Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Бахтин, Большие отклонения случайной величины с конечным числом семиинвариантов, значения которых вычислены приближенно, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 3, 603–608

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2002>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:29:29

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

© 1997 г.

БАХТИН В. И.*

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ
С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СЕМИИНВАРИАНТОВ,
ЗНАЧЕНИЯ КОТОРЫХ ВЫЧИСЛЕНЫ ПРИБЛИЖЕННО¹⁾

В статье доказывается теорема о точной асимптотике вероятностей больших уклонений величины, для которой известны оценки лишь конечного числа семиинвариантов, при условии одновременного роста последних. Например, пусть для последовательности вещественных случайных величин S_n существует такая последовательность малых в некотором смысле случайных величин $G_n(\xi)$, аналитически зависящих от ξ , что выполнены тождества

$$\mathbb{E} \exp \left(\xi S_n + G_n(\xi) \right) = \exp \sum_{j=2}^m \frac{\Gamma_{nj}}{j!} \xi^j.$$

Если все семиинварианты Γ_{nj} имеют порядок n , а $G_n(\xi)$ по порядку не превосходит $n\xi^{m+1}$, то для S_n может быть выписана асимптотика вероятностей больших уклонений крамеровского типа.

Ключевые слова и фразы: случайная величина, функция распределения, семиинвариант, большие уклонения, крамеровская асимптотика.

Классическая теорема Крамера [1] дает точную асимптотику вероятностей больших уклонений для сумм независимых случайных величин, когда у последней все семиинварианты по порядку не превосходят числа слагаемых. Для вывода подобных асимптотик в случае зависимых случайных величин тоже, как правило, требуются аналогичные оценки, если и не для всех, то для неограниченно растущего числа семиинвариантов [2]. Однако при исследовании растущего числа семиинвариантов [2]. Однако при исследовании больших уклонений в стохастических системах с быстрыми и медленными движениями число семиинвариантов, которые удастся оценить, не превосходит порядка гладкости коэффициентов, определяющих систему. Влияние же остальных семиинвариантов удастся компенсировать добавлением к изучаемой сумме некоторой малой поправочной случайной величины (см., например, [3]). Аналогичная ситуация возможна и в случае обычных сумм зависимых случайных величин [4]. В заметке выводятся асимптотики крамеровского типа в указанной ситуации.

Фиксируем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Все рассматриваемые ниже случайные величины суть ограниченные измеримые функции на этом пространстве.

*Белгосуниверситет, физический факультет, пр. Фр. Скорины, 4, 220080 Минск, Беларусь.

¹⁾Работа поддержана Фондом Дж. Сороса и Академией Естественных Наук России.

Рассмотрим вещественную случайную величину S . Предположим, что для нее выполнено тождество

$$\mathbb{E} \exp(\xi S + G(\xi)) = \exp \psi(\xi), \quad (1)$$

где ξ — комплексный параметр, областью изменения которого является некоторый круг $|\xi| < 2R < 1$; $G(\xi)$ — случайная величина (поправка), аналитически зависящая от ξ и вещественная при вещественных ξ ; а ψ — многочлен или ряд:

$$\psi(\xi) = \sum_{j=2}^m \frac{\Gamma_j}{j!} \xi^j, \quad m \geq 2, \quad \Gamma_2 > 0. \quad (2)$$

Пусть константы C, T_0 и неубывающая функция $\gamma(T)$ таковы, что

$$\max_{|\xi| \leq 2R} |\psi(\xi)| \leq C, \quad \sup_{|\xi| \leq 2T} |G(\xi)| \leq \gamma(T) \quad (T \geq 0), \quad T_0 = \frac{\Gamma_2}{12C} R^3 \quad (3)$$

(здесь $|G(\xi)|$ — верхняя грань по всему вероятностному пространству).

Обозначим через Ψ функцию распределения S , а через Φ — функцию распределения стандартного нормального закона:

$$\Psi(x) = \mathbb{P}\{S < x\}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Теорема. Пусть $x = \psi'(\alpha)$, $\alpha > 0$ и выполнены условия (1)–(3). Тогда

$$1 - \Psi(x) = \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\Gamma_2}}\right)\right) \exp\left(\psi(\alpha) - \alpha\psi'(\alpha) + \frac{\psi'(\alpha)^2}{2\Gamma_2}\right) \times \left[1 + O\left(\frac{C\alpha}{\Gamma_2}\right) + O\left(\min_{0 \leq T \leq T_0} \left(\frac{1}{T\sqrt{\Gamma_2}} + \gamma(\alpha + T)\right) (1 + \alpha\sqrt{\Gamma_2})\right)\right]. \quad (4)$$

В этой формуле символ $O(\zeta)$ обозначает функцию, для которой при всех $|\zeta| < \delta$ справедливо неравенство

$$|O(\zeta)| \leq \Delta |\zeta|,$$

где δ и Δ — положительные числа, зависящие только от R .

В приложениях $S = S_n$ является центрированной ненормированной суммой n слабо зависящих случайных величин, а числа Γ_j — ее семинвариантами или некоторыми приближениями к ним. Поэтому Γ_j и C обычно асимптотически растут и имеют порядок числа слагаемых n . Большими же отклонениями являются значения S_n порядка $n^{1/2+\epsilon}$ (при $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$). Поэтому формула (4) становится содержательной при $x \sim n^{1/2+\epsilon}$ и, соответственно, $\alpha \sim n^{-1/2+\epsilon}$.

Заметим, что областью действия теоремы Крамера и значительной части других теорем о больших отклонениях является случай, когда в тождестве (1) $G(\xi) = 0$, а в (2) $m = \infty$. Поэтому приведенная теорема может рассматриваться как обобщение уже известных.

Следствие. Если $G(\xi) = \xi^{m+1}G'(\xi)$ и $\sup |G'(\xi)| \leq C$ при всех $|\xi| < 2R$, то

$$1 - \Psi(x) = \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\Gamma_2}}\right)\right) \exp\left(\psi(\alpha) - \alpha\psi'(\alpha) + \frac{\psi'(\alpha)^2}{2\Gamma_2}\right) \times \left[1 + O(C\alpha^{m+1}) + O\left(\frac{C\alpha}{\Gamma_2}\right) + O(C\Gamma_2^{-3/2}) + O\left((C\sqrt{\Gamma_2})^{1/(m+2)}\alpha\right) + O\left((C\sqrt{\Gamma_2})^{1/(m+2)}\Gamma_2^{-1/2}\right)\right].$$

Для вывода следствия достаточно взять $\gamma(T) = (2T)^{m+1}C$ и аккуратно вычислить минимум в правой части формулы (4).

Это следствие независимо доказано в [5]. Однако, как позже выяснилось, в приложениях встречается ситуация, когда функция $G(\xi)$ не делится на ξ^{m+1} .

Доказательство теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы о больших отклонениях для суммы независимых одинаково распределенных величин, которое изложено в [6].

Вначале заметим, что определение «О-большого» не накладывает никаких ограничений на величину $O(C\alpha/\Gamma_2)$ в (4) при $\alpha \geq T_0$. Поэтому можно считать, что (4) при $\alpha \geq T_0$ доказано, и рассматривать ниже только случай

$$0 < \alpha < T_0. \quad (5)$$

Неравенства Коши из комплексного анализа дают при $|\xi| < R$ оценки

$$\left| \frac{d^3 \psi(\xi)}{d\xi^3} \right| \leq \frac{6C}{R^3}, \quad \Gamma_2 = \frac{d^2 \psi(0)}{d\xi^2} \leq \frac{2C}{(2R)^2}. \quad (6)$$

Следовательно, $T_0 \leq R/24$. Поэтому из (5), (6) вытекают неравенства

$$\psi''(\alpha) \geq \frac{1}{2} \Gamma_2, \quad \psi'(\alpha) \geq \frac{1}{2} \Gamma_2 \alpha, \quad \sqrt{\Gamma_2 \psi''(\alpha)} \alpha \geq \frac{1}{2} \Gamma_2 \alpha, \quad (7)$$

$$\psi'(\alpha) \leq \Gamma_2 \alpha + \frac{3C}{R^3} \alpha^2 \leq \frac{5}{4} \Gamma_2 \alpha. \quad (8)$$

Ниже нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Существует такая абсолютная константа D , что при всех положительных x

$$\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{1 - \Phi(x)} \leq Dx + D.$$

Доказательство. Это вытекает из неравенств (7.1.8) в [6]:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \leq \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) (1 - \Phi(x)) \leq \frac{1}{x}.$$

Лемма 2. При $0 < \bar{x} < x$

$$e^{(x^2 - \bar{x}^2)/2} \leq \frac{1 - \Phi(\bar{x})}{1 - \Phi(x)} \leq e^{(x^2 - \bar{x}^2)/2} \frac{x}{\bar{x}}.$$

Следующее доказательство сообщено автору С. В. Нагаевым. Достаточно убедиться, что функция $f(x) = e^{x^2/2}(1 - \Phi(x))$ убывает, а $g(x) = x e^{x^2/2}(1 - \Phi(x))$ возрастает (при $x > 0$). Легко видеть, что

$$\begin{aligned} x \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt &= -x \int_x^\infty \frac{d e^{-t^2/2}}{t} = e^{-x^2/2} - x \int_x^\infty \frac{e^{-t^2/2}}{t^2} dt \\ &> e^{-x^2/2} - \frac{1}{x} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt, \end{aligned}$$

откуда $x\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(x)) < e^{-x^2/2} < (x + 1/x)\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(x))$. Поэтому

$$f'(x) = x e^{x^2/2} (1 - \Phi(x)) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < 0,$$

$$\frac{d}{dx} \ln g(x) = \frac{1}{x} + x - \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(x))} > 0 \Rightarrow g'(x) > 0.$$

Лемма 3. Если $x = \psi'(\alpha)$, $\bar{x} = \sqrt{\Gamma_2 \psi''(\alpha)} \alpha$, то при $0 < \alpha < T_0$

$$x - \bar{x} = CO(\alpha^2).$$

Это следует из формулы Тейлора для разности $x - \bar{x}$.

Вернемся теперь к доказательству теоремы. Обозначим буквой p вероятностную меру для случайной величины S , а буквой μ — сопряженную меру, определяемую формулой

$$d\mu = e^{-\psi(\alpha)} \exp(\alpha S + G(\alpha)) dp.$$

Пусть V — функция распределения случайной величины S по мере μ . Тогда

$$\begin{aligned} 1 - \Psi(x) &= \int_{S > x} dp = e^{\psi(\alpha)} \int_{S > x} \exp(-\alpha S - G(\alpha)) d\mu \\ &= e^{\psi(\alpha)} \int_x^\infty e^{-\alpha y} V(dy) (1 + O(\gamma(\alpha))). \end{aligned} \quad (9)$$

Заменим в этом выражении V на N — функцию распределения нормального закона с математическим ожиданием $x = \psi'(\alpha)$ и дисперсией $\psi''(\alpha)$ — и рассмотрим величину

$$A_\alpha = e^{\psi(\alpha)} \int_x^\infty e^{-\alpha y} N(dy). \quad (10)$$

Вначале мы попытаемся оценить ее, а затем посмотрим, насколько она отличается от $1 - \Psi(x)$. Дальнейшие рассуждения разобьем на три части.

А) Сделаем в (10) замену

$$y = \psi'(\alpha) + t\sqrt{\psi''(\alpha)}$$

и введем обозначение $\bar{x} = \sqrt{\Gamma_2 \psi''(\alpha)} \alpha$. Тогда в силу неравенств (7) и лемм 2, 3

$$1 - \Phi\left(\frac{\bar{x}}{\Gamma_2}\right) = \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\Gamma_2}}\right)\right) \exp\left(\frac{\psi'(\alpha)^2}{2\Gamma_2} - \frac{1}{2} \psi''(\alpha) \alpha^2\right) \left(1 + O\left(\frac{C\alpha}{\Gamma_2}\right)\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \exp(\psi(\alpha) - \alpha \psi'(\alpha)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-\alpha t\sqrt{\psi''(\alpha)} - \frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= \exp\left(\psi(\alpha) - \alpha \psi'(\alpha) + \frac{1}{2} \alpha^2 \psi''(\alpha)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2} (t + \alpha\sqrt{\psi''(\alpha)})^2\right) dt \\ &= \exp\left(\psi(\alpha) - \alpha \psi'(\alpha) + \frac{1}{2} \alpha^2 \psi''(\alpha)\right) \left(1 - \Phi\left(\frac{\bar{x}}{\sqrt{\Gamma_2}}\right)\right) \\ &= \exp\left(\psi(\alpha) - \alpha \psi'(\alpha) + \frac{\psi'(\alpha)^2}{2\Gamma_2}\right) \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{\Gamma_2}}\right)\right) \left(1 + O\left(\frac{C\alpha}{\Gamma_2}\right)\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Итак, главный член A_α совпадает с главным членом в (4).

Б) Оценим теперь невязку от замены V на N в (9). Пусть $\varepsilon = \sup_y |V(y) - N(y)|$. Из (11) и леммы 1 следует

$$e^{\psi(\alpha) - \alpha \psi'(\alpha)} \leq A_\alpha D\left(\frac{\psi'(\alpha)^2}{\sqrt{\Gamma_2}} + 1\right) \left(1 + O\left(\frac{C\alpha}{\Gamma_2}\right)\right).$$

С помощью интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} \left| e^{\psi(\alpha)} \int_x^\infty e^{-\alpha y} V(dy) - A_\alpha \right| &\leq e^{\psi(\alpha)} \varepsilon \left(e^{-\alpha x} + \alpha \int_x^\infty e^{-\alpha y} dy \right) \leq 2\varepsilon e^{\psi(\alpha) - \alpha\psi'(\alpha)} \\ &\leq A_\alpha 2\varepsilon D \left(\frac{\psi'(\alpha)^2}{\sqrt{\Gamma_2}} + 1 \right) \left(1 + O\left(\frac{C\alpha}{\Gamma_2}\right) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Из (9), (11), (12) получаем

$$\begin{aligned} 1 - \Psi(x) &= \exp \left(\psi(\alpha) - \alpha\psi'(\alpha) + \frac{\psi'(\alpha)^2}{2\Gamma_2} \right) \left(1 - \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{\Gamma_2}} \right) \right) \\ &\times \left(1 + O\left(\frac{C\alpha}{\Gamma_2}\right) + O(\gamma(\alpha)) + O(\varepsilon(\alpha\sqrt{\Gamma_2} + 1)) \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Для завершения доказательства осталось оценить ε .

В) Воспользуемся неравенством Берри—Эссеена

$$\varepsilon = \sup_y \left| V(y) - N(y) \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \left| \frac{v(\beta) - \nu(\beta)}{\beta} \right| d\beta + \frac{24}{\pi T \sqrt{2\pi\psi''(\alpha)}},$$

где T — произвольное положительное число, а v и ν — характеристические функции распределений $V(y + \psi'(\alpha))$ и $N(y + \psi'(\alpha))$. Заметим, что, в силу неравенства Коши, $|G'(\xi)| \leq \gamma(T)/T$, при $|\xi| \leq T$, откуда при $|\beta| \leq T$

$$G(\alpha + i\beta) - G(\alpha) \leq \frac{\gamma(\alpha + T)}{\alpha + T} |\beta|.$$

Поэтому при $|\beta| \leq T$

$$\begin{aligned} v(\beta) &= \int \exp(i\beta(y - \psi'(\alpha))) V(dy) = \int \exp(i\beta(S - \psi'(\alpha))) d\mu \\ &= \int \exp(i\beta(S - \psi'(\alpha)) + G(\alpha + i\beta) - G(\alpha)) d\mu + O\left(\frac{\gamma(\alpha + T)}{\alpha + T} \beta\right) \\ &= \exp(-\psi(\alpha) - i\beta\psi'(\alpha)) \int \exp((\alpha + i\beta)S + G(\alpha + i\beta)) dp + O\left(\frac{\gamma(\alpha + T)}{\alpha + T} \beta\right) \\ &= \exp(\psi(\alpha + i\beta) - \psi(\alpha) + i\beta\psi'(\alpha)) + O\left(\frac{\gamma(\alpha + T)}{\alpha + T} \beta\right), \\ \nu(\beta) &= \int \exp(i\beta(y - \psi'(\alpha))) N(dy) = \exp\left(-\frac{1}{2} \beta^2 \psi''(\alpha)\right). \end{aligned}$$

При условии (5) из неравенства Берри—Эссеена и первого неравенства (7) вытекает

$$\varepsilon \leq O\left(\frac{1}{T\sqrt{\Gamma_2}}\right) + TO\left(\frac{\gamma(\alpha + T)}{\alpha + T}\right) + \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T |e^y - 1| e^{-\beta^2 \psi''(\alpha)/2} \frac{d\beta}{|\beta|}, \quad (14)$$

где $y = \psi(\alpha + i\beta) - \psi(\alpha) - i\beta\psi'(\alpha) + \frac{1}{2} \beta^2 \psi''(\alpha)$. Из формулы Тейлора и первой из оценок (6) следует, что $|y| \leq C|\beta|^3/R^3$. Используя известное неравенство $|e^y - 1| \leq |y|e^{|y|}$, получаем, что при $T \leq T_0$

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T |e^y - 1| e^{\beta^2 \psi''(\alpha)/2} \frac{d\beta}{|\beta|} &\leq \int_{-T}^T \frac{C}{R^3} |\beta^3| \exp\left(\frac{C}{R^3} |\beta^3| - \frac{1}{4} \beta^2 \Gamma_2\right) \frac{d\beta}{|\beta|} \\ &\leq \int_{-T}^T \frac{C}{R^3} |\beta|^2 \exp\left(-\frac{1}{6} \Gamma_2 \beta^2\right) d\beta = O\left(\frac{C}{\Gamma_2^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

Теперь из (14)

$$\varepsilon \leq O\left(\frac{1}{T\sqrt{\Gamma_2}}\right) + O(\gamma(\alpha + T)) + O\left(\frac{C}{\Gamma_2^{3/2}}\right).$$

Подставляя эту оценку в (13), получаем (4). Доказательство окончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cramer H.* Sur un nouveau théorème de la théorie des probabilités. — Act. Sci. et Ind., 1938, f. 736.
2. *Саулис Л., Статулявичус В.* Предельные теоремы о больших отклонениях. — Вильнюс: Мокслас, 1989, 208 с.
3. *Базтин В. И.* Крамеровские асимптотики в задаче с медленными и марковскими быстрыми движениями. — Теория вероятн. и ее примен., (в печати).
4. *Базтин В. И.* Обобщение спектрального метода доказательства центральной предельной теоремы на случай степенного перемешивания. — Весці АНБ, сер. фіз.-мат. навук, 1994, № 5.
5. *Базтин В. И.* Большие отклонения величины с конечным числом семинвариантов. — Весці АНБ, сер. фіз.-мат. навук, 1995, № 1, с. 41–46.
6. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.

Поступила в редакцию
26.IX.1994

Исправленный вариант
13.IX.1995

© 1997 г.

ВЬЮГИН В. В.*

О ДЛИНЕ МАКСИМАЛЬНОЙ СЕРИИ «УСПЕХОВ» В ИНДИВИДУАЛЬНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

На основе предложенного А. Н. Колмогоровым алгоритмического подхода к обоснованию теории вероятностей проводится анализ результата С. С. Самаровой о длине максимальной серии «успехов» для марковской цепи с двумя состояниями (который, в свою очередь, является обобщением результатов П. Эрдеша и П. Ревеза). Формулируется и доказывается соответствующее утверждение для индивидуальных случайных последовательностей. Приводятся также сложные характеристики его применимости.

Ключевые слова и фразы: законы больших чисел, цепи Маркова, длина серии «успехов», случайная последовательность, алгоритмическая случайность.

1. Введение. А. Н. Колмогоровым [2], [3] был предложен алгоритмический подход к теории вероятностей. В рамках этого подхода законы теории вероятностей (т.е. утверждения, имеющие место почти всюду) можно формулировать в «поточечном» виде, т.е. как утверждения, выполненные для индивидуальных случайных объектов.

*Институт проблем передачи информации, Б. Каретный пер., 19, 101447 Москва, Россия.