X_i, U_{1i} и U_{2i} . Таким образом, мы получим определение $\bar{\gamma}_3$ в общем случае; и т.д. для всех $\bar{\gamma}_k$, $k = 1, \dots, d$, которые совпадают с соответствующими кумулянтами в случае локальной зависимости. Точная формула для $\bar{\gamma}_k$ будет приведена в п. 2.1 (формула (2.1.4)), а сейчас мы только отметим, что

$$|\bar{\gamma}_k| \leq C(k) \bar{\mu}_k,$$

где константа $C(k)$ зависит только от k ; см. п. 2.1.

В случае (1.2.11) отсюда следует, что $\bar{\gamma}_2 = O(1)$, $\bar{\gamma}_{l+2} = O(n^{-l/2})$, для $l \geq 0$.

1.3. Результат для гладких функций h . Определим (см., например, [5], [26]) знакопеременную меру

$$Q_\nu(dx) = \sum_{(\nu)} p_{\mathbf{k}\nu} L_{\nu+2s}(dx), \quad (1.3.1)$$

где $L_m(dx) = (-1)^m \varphi^{(m)}(x) dx$, $\varphi(x)$ означает стандартную нормальную плотность,

$$p_{\mathbf{k}\nu} = \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{k_m!} \left(\frac{\bar{\gamma}_{m+2}}{(m+2)!} \right)^{k_m}, \quad (1.3.2)$$

$s = s(\mathbf{k}) = k_1 + \dots + k_\nu$ и суммирование в $\sum_{(\nu)}$ ведется по всем векторам $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_\nu)$ неотрицательных целых чисел таких, что

$k_1 + 2k_2 + \dots + \nu k_\nu = \nu$. Отличие от стандартной ситуации состоит в том, что в (1.3.2) вместо кумулянтов случайной величины W мы используем характеристики $\bar{\gamma}_k$.

Пусть для фиксированного выше d

$$\bar{\nu}_l = \sum_{i=1}^n \mu_{d+1,i}^{l/(d+1)} \quad \text{и} \quad \bar{\Pi}_d = \sum_{l=1}^d \bar{\nu}_l K^{1-l/(d+1)}. \quad (1.3.3)$$

Эквивалентный способ определения $\bar{\Pi}_d$ — это положить

$$\Pi_{di} = \sum_{l=1}^d \mu_{d+1,i}^{l/(d+1)} K^{1-l/(d+1)} \quad \text{и} \quad \bar{\Pi}_d = \sum_{i=1}^n \Pi_{di}$$

(таким образом, черта опять означает суммирование характеристик отдельных слагаемых).

Чтобы определить порядок $\bar{\Pi}_d$, предположим опять, что (1.2.11) выполняется и U_i являются суммами ограниченного числа X -ов. Тогда, как легко видеть, $\mu_{d+1,i}^{1/(d+1)} = O(n^{-1/2})$, и, следовательно,

$$\bar{\nu}_1 = O(\sqrt{n}), \quad \bar{\nu}_2 = O(1) \quad \text{и} \quad \bar{\nu}_l = O(n^{-(l-2)/2}) \quad \text{для} \quad l > 2.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_d = O \left(\sqrt{n} K^{d/(d+1)} + K^{(d-1)/(d+1)} + \frac{1}{\sqrt{n}} K^{(d-2)/(d+1)} \right. \\ \left. + \frac{1}{n} K^{(d-3)/(d+1)} + \dots + \frac{1}{n^{(d-2)/2}} K^{1/(d+1)} \right). \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Слагаемые в (1.3.4) представляют своего рода «взаимообмен» между степенями n и K . (Последняя характеристика обычно зависит от n .) Легко проверить, что если $K = K(n) = o(n^{-1/(2(d+1))})$, то последний член является наихудшим. Далее мы увидим, как это влияет на точность разложения.

Пусть

$$\hat{h}_p = \max_{k=0,\dots,p} \|h^{(k)}\|_\infty,$$

где $h^{(k)}$ — k -я производная h , и далее везде допустим, что W уже нормирована таким образом, что

$$\bar{\gamma}_2 = 1. \quad (1.3.5)$$

Теорема 1. *Существует некоторая константа $C(d)$ такая, что*

$$\mathbf{E} h(W) - \Phi(h) = \sum_{\nu=1}^{d-2} \int h(x) Q_\nu(dx) + R_d, \quad (1.3.6)$$

где $\Phi(h) = \int h(x) \Phi(dx)$ и

$$|R_d| \leq C(d) \hat{h}_{d-1} (1 + \bar{z}_d)^{d-2} [\bar{\mu}_{d+1} + \bar{\Pi}_d]. \quad (1.3.7)$$

Чтобы пояснить приведенный выше результат, снова рассмотрим случай (1.2.11) и ограниченное число слагаемых U .

Для краткости обозначим последнее слагаемое главного члена разложения (1.3.6), т.е. $\int h(x) Q_{d-2}(dx)$, символом Γ_n . В рассматриваемом случае $\Gamma_n = O(n^{-(d-2)/2})$, и для больших n это наименьшее слагаемое в главном члене разложения.

Теперь рассмотрим порядок остаточного члена R_d . Как мы уже видели, $z_d = O(1)$. Заметим, что в общей ситуации член $(1 + \bar{z}_d)^{d-2}$ в (1.3.7) также ограничен и близок к $(1 + \bar{\mu}_2)^{d-2}$ благодаря нормировке и так как $\bar{\mu}_k$ «мало» для $k \geq 3$.

Член $\bar{\mu}_{d+1}$ в (1.3.7) имеет порядок $O(n^{-(d-1)/2})$.

Рассмотрим последний член остатка, т.е. $\bar{\Pi}_d$. Мы видим, что если $K = K(n) = o(n^{-1/(2(d+1))})$, то $\bar{\Pi}_d = O(n^{-(d-2)/2} K^{1/(d+1)})$, т.е. в любом случае остаток для больших n меньше, чем Γ_n . Как легко вычислить, для $K = o(n^{-(d+1)/2})$, что является мягким требованием, $\bar{\Pi}_d = o(n^{-(d-1)/2})$, т.е. $\bar{\Pi}_d$ меньше, чем $\bar{\mu}_{d+1}$, для больших n , и весь остаточный член имеет порядок $\bar{\mu}_{d+1} = O(n^{-(d-1)/2})$.

Интересно сравнить этот результат с результатом из [28]. В случае (1.2.11) аналог $\bar{\Pi}_d$ в [28] имеет порядок $\sqrt{n}T$, где T определено соотношением (1.2.4). «Плата» за переход к лучшей характеристике K состоит в том, что мы возводим K в степень меньшую единицы (хотя и умножаем K на $O(n^{-(d-2)/2})$). Если, например, $K = K(n)$ убывает экспоненциально, то, так как $\bar{\mu}_{d+1}$ убывает как степенная функция, указанное обстоятельство не влияет на порядок остатка.

1.4. Случай, когда распределение W гладкое. В этом случае условие гладкости h может быть ослаблено. Рассмотрим слагаемое $X = X_{\bar{i}}$, опустив на время индекс i . Обозначим $q_s(\cdot, \omega)$ условную плотность $\bar{W}_s$ относительно $\mathcal{F}_s$, полагая, что она существует для п.в. ω из вероятностного пространства. Мы опустим стандартные вопросы неединственности и регулярности. Если для некоторого m , $1 \leq m \leq d-1$, плотность $q_s(x, \omega)$ является m раз дифференцируемой по x , то положим

$$\psi_m = \max_{s=0, \dots, d} \operatorname{ess\,sup}_{\omega} \left\{ \max_{k=0, \dots, m-1} \|q_s^{(k)}(\cdot, \omega)\|_{\infty} + \max_{k=0, \dots, m} \|q_s^{(k)}(\cdot, \omega)\|_1 \right\}.$$

Заметим, что так как $q^{(0)}$ — плотность, то $\psi_m \geq 1$. Пусть $\psi_0 \equiv 1$.

В основном утверждении, приведенном ниже, индекс m в ψ_m играет роль свободного параметра, и случай, когда плотность $q_s(\cdot, \omega)$ не существует, соответствует выбору $m = 0$.

Восстанавливая индекс i , мы напишем $\psi_m = \psi_{mi}$ и положим

$$\Psi_m = \max_{1 \leq i \leq n} \psi_{mi}.$$

Ниже мы будем считать, что величины Ψ_m , $\|h^{(k)}\|_{\infty}$ и т.д. равны бесконечности не только, когда они бесконечны, но и когда они не су-

существуют. Это не вызовет недоразумения. Кроме того, условимся, что $\infty \cdot 0 = 0$.

Предположим теперь, что существует некоторое число $a = a(d)$ такое, что

$$\omega(\varepsilon; h) \leq a \|h\|_\infty \varepsilon, \quad (1.4.1)$$

где $\omega(\varepsilon; h)$ определена в (1.2.1). Это верно, например, если h — индикатор интервала. Без потери общности предположим, что $a \geq 1$.

Положим $\hat{\gamma}_k = \max\{\bar{\gamma}_i; 2 \leq i \leq k\}$ и заметим, что в силу (1.3.5), $\hat{\gamma}_k \geq 1$, и так как обычно $\bar{\gamma}_i$ мала для $i > 2$, характеристика $\hat{\gamma}_k$ обычно ограничена.

Теорема 2. *Существует некоторая константа $C(d)$ такая, что разложение (1.3.6) выполняется с остаточным членом R_d таким, что для любого $m = 0, \dots, d-1$*

$$|R_d| \leq C(d) \hat{h}_{d-1-m} \Psi_m(1 + \bar{z}_d)^{d-2} \left\{ \bar{\mu}_{d+1} + (\hat{\gamma}_d^{d-2} a)^{1-1/\tilde{m}} \bar{\Pi}_d^{1/\tilde{m}} \right\}, \quad (1.4.2)$$

где $\tilde{m} = \max\{1, m\}$. В случае $m = 0, 1$ условие (1.4.1) можно заменить условием (1.2.1).

Далее мы обсудим оценку (1.4.2). Если положить $m = 0$, т.е. не требовать гладкости распределений W_s , то из оценки (1.4.2) мы получим теорему 1. Если $m = 1$, т.е. предположить, что все W_s имеют ограниченные и интегрируемые условные плотности, то можно снизить требуемый порядок гладкости h на единицу, т.е.

$$|R_d| \leq C(d) \hat{h}_{d-2} \Psi_1(1 + \bar{z}_d)^{d-2} \left\{ \bar{\mu}_{d+1} + \bar{\Pi}_d \right\}$$

(ср. (1.3.7)).

Чем более гладко распределение W_s , тем ниже может быть порядок конечной производной h , но «плата» за это состоит в том, что мы возводим $\bar{\Pi}_d$ в степень меньшую единицы. В частности, если Ψ_{d-1} конечно, то можно положить $m = d-1$ и рассмотреть любую ограниченную функцию h , для которой выполняется (1.4.1). Это приведет к оценке

$$\begin{aligned} |R_d| &\leq C(d) \|h\|_\infty \Psi_{d-1}(1 + \bar{z}_d)^{d-2} \left\{ \bar{\mu}_{d+1} + (\hat{\gamma}_d^{d-2} a)^{(d-2)/(d-1)} \bar{\Pi}_d^{1/(d-1)} \right\} \\ &\leq C(d) \|h\|_\infty \Psi_{d-1}(1 + \bar{z}_d)^{d-2} (\hat{\gamma}_d^{d-2} a)^{(d-2)/(d-1)} \left\{ \bar{\mu}_{d+1} + \bar{\Pi}_d^{1/(d-1)} \right\}. \end{aligned}$$

(Последнее неравенство верно, так как $\hat{\gamma}_d^{d-2} \geq 1$ и $a \geq 1$.)

Если $\bar{z}_d$, $\hat{\gamma}_d$ и Ψ_{d-1} ограничены, то

$$R_d = O\left(\bar{\mu}_{d+1} + \bar{\Pi}_d^{1/(d-1)}\right).$$

В случае (1.2.11), если, например, $K = K(n)$ сходится к нулю экспоненциально, то $R_d = O(\bar{\mu}_{d+1})$.

2. Доказательства

2.1. Некоторые определения. Прежде всего мы напомним некоторые обозначения, введенные в [28] и [30]. Рассмотрим слагаемое $X = X_i$. На время (если это не приведет к недоразумению) опустим индекс i в X_i и в соответствующих членах разложения W_{ki} , U_{si} и моментах μ_{ki} (см. п. 1.2).

Имеем $W_k = U_1 + \dots + U_k$, $W = W_k + \widetilde{W}_k$. Положим

$$\mathbf{V}_s = (W_s, U_{s+1}, \dots, U_r, U_{r+1}), \quad \mathbf{U} = \mathbf{V}_0 = (U_1, \dots, U_r, U_{r+1}).$$

Для $s + l \leq r + 1$, $p \leq l$ определим

$$\chi_l(s, p) = \sum_{|\mathbf{m}|=l}^{(p)} \frac{1}{\mathbf{m}!} \mathbf{E} \mathbf{V}_s^{\mathbf{m}} \quad \text{и} \quad \vartheta_{l+1}(p) = \sum_{|\mathbf{m}|=l}^{(p)} \frac{1}{\mathbf{m}!} \mathbf{E} \{X \mathbf{U}^{\mathbf{m}}\},$$

где $\sum_{|\mathbf{m}|=l}^{(p)}$ — сумма по всем $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_{r+1})$ таким, что $m_i = 1, \dots, r + 1$ для всех $i \leq p$, $m_i = 0$ для $p < i \leq r + 1$ и $|\mathbf{m}| = m_1 + \dots + m_{r+1} = l$; кроме того, $\mathbf{U}^{\mathbf{m}} = \prod_{i=1}^{r+1} U_i^{m_i}$, $\mathbf{V}_s^{\mathbf{m}} = W_s^{m_1} U_{s+1}^{m_2} \dots U_{r+1}^{m_{r-s+2}}$ и $\mathbf{m}! = m_1! \dots m_{r+1}!$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} |\chi_l(s, p)| &\leq \sum_{|\mathbf{m}|=l}^{(p)} \frac{1}{\mathbf{m}!} \mathbf{E} |\mathbf{V}_s^{\mathbf{m}}| \leq \frac{1}{l!} \mathbf{E} \{(|W_s| + |U_{s+1}| + \dots + |U_{s+l-1}|)^l\} \\ &\leq \frac{1}{l!} \mathbf{E} \{(|U_1| + \dots + |U_{s+l-1}|)^l\} \leq \frac{1}{l!} \mathbf{E} \{(|U_1| + \dots + |U_r|)^l\} \\ &\leq \mathbf{E} \{(|X| + |U_1| + \dots + |U_{r+1}|)^l\} = \mu_l. \end{aligned}$$

Аналогично

$$|\vartheta_l(s)| \leq \mu_l. \quad (2.1.1)$$

Пусть $\Upsilon_{00} = 1$, $\Upsilon_{l0} = 0$ для $l \geq 1$ и для $m \geq 1$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{lm} &= \Upsilon_{lm}(s) \\ &= \sum_{l_1 + \dots + l_m = l} \sum_{p_1=1}^{l_1} \dots \sum_{p_m=1}^{l_m} \chi_{l_1}(s, p_1) \chi_{l_2}(s + p_1, p_2) \\ &\quad \dots \chi_{l_m}(s + p_1 + \dots + p_{m-1}, p_m). \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Для $l \leq r$ положим

$$\begin{aligned} c(s, l) &= \sum_{m=0}^{[l/2]} (-1)^m \Upsilon_{lm}(s), \quad \tilde{c}(s, l) = \sum_{m=0}^{[l/2]} |\Upsilon_{lm}(s)| \\ &\quad (c(s, 0) = 1, \quad c(s, 1) = 1, \quad s \geq 0). \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Вспоминая, что приведенные выше величины зависят от индекса i , запишем

$$\frac{\gamma_{m+1,i}}{m!} = \sum_{t+l=m, l \geq 1} \sum_{s=1}^l \vartheta_{l+1,i}(s) c_i(s+1, t), \quad \bar{\gamma}_{m+1} = \sum_{i=1}^n \gamma_{m+1,i}, \quad (2.1.4)$$

$m = 1, \dots, r$.

Последняя формула дает формальное определение величин $\bar{\gamma}_m$, введенных в п. 1.2.4. Заметим также, что, как нетрудно видеть,

$$\begin{aligned} \mu_l \mu_k &\leq \mu_{l+k}, \quad \text{и, следовательно,} \\ \Upsilon_{lm}, c(s, l), \tilde{c}(s, l) &\leq C(l) \mu_l \quad \text{для всех } l \leq r, \\ \gamma_{m+1} &\leq C(m) \mu_{m+1}, \quad \bar{\gamma}_{m+1} \leq C(m) \bar{\mu}_{m+1} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

для констант $C(l)$, зависящих только от l .

2.2. Основное представление. Допустим, на время, что f — произвольная достаточно гладкая функция. Положим

$$\begin{aligned} \hat{f}_l &= \max_{k \leq l} \|f^{(k)}\|_{\infty}, \\ \Gamma_l(f) &= \max_{1 \leq i \leq n} \max_{s \leq r+1} \sup_x \sup_{\omega} \left| \mathbf{E} \{ f^{(l)}(\tilde{W}_{si} + x) \mid \mathcal{F}_{si} \}(\omega) \right|, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

при условии, что приведенные выше величины корректно определены. Очевидно, что $\Gamma_l(f) \leq \hat{f}_l$.

Пусть для целого $r \leq d$

$$\bar{\Pi}_r = \sum_{l=1}^r \bar{\nu}_l K^{1-l/(d+1)}, \quad (2.2.2)$$

где $\bar{\nu}_l$ определено в (1.3.3). Заметим, что (2.2.2) совпадает с определением $\bar{\Pi}_d$ из (1.3.3).

Доказательства теорем, приведенных выше, опираются на следующую формулу.

Предложение 1. Если $\mathbf{E}X_i = 0$ и $\mathbf{E}|X_i|^{d+1} < \infty$ для всех i , то для любого целого $r \leq d-1$ и достаточно гладкой f

$$\mathbf{E}\{Wf(W)\} = \sum_{m=1}^r \frac{\bar{\gamma}_{m+1}}{m!} \mathbf{E}f^{(m)}(W) + B_r(f), \quad (2.2.3)$$

где

$$|B_r(f)| \leq C(r) [\bar{\mu}_{r+2} \Gamma_{r+1}(f) + \hat{f}_r \bar{\Pi}_{r+1}]. \quad (2.2.4)$$

Предложение 1 используется для получения разложений Эджворта следующим образом. Напомним, что $\mathbf{E}X_i = 0$, $\bar{\gamma}_2 = 1$. Тогда из (2.2.3) следует, что

$$\mathbf{E}\{f'(W) - Wf(W)\} = - \sum_{m=2}^r \frac{\bar{\gamma}_{m+1}}{m!} \mathbf{E}f^{(m)}(W) - B_r(f). \quad (2.2.5)$$

Пусть f — функция Стейна, являющаяся решением дифференциального уравнения $f'(w) - wf(w) = h(w) - \Phi(h)$ (см., например, [34], [35]), т.е.

$$f(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \int_{-\infty}^x [h(t) - \Phi(h)] \varphi(t) dt. \quad (2.2.6)$$

Тогда

$$\mathbf{E} h(W) - \Phi(h) = - \sum_{m=2}^r \frac{\bar{\gamma}_{m+1}}{m!} \mathbf{E} f^{(m)}(W) - B_r(f). \quad (2.2.7)$$

Следующий (достаточно длинный) этап состоит в выполнении индукции относительно порядка разложений, причем индукционное предположение применяется к членам $\mathbf{E} f^{(m)}(W)$ в (2.2.7). Это сделано в п. 2.3.2.

Предложение 1 очень похоже на предложение 3.12 из [30], но немного отличается от последнего определением $\bar{\Pi}_r$. Упомянутые предложения не сравнимы: для каждого из них существует ситуация, когда другое оказывается сильнее. Однако доказательство соотношений (2.2.3), (2.2.4) практически такое же, как и доказательство в [30]. Поэтому здесь мы только перечислим то, что надо изменить в доказательстве из [30]. Фактически, надо сделать только одну вещь: во всем доказательстве в [30] заменить члены типа $\mu_{r+2}^{1/(r+2)} K^{1-l/(r+2)}$ (где r — переменный параметр) на $\mu_{d+1}^{1/(d+1)} K^{1-l/(d+1)}$ (где d — фиксированный параметр). Это приведет к следующему.

1. Определение (5.10) в [30] должно быть заменено на $\Pi_k = \Pi_{ki} = \sum_{l=1}^k \mu_{d+1,i}^{l/(d+1)} K^{1-l/(d+1)}$.

2. Неравенство (5.11) из [30], которое следует из этого определения и где применено неравенство Давыдова из [10], должно быть заменено на

$$\begin{aligned} |T_r| &\leq 8\mu_{d+1}^{1/(d+1)} \hat{f}_0 K^{1-1/(d+1)} + 8 \sum_{l=1}^r \sum_{s=1}^l \sum_{|\mathbf{m}|=l} (s) \frac{1}{\mathbf{m}!} \mu_{d+1}^{(l+1)/(d+1)} \hat{f}_l K^{1-(l+1)/(d+1)} \\ &\leq C(r) \hat{f}_r \Pi_{r+1}. \end{aligned}$$

3. Последние четыре неравенства на с. 81 в [30] должны выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} &\leq C(r) \left\{ \mu_{r+2} \Gamma_{r+1}(f) + \hat{f}_r \Pi_{r+1} + \hat{f}_r \sum_{l=1}^r \mu_{r+2}^{(l+1)/(r+2)} \sum_{s=1}^{r-l} \mu_{r+2}^{s/(r+2)} K^{1-s/(r+2)} \right\} \\ &\leq C(r) \left\{ \mu_{r+2} \Gamma_{r+1}(f) + \hat{f}_r \Pi_{r+1} + \hat{f}_r \sum_{l=1}^r \sum_{s=1}^{r-l} \mu_{d+1}^{(l+s+1)/(d+1)} K^{1-(l+s+1)/(d+1)} \right\} \\ &\leq C(r) \left\{ \mu_{r+2} \Gamma_{r+1}(f) + \hat{f}_r \Pi_{r+1} + \hat{f}_r \sum_{l=1}^r \sum_{p=l+2}^{r+1} \mu_{d+1}^{p/(d+1)} K^{1-p/(d+1)} \right\} \\ &\leq C(r) \left\{ \mu_{r+2} \Gamma_{r+1}(f) + \hat{f}_r \Pi_{r+1} \right\}. \end{aligned}$$

4. В первой формуле на с. 82 $K(r)$ должно быть заменено на Π_{r+1} .
 5. Первое неравенство на с. 83 должно выглядеть так:

$$\begin{aligned} |T_{ks}(f)| &\leq 8 \sum_{l=1}^k \sum_{p=1}^l \sum_{|\mathbf{m}|=l} \binom{p}{\mathbf{m}} \frac{1}{\mathbf{m}!} \|\mathbf{V}_s^{\mathbf{m}}\|_{(r+2)/l} \hat{f}_l K^{1-l/(d+1)} \\ &\leq 8 \hat{f}_k \sum_{l=1}^k \sum_{p=1}^l \sum_{|\mathbf{m}|=l} \binom{p}{\mathbf{m}} \mu_{d+1}^{l/(d+1)} K^{1-l/(d+1)} \leq C(k) \hat{f}_k \Pi_k. \end{aligned}$$

6. Последняя цепочка неравенств на с. 84 должна быть изменена следующим образом:

$$\begin{aligned} |M_{sk}(f)| &\leq C(k) \left(\Gamma_{k+1}(f) \sum_{l=0}^k \mu_l \mu_{k+1-l} + \hat{f}_k \sum_{l=0}^k \mu_l \sum_{s=1}^{k-l} \mu_{d+1}^{s/(d+1)} K^{1-s/(d+1)} \right) \\ &\leq C(k) \left(\Gamma_{k+1}(f) \mu_{k+1} + \hat{f}_k \sum_{l=0}^k \sum_{s=1}^{k-l} \mu_{d+1}^{(s+l)/(d+1)} K^{1-s/(d+1)} \right) \\ &\leq C(k) \left(\Gamma_{k+1}(f) \mu_{k+1} + \hat{f}_k \sum_{l=0}^k \sum_{s=1}^{k-l} \mu_{d+1}^{(s+l)/(d+1)} K^{1-(s+l)/(d+1)} \right) \\ &\leq C(k) \left(\Gamma_{k+1}(f) \mu_{k+1} + \hat{f}_k \sum_{l=0}^k \sum_{p=1+l}^k \mu_{d+1}^{p/(d+1)} K^{1-p/(d+1)} \right) \\ &\leq C(k) \left(\Gamma_{k+1}(f) \mu_{k+1} + \hat{f}_k \Pi_k \right). \end{aligned}$$

2.3. Доказательство теоремы 2. Прежде всего мы докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Существует константа $C(d)$ такая, что разложение (1.3.6) справедливо с*

$$|R_d| \leq C(d)(1 + \bar{z}_d)^{d-2} \{ \hat{h}_{d-1-m} \Psi_m \bar{\mu}_{d+1} + \hat{h}_{d-2} \bar{\Pi}_d \} \quad (2.3.1)$$

для всех $m = 0, \dots, d-1$.

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы 1 из [28], но несколько сложнее. Для полноты картины мы вкратце повторим некоторые моменты из [28].

Прежде всего, нам необходимы следующие леммы.

2.3.1. Леммы.

Лемма 1 ([28]). *Для $k, l \geq 2$*

$$\bar{\mu}_k \bar{\mu}_l \leq \bar{\mu}_{k+l-2} \bar{\mu}_2. \quad (2.3.2)$$

Везде далее f обозначает функцию Стейна из (2.2.6).

Лемма 2. *Для любого $k \geq 1$ выполнено неравенство $\|f^{(k)}\|_{\infty} \leq C(k) \|h^{(k-1)}\|_{\infty}$, где константа $C(k)$ зависит только от k .*

Доказательство можно найти в [1]; для $k = 1, 2$ — в [35].

Далее, заметим, что f можно представить как (см. [1])

$$f(x) = \left(-I(x \geq 0) \int_0^\infty + I(x < 0) \int_{-\infty}^0 \right) \times e^{-xz - z^2/2} [h(x+z) - \Phi(h)] dz. \quad (2.3.3)$$

Дифференцируя (2.3.3), для $k \geq 1$ получим, что

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \Phi(h) G(x; 1; k, 0) + \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} \binom{k}{m} G(x; h; k-m, m), \quad (2.3.4)$$

где

$$G(x; h; l, m) = \left(-I(x \geq 0) \int_0^\infty + I(x < 0) \int_{-\infty}^0 \right) z^l e^{-xz - z^2/2} h^{(m)}(x+z) dz.$$

Положим $\Phi_k(h) = \int_{-\infty}^\infty z^k h(z) \varphi(z) dz$ (так что $\Phi(h) = \Phi_0(h)$) и для случайной величины Y определим

$$\Lambda_r(h; Y) = \max_{1 \leq t \leq r^3, l \leq r^3, \nu \leq r} \left| \mathbf{E}\{Y^t G(Y; h; l+t-1, \nu)\} \right| + \max_{l \leq r^3, \nu \leq r} \left| \mathbf{E}G(Y; h; l, \nu) \right| + |\mathbf{E}h^{(r)}(Y)| + \max_{l \leq r^3} |\Phi_l(h)|. \quad (2.3.5)$$

Сложное выражение в (2.3.5) и, в частности, член r^3 необходимы для индукции в доказательствах двух следующих лемм из [28].

Лемма 3 ([28]). Для любого целого $r \geq 2$, достаточно гладкой функции h и случайной величины Y

$$|\mathbf{E}f^{(r+1)}(Y)| \leq C(r) \Lambda_r(h; Y), \quad (2.3.6)$$

и для $p = 2, \dots, r$

$$\Lambda_{r+1-p}(f^{(p)}; Y) \leq C(r) \Lambda_r(h; Y). \quad (2.3.7)$$

Лемма 4 ([28]). Пусть Y — случайная величина с плотностью $p(x)$ такая, что для некоторого m , $1 \leq m \leq r$,

$$p_m := \max_{k \leq m-1} \|p^{(k)}\|_\infty + \max_{k \leq m} \|p^{(k)}\|_1 < \infty.$$

Тогда

$$\Lambda_r(h; Y) \leq C(r) p_m \max_{k=0, \dots, r-m} \|h^{(k)}\|_\infty. \quad (2.3.8)$$

Для $m = 0$ оценка (2.3.8) всегда верна с $p_0 = 1$.

Теперь мы можем перейти непосредственно к доказательству теоремы 3.

2.3.2. Доказательство теоремы 3. Пусть $\Lambda_r(h; Y; i, s, \omega)$ — это величина $\Lambda_r(h; Y)$ в (2.3.5), где математическое ожидание $\mathbf{E}$ заменено на $\mathbf{E}\{ \cdot | \mathcal{F}_{si} \}$. Тогда, учитывая (2.3.6),

$$\Gamma_{r+1}(f) \leq C(r) \max_{1 \leq i \leq n} \max_{s \leq r+1} \sup_x \operatorname{ess\,sup}_{\omega} \Lambda_r(h; \widetilde{W}_{si} + x; i, s, \omega) =: C(r) \Lambda_r(h). \quad (2.3.9)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |B_r(f)| &\leq C(r) [\bar{\mu}_{r+2} \Gamma_{r+1}(f) + \hat{f}_r \bar{\Pi}_{r+1}] \\ &\leq C(r) [\bar{\mu}_{r+2} \Lambda_r(h) + \hat{h}_{r-1} \bar{\Pi}_{r+1}] \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

в силу леммы 2.

Прежде чем доказывать теорему 3, мы докажем следующее более сложное и более сильное утверждение: для $1 \leq t \leq d-1$

$$\mathbf{E} h(W) - \Phi(h) = \sum_{\nu=1}^{t-1} \int h(x) Q_{\nu}(dx) + K_t(h) \quad (2.3.11)$$

или

$$\mathbf{E} h(W) = \sum_{\nu=0}^{t-1} \int h(x) Q_{\nu}(dx) + K_t(h), \quad (2.3.12)$$

где $Q_0(dx) = \Phi(dx)$ и

$$|K_t(h)| \leq C(t)(1 + \bar{z}_{t+1})^{t-1} [\bar{\mu}_{t+2} \Lambda_t(h) + \hat{h}_{t-1} \bar{\Pi}_{t+1}]. \quad (2.3.13)$$

Заметим, что случай $t = 1$ уже был доказан — см. (2.2.7) и (2.3.10) (для $r = 1$, используя также соотношение $h(W) - \Phi(h) = f'(W) - Wf(W)$ и лемму 2). Следовательно, нам осталось доказать по индукции случай $t = r$, полагая, что соотношения (2.3.12), (2.3.13) справедливы для $1 \leq t \leq r-1$. Учитывая (2.2.7), затем по гипотезе индукции, примененной к $f^{(p)}$ для $t-1 = r-p$, и окончательно по (1.3.1), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E} h(W) - \Phi(h) &= - \sum_{p=2}^r \frac{\bar{\gamma}_{p+1}}{p!} \left(\sum_{\nu=0}^{r-p} \int f^{(p)}(x) Q_{\nu}(dx) + K_{r-p+1}(f^{(p)}) \right) \\ &\quad - B_r(f) = - \sum_{p=2}^r \frac{\bar{\gamma}_{p+1}}{p!} \sum_{\nu=0}^{r-p} \sum_{(\nu)} p_{k\nu} \int f^{(p)}(x) L_{\nu+2s}(dx) \\ &\quad - \sum_{p=2}^r \frac{\bar{\gamma}_{p+1}}{p!} K_{r-p+1}(f^{(p)}) - B_r(f). \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Нетрудно видеть, что из (2.3.7) следует, что

$$\Lambda_{r+1-p}(f^{(p)}) \leq C(r) \Lambda_r(h). \quad (2.3.15)$$

Используя (2.1.5), леммы 1 и 2, неравенство (2.3.15) и гипотезу индукции для $K_{r-p+1}(f^{(p)})$, и снова допуская, что $C(r)$ различна для разных соотношений и зависит только от r , мы получим

$$\begin{aligned} & \sum_{p=2}^r |\bar{\gamma}_{p+1} K_{r-p+1}(f^{(p)})| \\ & \leq C(r) \sum_{p=2}^r \bar{\mu}_{p+1} (1 + \bar{z}_{r-p+2})^{r-p} [\bar{\mu}_{r-p+3} \Lambda_{r+1-p}(f^{(p)}) + \hat{f}_r \bar{\Pi}_{r-p+2}] \\ & \leq C(r) (1 + \bar{z}_r)^{r-2} \left[\bar{\mu}_2 \bar{\mu}_{r+2} \Lambda_r(h) + \hat{h}_{r-1} \sum_{p=2}^r \bar{\mu}_{p+1} \bar{\Pi}_{r-p+2} \right]. \end{aligned}$$

Для последней суммы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{p=2}^r \bar{\mu}_{p+1} \bar{\Pi}_{r-p+2} &= \sum_{p=2}^r \bar{\mu}_{p+1} \sum_{l=1}^{r-p+2} \bar{\nu}_l K^{1-l/(d+1)} \\ &= \bar{\nu}_1 K^{1-1/(d+1)} \left(\sum_{p=2}^r \bar{\mu}_{p+1} \right) + \sum_{p=2}^r \bar{\mu}_{p+1} \sum_{l=2}^{r-p+2} \bar{\nu}_l K^{1-l/(d+1)} \\ &= \bar{\nu}_1 K^{1-1/(d+1)} \sum_{p=2}^r \bar{\mu}_{p+1} + \sum_{l=2}^r \bar{\nu}_l K^{1-l/(d+1)} \sum_{p=2}^{r-l+2} \bar{\mu}_{p+1} \\ &\leq \bar{\nu}_1 K^{1-1/(d+1)} \bar{z}_{r+1} + \sum_{l=2}^r \bar{\nu}_l K^{1-l/(d+1)} \bar{z}_{r-l+3} \leq \bar{z}_{r+1} \bar{\Pi}_r \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\sum_{p=2}^r |\bar{\gamma}_{p+1} K_{r-p+1}(f^{(p)})| \leq C(r) (1 + \bar{z}_{r+1})^{r-1} (\bar{\mu}_{r+2} \Lambda_r(h) + \hat{h}_{r-1} \bar{\Pi}_r).$$

Учитывая (2.3.10), получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} |K_r(h)| &\leq C(r) [\bar{\mu}_{r+2} \Lambda_r(h) + \hat{h}_{r-1} \bar{\Pi}_{r+1}] \\ &\quad + C(r) (1 + \bar{z}_{r+1})^{r-1} (\bar{\mu}_{r+2} \Lambda_r(h) + \hat{h}_{r-1} \bar{\Pi}_r) \\ &\leq C(r) (1 + \bar{z}_{r+1})^{r-1} [\bar{\mu}_{r+2} \Lambda_r(h) + \hat{h}_{r-1} \bar{\Pi}_{r+1}], \end{aligned}$$

которая завершает индукцию в доказательстве (2.3.13).

Далее мы положим в (2.3.11) и (2.3.13) $t = d - 1$ и применим лемму 4 для оценки $\Lambda_r(h)$ и таким образом получим (2.3.1). (Роль плотности $p(x)$ в (2.3.8) играет $q_s(x, \omega)$.)

Остальное доказательство точно повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 2 в [28].

2.4. Сглаживание и доказательство теоремы 2. Далее мы выполним сглаживание. Суть состоит в том, что, как мы увидим,

ошибка, возникающая при переходе к сглаженным функциям h , затрагивает только второй член в (2.3.1), т.е. наименьший член в остатке. Пусть $\mathbf{P}(dx)$ — распределение W и знакопеременная мера

$$Q(dx) = \sum_{\nu=0}^{d-2} Q_{\nu}(dx) = \Phi(dx) + \sum_{\nu=1}^{d-2} Q_{\nu}(dx). \quad (2.4.1)$$

Пусть для любой функции h «сдвинутая» функция ${}_y h(x) = h(x+y)$. Рассмотрим функцию h , функции $h_{\varepsilon+}$, $h_{\varepsilon-}$ (см. п. 1.2.1) и ${}_y h_{\varepsilon+}$, ${}_y h_{\varepsilon-}$. Заметим, что порядок двух операций в ${}_y h_{\varepsilon+}$ и ${}_y h_{\varepsilon-}$ не существен и

$$\|{}_y h_{\varepsilon+}^{(k)}\|_{\infty} \leq \|h^{(k)}\|_{\infty}, \quad \|{}_y h_{\varepsilon-}^{(k)}\|_{\infty} \leq \|h^{(k)}\|_{\infty}. \quad (2.4.2)$$

Положим

$$\begin{aligned} \delta_{\varepsilon\pm} &= \sup_y \left| \int_y h_{\varepsilon\pm}(x) [(\mathbf{P} - Q) * \Phi_{\varepsilon}](dx) \right|, \\ \tau_{\varepsilon} &= \sup_y \int [{}_y h_{\varepsilon+}(x) - {}_y h_{\varepsilon-}(x)] |Q|(dx), \end{aligned}$$

где $|Q|(dx)$ — вариация меры $Q(dx)$ и Φ_{ε} — нормальная мера с нулевым средним и дисперсией ε^2 . По лемме 11.4 из [5, с. 95] для некоторой константы C справедливо неравенство

$$\left| \int h d(\mathbf{P} - Q) \right| \leq C[\max\{\delta_{\varepsilon+}, \delta_{\varepsilon-}\} + \tau_{2\varepsilon}]. \quad (2.4.3)$$

Заметим, что

$$\int {}_y h_{\varepsilon\pm}(x) [(\mathbf{P} - Q) * \Phi_{\varepsilon}](dx) = \int {}_y \tilde{h}_{\varepsilon\pm}(x) (\mathbf{P} - Q)(dx), \quad (2.4.4)$$

где сглаженная функция

$${}_y \tilde{h}_{\varepsilon\pm}(x) = \int {}_y h_{\varepsilon\pm}(x + \varepsilon z) \Phi(dz). \quad (2.4.5)$$

Как легко проверить, исходя из (1.3.1), (1.3.2), (1.4.1) и (2.4.1),

$$\tau_{\varepsilon} \leq C(d) \hat{\gamma}_d^{d-2} \omega(h; \varepsilon) \leq C(d) \|h\|_{\infty} \hat{\gamma}_d^{d-2} a\varepsilon. \quad (2.4.6)$$

Далее мы применим теорему 3 к $\int_y \tilde{h}_{\varepsilon\pm}(x) (\mathbf{P} - Q)(dx)$. Заметим, что, учитывая (2.4.2) и (2.4.5),

$$\|{}_y \tilde{h}_{\varepsilon+}^{(k)}\|_{\infty} \leq C(k) \varepsilon^{-s} \|{}_y h_{\varepsilon+}^{(k-s)}\|_{\infty} \leq C(k) \varepsilon^{-s} \|h^{(k-s)}\|_{\infty} \quad (2.4.7)$$

для $s \leq k$. Далее, по теореме 3 и формулам (2.4.4) и (2.4.7)

$$\delta_{\varepsilon\pm} \leq C(d)(1 + \bar{z}_d)^{d-2} \left\{ \hat{h}_{d-1-m} \Psi_m \bar{\mu}_{d+1} + \varepsilon^{-(\tilde{m}-1)} \hat{h}_{d-1-m} \bar{\Pi}_d \right\}, \quad (2.4.8)$$

где $\tilde{m} = \max\{m, 1\}$. Появление $\tilde{m}$ связано с тем, что порядок производной во втором члене (2.3.1) меньше, чем в первом члене. Это позволяет использовать меньшую степень ε .

Из (2.4.8), (2.4.6), (2.4.4) и (2.4.3) следует, что

$$\begin{aligned} & \left| \int h d(\mathbf{P} - Q) \right| \\ & \leq C(d) \left\{ (1 + \bar{z}_d)^{d-2} \hat{h}_{d-1-m} \Psi_m[\bar{\mu}_{d+1} + \varepsilon^{-(\tilde{m}-1)} \bar{\Pi}_d] + \hat{\gamma}_d^{d-2} \|h\|_\infty a \varepsilon \right\} \\ & \leq C(d) \left\{ (1 + \bar{z}_d)^{d-2} \hat{h}_{d-1-m} \Psi_m[\bar{\mu}_{d+1} + \varepsilon^{-(\tilde{m}-1)} \bar{\Pi}_d + \hat{\gamma}_d^{d-2} a \varepsilon] \right\}, \end{aligned}$$

так как $\Psi_m \geq 1$. Остается выбрать ε .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barbour A. D. Asymptotic expansions based on smooth functions in the central limit theorem. — Probab. Theory Related Fields, 1986, v. 72, № 2, p. 289–303.
2. Barbour A. D., Karoński M., Ruciński A. A central limit theorem for decomposable random variables with applications to random graphs. — J. Combin. Theory, Ser. B, 1989, v. 47, № 2, p. 125–145.
3. Bening V. E. On the rate of convergence and asymptotic expansions for U -statistics under alternatives. — J. Math. Sci. (New York), 2000, v. 99, № 4, p. 1403–1407.
4. Bentkus V., Götze F., van Zwet W. R. An Edgeworth expansion for symmetric statistics. — Ann. Statist., 1997, v. 25, № 2, p. 851–896.
5. Bhattacharya R., Ranga Rao R. Normal Approximation and Asymptotic Expansions. Melbourne: Krieger, 1986, 291 p.
6. Bickel P. J., Götze F., van Zwet W. R. The Edgeworth expansion for U -statistics of degree two. — Ann. Statist., 1986, v. 14, № 4, p. 1463–1484.
7. Bloznelis M., Götze F. One-term Edgeworth expansion for finite population U -statistics of degree two. — Acta Appl. Math., 1999, v. 58, № 1–3, p. 75–90.
8. Bradley R. C. Basic properties of strong mixing conditions. — Dependence in Probability and Statistics: A Survey of Recent Results (Oberwolfach, 1985). Boston: Birkhäuser, 1985, p. 165–192. (Progr. Probab. Statist., v. 11.)
9. Bradley R. Introduction to Strong Mixing Conditions. V. 1. Technical Report. Bloomington: Department of Mathematics, Custom Publishing of IU, Indiana University, 2002.
10. Давыдов Ю. А. Принцип инвариантности для стационарных процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. 15, в. 3, с. 498–509.
11. Götze F., Hipp C. Asymptotic expansions for sums of weakly dependent random vectors. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb., 1983, v. 64, № 2, p. 211–239.
12. Heinrich L. Some remarks on asymptotic expansions in the central limit theorem for m -dependent random variables. — Math. Nachr., 1985, v. 122, p. 151–155.
13. Heinrich L. Asymptotic expansions in the central limit theorem for a special class of m -dependent random fields. I. — Math. Nachr., 1987, v. 134, p. 83–106.
14. Heinrich L. Asymptotic expansions in the central limit theorem for a special class of m -dependent random fields. II. Lattice case. — Math. Nachr., 1990, v. 145, p. 309–327.
15. Hipp C. Asymptotic expansions in the central limit theorem for compound and Markov processes. — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb., 1985, v. 69, № 3, p. 361–385.
16. Ибрагимов И. А. Некоторые предельные теоремы для стационарных в узком смысле вероятностных процессов. — Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 4, с. 711–714.
17. Iosifescu M., Theodorescu R. Random Processes and Learning. Berlin: Springer-Verlag, 1969, 304 p. (Grundlehren Math. Wiss., v. 150.)

18. *Jensen J. G.* Asymptotic expansions for strongly mixing Harris recurrent Markov chains. — *Scand. J. Statist.*, 1989, v. 16, № 1, p. 47–63.
19. *Jensen J. G.* A note on asymptotic expansions for sums over a weakly dependent random field with application to the Poisson and Strauss processes. — *Ann. Inst. Statist. Math.*, 1993, v. 45, № 2, p. 353–360.
20. *Королюк В. С., Боровских Ю. В.* Разложения для U -статистик и функционалов Мизеса. — *Укр. матем. журн.*, 1985, т. 37, № 4, с. 450–456.
21. *Lahiri S. N.* Refinements in asymptotic expansions for sums of weakly dependent random vectors. — *Ann. Probab.*, 1993, v. 21, № 2, p. 791–799.
22. *Loh W.-L.* An Edgeworth expansion for U -statistics with weakly dependent observations. — *Statist. Sinica*, 1996, v. 6, № 1, p. 171–186.
23. *Maesono Y.* Asymptotic mean square errors of variance estimators for U -statistics and their Edgeworth expansions. — *J. Japan Statist. Soc.*, 1998, v. 28, № 1, p. 1–19.
24. *Малиновский В. К.* О предельных теоремах для харрисовских цепей Маркова, I. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1986, т. 31, в. 2, с. 315–332.
25. *Mykland P. A.* Asymptotic expansions for martingales. — *Ann. Probab.*, 1993, v. 21, № 2, p. 800–818.
26. *Petrov V. V.* Limit Theorems of Probability Theory. Sequences of Independent Random Variables. New York: Clarendon Press, 1995, 292 p. (Oxford Stud. Probab., v. 4.)
27. *Rhee W.* An Edgeworth expansion for a sum of m -dependent random variables. — *Internat. J. Math. Math. Sci.*, 1985, v. 8, № 3, p. 563–569.
28. *Rinott Y., Rotar V.* On Edgeworth expansions for dependency-neighborhoods chain structures and Stein's method. — *Probab. Theory Related Fields*, 2003, v. 126, № 4, p. 528–570.
29. *Rinott Y., Rotar V.* A multivariate CLT for local dependence with $n^{-1/2} \log n$ rate, and applications to multivariate graph related statistics. — *J. Multivariate Anal.*, 1996, v. 56, № 2, p. 333–350.
30. *Rotar V. I.* Stein's method, Edgeworth's expansions, and a formula of Barbour. — *Stein's Method and Applications*. Ed. by A. D. Barbour and L. H. Y. Chen. Singapore: Singapore Univ. Press, 2005, p. 59–84. (Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap., v. 5.)
31. *Ротарь В. И.* Теория вероятностей. М.: Высшая школа, 1992, 368 с.
32. *Rosenblatt M.* A central limit theorem and a strong mixing condition. — *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1956, v. 42, p. 43–47.
33. *Статулявичус В. А.* Предельные теоремы для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова. I, II, III. — *Литов. матем. сб.*, 1969, т. 9, № 2, с. 345–362; 1969, т. 9, № 3, с. 635–672; 1970, т. 10, № 1, с. 161–169.
34. *Stein C.* A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. — *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Berkeley, 1970/1971)*, v. 2. Berkeley: Univ. California Press, 1972, p. 583–602.
35. *Stein C.* Approximate Computation of Expectations. Hayward: Inst. Math. Statist., 1986, 164 p.

Поступила в редакцию
11.VI.2005