Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Вьюгин, О длине максимальной серии “успехов” в индивидуальной случайной последовательности, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 3, 608–615

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2003>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:14:10

Теперь из (14)

$$\varepsilon \leq O\left(\frac{1}{T\sqrt{\Gamma_2}}\right) + O(\gamma(\alpha + T)) + O\left(\frac{C}{\Gamma_2^{3/2}}\right).$$

Подставляя эту оценку в (13), получаем (4). Доказательство окончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cramer H.* Sur un nouveau théorème de la théorie des probabilités. — Act. Sci. et Ind., 1938, f. 736.
2. *Саулис Л., Статулявичус В.* Предельные теоремы о больших отклонениях. — Вильнюс: Мокслас, 1989, 208 с.
3. *Базтин В. И.* Крамеровские асимптотики в задаче с медленными и марковскими быстрыми движениями. — Теория вероятн. и ее примен., (в печати).
4. *Базтин В. И.* Обобщение спектрального метода доказательства центральной предельной теоремы на случай степенного перемешивания. — Весці АНБ, сер. фіз.-мат. навук, 1994, № 5.
5. *Базтин В. И.* Большие отклонения величины с конечным числом семинвариантов. — Весці АНБ, сер. фіз.-мат. навук, 1995, № 1, с. 41–46.
6. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир, 1984, 752 с.

Поступила в редакцию
26.IX.1994

Исправленный вариант
13.IX.1995

© 1997 г.

ВЬЮГИН В. В.*

О ДЛИНЕ МАКСИМАЛЬНОЙ СЕРИИ «УСПЕХОВ» В ИНДИВИДУАЛЬНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

На основе предложенного А. Н. Колмогоровым алгоритмического подхода к обоснованию теории вероятностей проводится анализ результата С. С. Самаровой о длине максимальной серии «успехов» для марковской цепи с двумя состояниями (который, в свою очередь, является обобщением результатов П. Эрдеша и П. Ревеза). Формулируется и доказывается соответствующее утверждение для индивидуальных случайных последовательностей. Приводятся также сложные характеристики его применимости.

Ключевые слова и фразы: законы больших чисел, цепи Маркова, длина серии «успехов», случайная последовательность, алгоритмическая случайность.

1. Введение. А. Н. Колмогоровым [2], [3] был предложен алгоритмический подход к теории вероятностей. В рамках этого подхода законы теории вероятностей (т.е. утверждения, имеющие место почти всюду) можно формулировать в «поточечном» виде, т.е. как утверждения, выполненные для индивидуальных случайных объектов.

*Институт проблем передачи информации, Б. Каретный пер., 19, 101447 Москва, Россия.

Говоря более аккуратно, такая переформулировка возможна, если удастся точно определить понятие индивидуального случайного объекта. На основе алгоритмического подхода удалось определить понятие индивидуальной случайной последовательности (см. обзоры [3] и [6]) и перенести на такие последовательности некоторые известные законы теории вероятностей. Например, в работе В. Вовка [1] доказывается, что отдельно взятая случайная последовательность удовлетворяет закону повторного логарифма.

В большинстве случаев перевод утверждения из формы «почти всюду» в поточечную форму можно осуществить на основе алгоритмического анализа доказательства этого утверждения. В данной заметке приводятся примеры такого анализа (и последующего перевода) для одного технически сложного результата теории вероятностей, принадлежащего С. С. Самаровой [4]. Ее результат, в свою очередь, является обобщением на марковские цепи результата, полученного П. Эрдешем и П. Ревезом [9] для равномерного бернуллиева случая.

В названных результатах речь идет о максимальном числе единиц (успехов), которые могут идти подряд в бесконечной двоичной последовательности. Оценка длины таких сплошных кусков (массивов), состоящих из единиц, представляет интерес хотя бы по следующей причине: хорошо известно, что человек, пытающийся имитировать случайную последовательность, не решается выписывать длинные массивы единиц или нулей и так выдает себя, поскольку в реальности такие массивы встречаются достаточно часто.

2. Исходные определения и факты. Условимся о следующих обозначениях: $\Omega = \{0, 1\}^\infty$ — множество бесконечных последовательностей нулей и единиц, Σ — множество всех конечных двоичных последовательностей. Если $x \in \Sigma$, то $|x|$ есть длина конечной последовательности x . Если $\omega \in \Omega$, то ω_k есть k -й элемент ω , а $\omega^n = \omega_1 \dots \omega_n$. При $\omega \in \Omega$ и $x \in \Sigma$ выражение $x \subseteq \omega$ означает, что бесконечная последовательность ω продолжает конечную последовательность x .

Мы будем рассматривать вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, где Ω — определено выше, $\mathcal{F}$ — борелевское поле, порождаемое шарами вида $\Gamma_x = \{\omega \in \Omega \mid x \subseteq \omega\}$, $x \in \Sigma$, а $\mathbf{P}$ — вероятностная мера на Ω .

В [9] вводятся величины

$$S_n = \sum_{i=1}^n \omega_i \quad \text{при } n > 0, \quad S_0 = 0,$$

$$I(N, k) = \max_{0 \leq n < N-k} (S_{n+k} - S_n) \quad \text{при } k < N,$$

а также $Z_N = Z_N(\omega)$ — максимальное целое число, для которого $I(N, Z_N) = Z_N$. Таким образом, $Z_N(\omega)$ есть максимальная длина серии (в выборке $\omega_1 \dots \omega_N$), состоящей из одних единиц (успехов). Для случая равномерной бернуллиевской меры $\mathbf{P}$ получены оценки величины $Z_N(\omega)$ для почти всех ω .

Пусть теперь мера $\mathbf{P}$ определяется однородной марковской цепью с двумя состояниями 0 и 1, с матрицей переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \beta & \beta \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha, \quad \beta < 1,$$

и начальными вероятностями $\mathbf{P}\{\omega \mid \omega_1 = 0\} = p$ и $\mathbf{P}\{\omega \mid \omega_1 = 1\} = 1 - p$, где ω_1 — первый элемент последовательности ω .

Именно этот случай и исследуется в [4]. Там же вводится обозначение

$$\Psi_N = \log_{1/\beta} N - \log_{1/\beta} \log_{1/\beta} \log_{1/\beta} N + \log_{1/\beta} \log_{1/\beta} e + \log_{1/\beta} \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)}{2 - (\alpha + \beta)},$$

где e — основание натурального логарифма.

В [4] получено следующее уточнение и обобщение результатов [9]. Пусть P — произвольная марковская мера (определяемая параметрами α, β, p), а ϵ — произвольное положительное число. Тогда для почти всех $\omega \in \Omega$ выполнено

а) существует такое число $N_0(\epsilon, \omega)$, что $Z_N(\omega) \geq [\Psi_N - \epsilon] + 1$ для всех $N \geq N_0(\epsilon, \omega)$;

для почти всех $\omega \in \Omega$ выполнено

б) существует бесконечная последовательность различных целых чисел $N_i = N_i(\epsilon, \omega)$, $i = 1, 2, \dots$, такая, что $Z_{N_i}(\omega) < [\Psi_{N_i} + \epsilon] + 1$ для всех i .

Здесь $[r]$ обозначает целую часть действительного числа r .

В доказательстве этих утверждений используются две леммы Бореля–Кантелли, причем вторая из них — в варианте, принадлежащем Реньи:

Лемма С ([10, гл. II, п. 10]). Пусть $A_1, A_2, \dots$ — произвольные события, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty, \quad (1)$$

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m P(A_k \cap A_l)}{(\sum_{k=1}^m P(A_k))^2} = 1. \quad (2)$$

Тогда с вероятностью 1 осуществится бесконечно много событий A_n .

3. Случайные последовательности нулей и единиц. Для того, чтобы сформулировать результаты [4] в «поточечном» виде, нам потребуется напомнить понятие индивидуальной случайной последовательности исходов. Мы будем использовать понятие алгоритмически вычислимой меры (см., например, [6, п. 2.1]). Мера P называется вычислимой, если существует алгоритм, вычисляющий по x и рациональному $\epsilon > 0$ рациональное приближение величины $P(\Gamma_x)$ с точностью до ϵ . Для вычислимости марковской меры P , определенной выше, необходимо и достаточно, чтобы числа α, β и p были вычислимыми (для действительных чисел определение вычислимости аналогично определению вычислимости для меры — см., например, [5, п. 2.4]). При теоретико-мерном определении случайной последовательности, выделяется свойство «типичности», которое утверждает, что случайная последовательность должна принадлежать любому «разумному» большинству, которое определяется алгоритмически (см. [3] и [6, п. 1.4.1]). Пусть P — произвольная вычислимая мера на Ω . Множество $M \subseteq \Omega$ имеет P -меру 0 тогда и только тогда, когда для любого рационального $\epsilon > 0$ существует такая последовательность шаров $\Gamma_{x(1)}, \dots, \Gamma_{x(n)}, \dots$, что для $U_\epsilon = \bigcup \Gamma_{x(n)}$ будет $M \subseteq U_\epsilon$ и $P(U_\epsilon) < \epsilon$. Множество P -меры 0 будет называться также P -нулевым.

Последовательность открытых множеств $\{U_m\}$ называется рекурсивно перечислимой, если существует вычислимая функция $x(m, n)$, значениями которой являются конечные последовательности, состоящие из 0 и 1, и для которой $U_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_{x(m, n)}$ для любого m . Множество M называется эффективно P -нулевым, если существует такая рекурсивно перечислимая последовательность открытых множеств $\{U_m\}$, что $P(U_m) < 2^{-m}$ для всех m и $M \subseteq \bigcap U_m$. По известной теореме Мартин–Лёфа (см., например, [6, пп. 2.1 и 2.2]) для произвольной вычислимой меры P существует максимальное по включению эффективно P -нулевое множество, т.е. множество, которое содержит в качестве подмножества всякое эффективно P -нулевое множество. Его дополнение называется конструктивным носителем меры P . Бесконечная последовательность называется случайной по Мартин–Лёфу относительно меры P (см. [5, п. 2.6]) или типической (см. [3], [6, п. 2.1]), если она лежит в конструктивном носителе меры P . Эквивалентное определение случайной последовательности на основе сложностного подхода рассматривается в п. 5.

4. Основная теорема о длине серии «успехов» в индивидуальной случайной последовательности.

Теорема 1. Пусть P — вычислимая марковская мера, определенная выше, ε — произвольное положительное число. Тогда для любой бесконечной последовательности ω , типической относительно меры P , выполнены утверждения а) и б).

Переход к типическим последовательностям основан на применении алгоритмически эффективных вариантов первой леммы Бореля–Кантелли и леммы Реньи к оценкам из [4].

Лемма 1 (А. Шень, [7]). Пусть ω — типическая относительно вычислимой меры P последовательность, $\{A_n\}$ — рекурсивно перечислимая последовательность открытых множеств такая, что ряд $\sum P(A_n)$ сходится. Тогда $\omega \notin A_n$ для всех n , начиная с некоторого.

Доказательство. Пусть $\sum P(A_n) < r$, где r — рациональное, $\alpha_n(\omega)$ — характеристическая функция множества A_n . Определим $V_n = \{\omega \mid \omega \in A_i \text{ для } \geq r2^n \text{ различных } i\}$. По определению, $\{V_n\}$ — рекурсивно перечислимая последовательность открытых множеств. Кроме этого, $r2^n P(V_n) \leq \int \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(\omega) dP < r$ для произвольного n . Следовательно, $P(V_n) < 2^{-n}$ для всех n . Если $\omega \in A_n$ для бесконечно многих n , то $\omega \in \cap V_n$, что противоречит типичности ω . Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что утверждение леммы 1 эквивалентно определению случайности по Мартин-Лёфу, т.е. имеет место также и обратное утверждение.

Последовательность открытых множеств $\{U_n\}$ назовем (алгоритмически) строго перечислимой, если существуют вычислимая функция $f(n)$, принимающая в качестве значений конечные наборы конечных двоичных последовательностей, такая, что $U_n = \Gamma_{x(1)} \cup \Gamma_{x(2)} \cup \dots \cup \Gamma_{x(m(n))}$ для произвольного n , где $f(n) = \langle x(1), x(2), \dots, x(m(n)) \rangle$. Легко видеть, что всякая строго перечислимая последовательность открытых множеств является рекурсивно перечислимой.

Лемма 2. Пусть P — произвольная вычислимая мера. Если $\{A_n\}$ — такая строго перечислимая последовательность открытых множеств, что выполнены условия (1) и (2), то $\omega \in A_n$ для бесконечно многих n .

Доказательство. Мы будем следовать доказательству леммы С из [10, (VII, п. 5)]. Имеем $E(\alpha_n) = P(A_n)$, где α_n — характеристическая функция множества A_n . Из неравенства Чебышева

$$P\left\{\omega \mid \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k(\omega) - \sum_{k=1}^n P(A_k) \right| > \varepsilon \sum_{k=1}^n P(A_k) \right\} \leq \frac{D(\sum_{k=1}^n \alpha_k(\omega))}{\varepsilon^2 (\sum_{k=1}^n P(A_k))^2}, \quad (3)$$

$E(\alpha_k \alpha_l) = P(A_k \cap A_l)$; следовательно,

$$D\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n P(A_k \cap A_l) - \left(\sum_{k=1}^n P(A_k)\right)^2. \quad (4)$$

Пусть $V_n = \{\omega \mid |\sum_{k=1}^n \alpha_k(\omega) - \sum_{k=1}^n P(A_k)| > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n P(A_k)\}$.

Из (3), (4) и условия леммы следует, что $\lim_m \inf_{n \geq m} P(V_n) = 0$, т.е. для любого i существует бесконечно много n таких, что $P(V_n) < 2^{-i}$. Используя вычислимость меры P и строго перечислимость последовательности $\{A_k\}$, получаем, что такие достаточно большие n можно находить эффективно по i , т.е. существует такая монотонно возрастающая вычислимая функция $n(i)$, что $P(V_{n(i)}) < 2^{-i}$ для всех i . Последовательность открытых множеств $U_i = \{\omega \mid \sum_{k=1}^{n(i)} \alpha_k(\omega) < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n(i)} P(A_k)\}$ является рекурсивно (строго) перечислимой. Так как $U_i \subseteq V_{n(i)}$, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} P(U_i)$ сходится. Тогда по лемме 1 $\omega \notin U_i$ для всех i , начиная с некоторого. Таким образом,

$\sum_{k=1}^{n(i)} \alpha_k(\omega) \geq \sum_{k=1}^{n(i)} P(A_k)$ для всех таких i . Отсюда получаем, что $\omega \in A_k$ для бесконечно многих n .

Доказательство теоремы 1 основано на применении лемм 1 и 2 к оценкам из [4]. Пусть $\varepsilon > 0$ — рациональное и N_k — наименьшее целое число, удовлетворяющее $[\Psi_{N_k} - \varepsilon] = k - 1$, $A_k = \{\omega \mid Z_{N_k}(\omega) \leq [\Psi_{N_k} - \varepsilon]\}$. Из определения, $\{A_k\}$ — рекурсивно перечислимая (и даже строго перечислимая) последовательность открытых множеств. Согласно [4] (п. 1 доказательства теоремы 1), $P(A_k) \leq Ck^{-\gamma}$, где $\gamma > 1$ и $C > 0$, поэтому ряд $\sum P(A_s)$ сходится. Тогда по лемме 1 найдется N_0 такое, что $Z_N(\omega) \geq [\Psi_N(\omega) - \varepsilon] + 1$ при всех $N = N_k \geq N_0$. По [4] это же неравенство верно и при всех $N > N_0$.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ — рациональные, N_k — наименьшее N такое, что $[\Psi_N + \varepsilon] = [k^{1+\delta}] - 1$ (аналогично лемме 2, п. 3, [9]) и $A_k = \{\omega \mid Z_{N_k}(\omega) < [\Psi_{N_k} + \varepsilon]\}$. Последовательность открытых множеств $\{A_k\}$ является строго перечислимой. Согласно [4] (п. 2 доказательства теоремы 2), $P(A_k) \geq Ck^{-\gamma}$, где $0 < \gamma < 1$, $C > 0$, и поэтому ряд $\sum P(A_s)$ расходится. По [4] условие (2) также выполнено, поэтому по лемме 2 типическая последовательность ω принадлежит A_k для бесконечно многих k . На этом описание доказательства теоремы 1 заканчивается.

5. Количественная оценка применимости закона о длине серии «успехов». Используя оценки из доказательства теоремы 1 из [4], можно провести доказательство основного результата на другом языке и, одновременно, более точно определить класс последовательностей, для которых имеют место утверждения а) и б). Для того чтобы сформулировать соответствующее утверждение, необходимо использовать некоторую количественную характеристику меры случайности последовательности, которая определяется на основе понятия сложности конечного объекта. Пусть $KM(x)$ — монотонная энтропия (сложность) конечной последовательности x (ее значение равно длине самого короткого кода x при надлежащем способе кодирования, см. [6, п. 3.2]). Обозначим $d(x) = -\log_2 P(x) - KM(x)$. Известно (см. [6, п. 3.3]), что типичность последовательности $\omega = \omega_1 \dots \omega_n \dots$ относительно меры P эквивалентна тому, что величина $d(\omega^n)$ ограничена. Величина $d(x)$ называется дефектом случайности конечной последовательности x (см., например, [3, п. 2.3]).

Теорема 2. Пусть P — вычислимая марковская мера, ε — произвольное положительное число. Тогда

- 1) для любой бесконечной последовательности ω такой, что

$$d(\omega^n) = o(\log_2 \log_2 n),$$

выполнены утверждения а) и б);

- 2) если P — равномерная бернуллиевская мера, то существует такая бесконечная последовательность ω , что

$$d(\omega^N) < (1 + \varepsilon) \log_2 \log_2 N \quad \text{и} \quad Z_N \leq [\Psi_N - \varepsilon]$$

для бесконечно многих N (в частности, утверждение а) не выполнено для этой ω).

Семейство множеств $\{H_s\}$, состоящих из конечных последовательностей нулей и единиц, называется рекурсивно перечислимым, если H_s является множеством значений вычислимой функции $x(s, i)$, $i = 1, 2, \dots$, для любого s (см. [6, пп. 1.4 и 4.1]). Множество называется префиксным, если никакие две последовательности из него не продолжают друг друга. Обозначаем $P(H) = \sum \{P(x) \mid x \in H\}$ для любого префиксного H .

Лемма 3. Пусть P — вычислимая мера, $\{H_s\}$ — рекурсивно перечислимая последовательность префиксных множеств таких, что $P(H_s) < 2^{-\rho(s)}$, для всех s , где ρ — вычислимая функция, принимающая неотрицательные целые значения.

Тогда $d(x) \geq \rho(s) - \log_2 s - 2 \log_2 \log_2 s - c$ для любого $x \in H_s$, где c — положительная константа.

Заметим, что множество H_s может быть конечным или бесконечным. Мы будем использовать только конечные H_s .

Доказательство. Пусть H_s является множеством значений функции $x(s, i)$, $i = 0, 1, \dots$. Имеем $\sum_i P(x(s, i)) 2^{\rho(s)-2} < \frac{1}{4}$. Полагаем $n_i = [-\log_2 P(x(s, i))] - \rho(s) + 2$. Будем использовать алгоритм из доказательства леммы 5 параграфа 4.1 из [6], в котором s является параметром. Используя свойство $\sum 2^{-n_i} < \frac{1}{2}$, данный алгоритм, получая на вход s и вычисляемую последовательность натуральных чисел $\{n_i\}$, перечисляет последовательность $y_1 \dots y_i \dots$ попарно не продолжающих друг друга конечных последовательностей, состоящих из 0 и 1, такую, что длина y_i не превосходит n_i для всех i . Далее, пара (s, y_i) будет служить основой для построения кода соответствующего $x(s, i) \in H_s$. Мы рассмотрим некоторый префиксный способ кодирования таких пар (а тем самым и $x(s, i) \in H_s$), т.е. при таком способе ни один код не является продолжением другого. Для произвольного неотрицательного целого числа s обозначаем посредством $\text{bin}(s)$ его двоичную запись. Тогда $\text{bin}(|\text{bin}(s)|)$ — двоичная запись длины двоичной записи числа s . Кроме этого, для любой конечной двоичной последовательности $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_n$ определим $\text{dou}(\gamma) = \gamma_1 \gamma_1 \dots \gamma_n \gamma_n$ (последовательность, полученная из γ повторением каждого из ее членов дважды). Для любых двух конечных последовательностей x и y мы будем обозначать посредством xy последовательность, полученную приписыванием всех членов y после всех членов x . В качестве кода пары $(s, x(s, i))$ возьмем двоичную последовательность $\text{dou}(\text{bin}(|\text{bin}(s)|)) 01 \text{bin}(s) y_i$. Легко видеть, что двоичный код пары $(s, x(s, i))$ будет иметь длину, не превышающую $\log_2 s + 2 \log_2 \log_2 s + |y_i| + c_1$, где $c_1 > 0$. Отсюда следует, что

$$KM(x) \leq -\log_2 P(x) - \rho(s) + \log_2 s + 2 \log_2 \log_2 s + c_2$$

для любого $x \in H_s$, где c_2 — некоторая положительная константа. Таким образом, $d(x) \geq \rho(s) - \log_2 s - 2 \log_2 \log_2 s - c_2$ для любого $x \in H_s$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. 1). Пусть $\omega \in A_k$, где A_k — из первой части доказательства теоремы 1. Полагаем $H_k = \{\omega^{N_k} \mid \omega \in A_k\}$, где $\omega^N = \omega_1 \dots \omega_N$. Так как $P(A_k) < Ck^{-\gamma}$, $\gamma > 1$, можно положить $\rho(s) = [c' \log_2 s]$ для соответствующей константы $c' > 1$. Тогда $d(\omega^{N_k}) \geq c'' \log_2 k$ для всех достаточно больших k , где $c'' > 0$. Учитывая то, что $[\Psi_{N_k} - \varepsilon] = k - 1$ и определение Ψ_N , получаем, что $d(\omega^{N_k}) \geq C \log_2 \log_2 N_k$ для всех достаточно больших k , где C — некоторая положительная константа.

Во второй части доказательства п. 1) полагаем $H_s = \{\omega_{n(s)}^N \mid \omega \in U_s\}$. Анализ доказательства теоремы 1 из [4] показывает, что $P(U_s) \leq P(V_{n(s)}) = O((n(s))^{-p})$, где $p > 0$ (при условии, что N_k выбирается, как во второй части доказательства теоремы 1 данной работы). Поэтому мы можем взять $\rho(s) = [c' \log_2 n(s)]$, для некоторой константы $c' > 0$. Мы также можем выбрать функцию $n(s)$ так, чтобы неравенство $n(s) \geq 2^s$ выполнялось для всех s . Отсюда, если $\omega \in U_s$, то

$$d(\omega_{n(s)}^N) \geq c' \log_2 n(s) - \log_2 s - c \log_2 \log_2 s - 2 \geq c'' \log_2 n(s)$$

для всех достаточно больших s , где c'' — положительная константа. Отсюда, если $\omega \in U_s$ для бесконечно многих s , то $d(\omega^N) \geq c'' \log_2 \log_2 N$ для бесконечно многих N .

Отсюда следует, что для того, чтобы последовательность ω не принадлежала множествам A_k , а также U_k для всех k , начиная с некоторого, достаточно потребовать $d(\omega^n) = o(\log_2 \log_2 n)$. В этом случае а) и б) имеют место. Часть 1) доказана.

Часть 2). Пусть P — равномерная бернуллиевская мера, A_k — как в части 1). Используя нижнюю оценку из теоремы 5 работы [9] (аналогично доказательству теоремы 1 из [4]), можно показать, что $P(A_k) \geq k^{-(1+\varepsilon/4)}$ для всех достаточно больших

k . Отсюда, используя определение N_k , получаем, что $P(A_k) \geq 2^{-(1+\varepsilon/2)\log_2 \log_2 N_k}$ для всех достаточно больших k .

Из определения дефекта случайности легко следует, что

$$\begin{aligned} & \Sigma \{P(x) \mid |x| = n, d(x) \geq m\} \\ & \leq 2^{-m} \Sigma \{2^{-KM(x)} \mid |x| = n, d(x) \geq m\} \leq 2^{-m}. \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда получаем, что для произвольного k существует бесконечная последовательность $\alpha_k \in A_k$ такая, что $d(\alpha_k^{N_k}) < (1+\varepsilon/2)\log_2 \log_2 N_k + 1$ (здесь мы использовали оценку (5) при $m = (1+\varepsilon/2)\log_2 \log_2 N_k + 1$). Пусть $\alpha(k) = \alpha_k^{N_k}$ — начальный фрагмент такой последовательности длины N_k . Составим из подобных фрагментов достаточно большой длины бесконечную последовательность ω , удовлетворяющую утверждению 2) теоремы. В качестве первого начального фрагмента ω берем $\alpha(1)$. Пусть некоторый начальный фрагмент ω^K (длины K) последовательности ω уже построен.

Используя кодирование, подобное тому, которое использовалось выше, легко показать, что $KM(y) \leq KM(xy) + 2\log_2 |x| + C$ для произвольных конечных последовательностей x и y , где C — некоторая константа. Кроме этого, так как P — бернуллиевская мера, имеем $P(xy) = P(x)P(y)$. Отсюда получаем оценку $d(xy) \leq d(y) + 2\log_2 |x| - \log_2 P(x) + C$, где C — константа.

Полагая теперь $x = \omega^K 0$, находим достаточно большое k так, чтобы

$$\frac{\varepsilon}{4} \log_2 \log_2 N_k \geq -\log_2 P(x) + 2\log_2 |x| + C \quad \text{и} \quad [\Psi_{N_k} - \varepsilon] \geq K.$$

Теперь мы можем в качестве продолжения ω^K взять последовательность, полученную приписыванием к ней нуля и конечной последовательности $\alpha(k)$, т.е. последовательность $\omega^L = \omega^K 0 \alpha(k)$, где $L = K + N_k + 1$. Тогда

$$d(\omega^L) < (1+\varepsilon)\log_2 \log_2 L$$

и любая серия из единиц, содержащаяся в ω^L , содержится в ω^K или в $\alpha(k)$, поэтому ее длина не превосходит $[\Psi_{N_k} - \varepsilon] \leq [\Psi_L - \varepsilon]$. Теорема 2 доказана.

Впервые подобные сложные характеристики ряда вероятностных законов были получены в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вовк В. Г. Закон повторного логарифма для случайных по Колмогорову, или хаотических, последовательностей. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. XXXII, в. 3, с. 456–468.
2. Колмогоров А. Н. К логическим основам теории информации и теории вероятностей. — Проблемы передачи информации, 1969, т. 5, № 3, с. 3–7.
3. Колмогоров А. Н., Успенский В. А. Алгоритмы и случайность. — Теория вероятн. и ее примен., 1987, т. XXXII, в. 3, с. 425–455.
4. Самарова С. С. О длине максимальной серии «успехов» для марковской цепи с двумя состояниями. — Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. XXVI, в. 3, с. 510–520.
5. Успенский В. А., Семенов А. Л. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. М.: Наука, 1987, 286 с. (Библиотечка программиста, № 49.)
6. Успенский В. А., Семенов А. Л., Шень А. Х. Может ли (индивидуальная) случайная последовательность нулей и единиц быть случайной? — Успехи матем. наук, 1990, т. 45, № 1, с. 105–162.

7. Шень А. Х. О соотношениях между различными алгоритмическими определениями случайности. — Докл. АН СССР, 1988, т. 302, № 3, с. 548–552.
8. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980, 576 с.
9. Erdős P., Révész P. On the length of the longest head-run. — Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 1977, v. 16, p. 219–227.
10. Rényi A. Probability Theory. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1970, 391 p.

Поступила в редакцию
17.III.1997

© 1997 г.

НАГАЕВ С. В.*

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В ТЕРМИНАХ УРЕЗАННЫХ ПСЕВДОМОМЕНТОВ¹⁾

Получена оценка вероятности больших отклонений суммы независимых случайных величин, учитывающая близость распределения слагаемых к гауссовскому.

Ключевые слова и фразы: большие отклонения, урезанные псевдомоменты, стандартный нормальный закон.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые случайные величины с функциями распределения $F_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$.

Целью настоящей работы является вывод верхних оценок вероятности $P\{S_n > x\}$, учитывающих близость распределений $F_j(x)$ к нормальному.

По форме эта оценка близка неравенствам, полученным в [1], с той разницей, что моменты случайных величин X_j заменяются урезанными псевдомоментами (определение и свойства различного вида псевдомоментов см., например, в монографии [2]).

Впервые оценки вероятностей больших отклонений в терминах псевдомоментов были получены Эбралидзе [3] путем редукции к результатам [1], основанной на методе одного вероятностного пространства.

Введем нужные нам обозначения. Для любой случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ положим

$$\kappa_t(F; a, b) = \int_a^b |x|^{t-1} \left| F(x) - \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \right| dx,$$

где $m = EX$, $\sigma^2 = E(X - m)^2$, $\Phi(x)$ — стандартный нормальный закон. Пусть

$$\kappa_t(F; b) = \kappa_t(F; -\infty, b), \quad \kappa_t(F) = \kappa_t(F; \infty).$$

Определим

$$\begin{aligned} \lambda_t(F; a, b) &= \int_a^b x^{t-1} \left(F(x) - \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \right) dx, \\ \lambda_t(F; b) &= \lambda_t(F; -\infty, b), \quad \Delta(F; b) = F(b) - \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

*Институт математики им. С. Л. Соболева, Университетский пр., 4, 630090 Новосибирск, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01529).