Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Нагаев, Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин в терминах урезанных псевдомоментов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 3, 615–623

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2004>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:59:11

7. Шень А. Х. О соотношениях между различными алгоритмическими определениями случайности. — Докл. АН СССР, 1988, т. 302, № 3, с. 548–552.
8. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980, 576 с.
9. Erdős P., Révész P. On the length of the longest head-run. — Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 1977, v. 16, p. 219–227.
10. Rényi A. Probability Theory. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1970, 391 p.

Поступила в редакцию
17.III.1997

© 1997 г.

НАГАЕВ С. В.*

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В ТЕРМИНАХ УРЕЗАННЫХ ПСЕВДОМОМЕНТОВ¹⁾

Получена оценка вероятности больших отклонений суммы независимых случайных величин, учитывающая близость распределения слагаемых к гауссовскому.

Ключевые слова и фразы: большие отклонения, урезанные псевдомоменты, стандартный нормальный закон.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые случайные величины с функциями распределения $F_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$.

Целью настоящей работы является вывод верхних оценок вероятности $P\{S_n > x\}$, учитывающих близость распределений $F_j(x)$ к нормальному.

По форме эта оценка близка неравенствам, полученным в [1], с той разницей, что моменты случайных величин X_j заменяются урезанными псевдомоментами (определение и свойства различного вида псевдомоментов см., например, в монографии [2]).

Впервые оценки вероятностей больших отклонений в терминах псевдомоментов были получены Эбралидзе [3] путем редукции к результатам [1], основанной на методе одного вероятностного пространства.

Введем нужные нам обозначения. Для любой случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ положим

$$\kappa_t(F; a, b) = \int_a^b |x|^{t-1} \left| F(x) - \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \right| dx,$$

где $m = EX$, $\sigma^2 = E(X - m)^2$, $\Phi(x)$ — стандартный нормальный закон. Пусть

$$\kappa_t(F; b) = \kappa_t(F; -\infty, b), \quad \kappa_t(F) = \kappa_t(F; \infty).$$

Определим

$$\lambda_t(F; a, b) = \int_a^b x^{t-1} \left(F(x) - \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \right) dx,$$

$$\lambda_t(F; b) = \lambda_t(F; -\infty, b), \quad \Delta(F; b) = F(b) - \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right).$$

*Институт математики им. С. Л. Соболева, Университетский пр., 4, 630090 Новосибирск, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01529).

Пусть $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, где y_j — любой набор положительных чисел. Положим

$$\Lambda(Y) = - \sum_1^n \left(\lambda_1(F_j; y_j) \wedge 0 \right), \quad D(Y) = \sum_1^n \left(\Delta(F_j; y_j) \vee 0 \right),$$

$$K_t(0, Y) = \sum_1^n \kappa_t(F_j; 0, y_j), \quad K_t(Y) = \sum_1^n \kappa_t(F_j; y_j), \quad K_t = \sum \kappa_t(F).$$

Теорема 1. Пусть случайные величины X_j имеют нулевые математические ожидания и конечные вторые моменты $\sigma_j^2 = EX_j^2$. Тогда для любых чисел $x > 0$, $y > \max_{1 \leq j \leq n} y_j$, $0 < \alpha < 1$, $t > 0$, $\alpha x > \Lambda(Y)$

$$P\{S_n \geq x\} < \sum_1^n P\{X_j \geq y_j\} + \exp \left\{ \frac{\beta x}{c_0 y} - \frac{(\alpha x - \Lambda(Y))^2}{4B^2(Y)} \right\} + e^{\beta x / c_0 y} \left(\frac{c_0 y}{\beta x} \left(D(Y) + \frac{K_{t+1}(0, Y)}{y^{t+1}} \right) \right)^{\beta x / c_0 y}, \quad (1)$$

где $B^2(Y) = B^2/2 + e^t K_2(Y)$, $B^2 = \sum_1^n \sigma_j^2$, $c_0 = 1 + 1/e$, $\beta = 1 - \alpha$.

Доказательство. В отличие от [3] мы применим метод, развитый в [1] и [4].

В доказываемой ниже лемме и следствии из нее для краткости будем опускать символ F в $\Delta(F; b)$ и обозначениях для псевдомоментов. Кроме того, мы предполагаем, что $\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = 0$. Положим $\lambda(b) = -\lambda_1(b)$.

Лемма 1. Для любых $t > 0$ и $b > 0$

$$\int_{x \leq b} e^{hx} dF(x) < \lambda(b)h + e^t \kappa_2(b)h^2 + e^{h^2 \sigma^2 / 2} + e^{hb} \Delta(b), \quad (2)$$

если $0 < h \leq t/b$, и

$$\int_{x \leq b} e^{hx} dF(x) < \lambda(b)h + e^t \kappa_2(b)h^2 + e^{h^2 \sigma^2 / 2} + e^{hb} \Delta(b) + h \kappa_{t+1}(0, b) \frac{e^{hb} - 1}{b^t}, \quad (3)$$

если $h \geq t/b$.

Доказательство. Очевидно,

$$\int_{x \leq b} e^{hx} dF(x) = \int_{x \leq b} e^{hx} d\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \int_{x \leq b} e^{hx} d\Delta(x). \quad (4)$$

Заметим, что

$$\int_{x \leq b} e^{hx} d\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) < e^{h^2 \sigma^2 / 2}. \quad (5)$$

Предположим, что $h \leq t/b$. Тогда

$$\left| \int_{x \leq b} (e^{hx} - 1) \Delta(x) dx \right| < e^t \kappa_2(b)h. \quad (6)$$

Следовательно,

$$- \int_{x \leq b} e^{hx} \Delta(x) dx < \lambda(b) + e^t \kappa_2(b)h. \quad (7)$$

С другой стороны,

$$\int_{x \leq b} e^{hx} d\Delta(x) = e^{hb} \Delta(b) - h \int_{x \leq b} e^{hx} \Delta(x) dx. \quad (8)$$

Из (7) и (8) вытекает

$$\int_{x \leq b} e^{hx} d\Delta(x) \leq e^{hb} \Delta(b) + \lambda(b)h + e^t \kappa_2(b)h^2. \quad (9)$$

Комбинируя (4), (5) и (9), мы заключаем, что при $h \leq t/b$

$$\int_{x \leq b} e^{hx} dF(x) < \lambda(b)h + e^t \kappa_2(b)h^2 + e^{h^2 \sigma^2 / 2} + e^{hb} \Delta(b).$$

Итак, мы вывели неравенство (2).

Пусть теперь $h > t/b$. Тогда, вследствие (8),

$$\begin{aligned} \int_{x < b} e^{hx} d\Delta(x) &= e^{hb} \Delta(b) - h \int_{x \leq t/h} (e^{hx} - 1) \Delta(x) dx \\ &\quad - h \int_{t/h < x < b} (e^{hx} - 1) \Delta(x) dx + \lambda(b)h. \end{aligned}$$

Функция $(e^{hx} - 1)/x^t$ возрастает при $x > t/h$. Поэтому

$$\left| \int_{t/h < x < b} (e^{hx} - 1) \Delta(x) dx \right| < \kappa_{t+1}(0, b) \frac{e^{hb} - 1}{b^t}.$$

С другой стороны,

$$\left| \int_{x \leq t/h} (e^{hx} - 1) \Delta(x) dx \right| < e^t \kappa_2(b)h.$$

В результате мы получаем, что

$$\int_{x \leq b} e^{hx} \Delta(x) dx \leq e^{hb} \Delta(b) + \lambda(b)h + e^t \kappa_2(b)h^2 + h \kappa_{t+1}(0, b) \frac{e^{hb} - 1}{b^t}. \quad (10)$$

Комбинируя (4), (5) и (10), мы приходим к неравенству (3).

Положим $\lambda^+(b) = \lambda(b) \vee 0$, $\Delta^+(b) = \Delta(b) \vee 0$.

Следствие. Для любых $t > 0$ и $b > 0$

$$\begin{aligned} \ln \int_{x \leq b} e^{hx} dF(x) &< \lambda^+(b)h + \left(\frac{\sigma^2}{2} + e^t \kappa_2(b) \right) h^2 \\ &\quad + \Delta^+(b) e^{hb} + h \kappa_{t+1}(0, b) \frac{e^{hb} - 1}{b^t}, \end{aligned} \quad (11)$$

если $h > t/b$, и

$$\ln \int_{x \leq b} e^{hx} dF(x) < \lambda^+(b)h + \left(\frac{\sigma^2}{2} + e^t \kappa_2(b) \right) h^2 + \Delta^+(b) e^{hb}, \quad (12)$$

если $0 < h \leq t/b$.

Доказательство. Нетрудно показать с помощью неравенства (3), что

$$\begin{aligned} \int_{x \leq b} e^{hx} dF(x) &< e^{h^2 \sigma^2 / 2} \left(1 + \lambda^+(b)h + e^t \kappa_2(b)h^2 \right. \\ &\quad \left. + \Delta^+(b) e^{hb} + h \kappa_{t+1}(0, b) \frac{e^{hb} - 1}{b^t} \right). \end{aligned}$$

Чтобы вывести отсюда (11), достаточно воспользоваться неравенством $\ln z < z - 1$. Неравенство (12) доказывается точно так же, только вместо (3) нужно применить (2).

Продолжим доказательство теоремы. Положим

$$F_{ky}(x) = \begin{cases} F_k(x), & x < y, \\ F_k(y), & x \geq y. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что

$$F_1 * F_2 * \dots * F_n(x) - F_{1y_1} * F_{2y_2} * \dots * F_{ny_n}(x) \leq \sum_1^n (1 - F_k(y_k)). \quad (13)$$

Далее, в силу (11) и (12)

$$\begin{aligned} \Pi_n(x) &:= e^{-hx} \Pi_1^n \int_{x < y_k} e^{hx} dF_k(x) \\ &< \exp \left\{ -hx + \Lambda(Y)h + \left(\frac{B^2}{2} + e^t K_2(Y) \right) h^2 \right. \\ &\quad \left. + D(Y)e^{hy} + hK_{t+1}(0, Y) \frac{e^{hy} - 1}{y^t} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя неравенство $u \leq \exp\{u/e\}$, имеем

$$\frac{h(e^{hy} - 1)}{y^t} \leq \frac{e^{hy(1+1/e)}}{y^{t+1}}.$$

Следовательно,

$$D(Y)e^{hy} + hK_{t+1}(0, Y) \frac{e^{hy} - 1}{y^t} < e^{(1+1/e)hy} \left(D(Y) + \frac{K_{t+1}(0, Y)}{y^{t+1}} \right).$$

Обозначим для краткости

$$B^2(Y) = \frac{B^2}{2} + e^t K_2(Y), \quad Q(Y) = D(Y) + \frac{K_{t+1}(0, Y)}{y^{t+1}}, \quad c_0 = 1 + \frac{1}{e}.$$

Полагая $f_1(h) = h(\Lambda(Y) - \alpha x) + h^2 B^2(Y)$, $f_2(h) = Q(Y)e^{c_0 hy} - h\beta x$, $\beta = 1 - \alpha$, мы можем переписать (14) в виде

$$\Pi_n(x) < \exp \{f_1(h) + f_2(h)\}. \quad (15)$$

Без потери общности $c_0 y Q(Y) < \beta x$. Пусть h_1 и h_2 — корни уравнений $f'_1(h) = 0$ и $f'_2(h) = 0$ соответственно. Очевидно,

$$h_1 = \frac{\alpha x - \Lambda(Y)}{2B^2(Y)}, \quad c_0 y Q(Y) \exp\{c_0 h_2 y\} = \beta x. \quad (16)$$

Пусть $h_1 \leq h_2$. Функция $f_2(h)$ убывает при $h \leq h_2$. Поэтому

$$f_2(h_1) < f_2(0) = Q(Y) < Q(Y) \exp\{c_0 h_2 y\} = \frac{\beta x}{c_0 y}. \quad (17)$$

С другой стороны,

$$f_1(h_1) = \frac{(\alpha x - \Lambda(Y))^2}{4B^2(Y)}. \quad (18)$$

Полагая в (15) $h = h_1$ и учитывая (17) и (18), получаем

$$\Pi_n(x) < \exp \left\{ \frac{\beta x}{c_0 y} - \frac{(\alpha x - \Lambda(Y))^2}{4B^2(Y)} \right\}. \quad (19)$$

Предположим теперь, что $h_1 > h_2$. Тогда $f_1(h_2) \leq f_1(0) = 0$. С другой стороны, вследствие (16), $f_2(h_2) = \beta x / c_0 y - \beta x h_2$. Полагая теперь в (15) $h = h_2$, имеем

$$\Pi_n(x) \leq e^{\beta x / c_0 y} \left(\frac{c_0 y Q(Y)}{\beta x} \right)^{\beta x / y}. \quad (20)$$

Из (13), (19), (20) и неравенства $\Pi_1^n F_{j y_j}(\infty) - \Pi_1^n F_{j y_j}(x) \leq \Pi_n(x)$ следует утверждение теоремы.

Интересно сравнить оценку (1) с упомянутым выше результатом Эбралидзе, который в наших обозначениях выглядит следующим образом:

$$P\{S_n \geq x\} \leq 1 - \Phi\left(\frac{(1-\alpha)x}{B}\right) + \exp\left\{-\frac{c_1 \alpha^2 x^2}{2K_2}\right\} + \frac{c_2 t K_t}{(\alpha x)^t}, \quad (21)$$

где $c_1(t) = (l+2)^2 e^l$, $c_2(t) = t(1+2/l)^t$,

$$l = \begin{cases} t, & t - \text{целое,} \\ [t] + 1, & t - \text{нецелое,} \end{cases}$$

(см. [3, теорема 1]).

Дополнительно предполагается, что медианы случайных величин X_i равны нулю. Это ограничение не очень существенно (см. по этому поводу п. 4 в [3]). Очевидно, оценку (1) нельзя получить из (21), хотя бы потому, что, вообще говоря, $K_t(0, Y) < K_t$ и $y \neq x$. Однако далеко не ясно, с первого взгляда, можно или нет вывести (21) из (1).

К изучению этого вопроса мы сейчас и переходим. Основная трудность заключается в том, чтобы получить оценку для $\sum_1^n P\{X_j \geq y_j\}$ в терминах Φ и K_t .

Из равенства (2) работы [3] в силу леммы 1 из той же работы следует, что для любого $0 < \lambda < 1$

$$P\{X_j \geq y_j\} < 1 - \Phi\left(\frac{(1-\lambda)y_j}{\sigma_j}\right) + \frac{\kappa_t(F_j)}{\lambda^t y_j^t}, \quad (22)$$

однако при дополнительном предположении, что медиана X_j равна нулю.

Метод одного вероятностного пространства в данной ситуации, несмотря на свое изящество, кажется несколько вычурным. Поэтому, как часто бывает в таких случаях, возникает желание найти более прямой подход. Эту проблему решает

Лемма 2. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — любые неубывающие функции, причем $F(b) < G((1-\lambda)b)$, $0 < \lambda < 1$, $b > 0$. Тогда

$$G((1-\lambda)b) - F(b) < \frac{1}{\lambda b} \int_{(1-\lambda)b}^b (G(x) - F(x)) dx. \quad (23)$$

Доказательство. Поскольку $F(x)$ не убывает,

$$\int_{(1-\lambda)b}^b (G((1-\lambda)b) - F(x)) dx > \lambda b (G((1-\lambda)b) - F(b)). \quad (24)$$

С другой стороны, $G(x) \geq G((1-\lambda)b)$ в промежутке $(1-\lambda)b < x < b$.

Следовательно,

$$\int_{(1-\lambda)b}^b (G((1-\lambda)b) - F(x)) dx < \int_{(1-\lambda)b}^b (G(x) - F(x)) dx. \quad (25)$$

Из (24) из (25) следует неравенство (23).

Применяя лемму 2, мы получаем оценку

$$P\{X_j \geq y_j\} < 1 - \Phi\left(\frac{(1-\lambda)y_j}{\sigma_j}\right) + \frac{\kappa_t(F_j; (1-\lambda)y_j, y_j)}{\lambda(1-\lambda)^{t-1}y_j^t}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (26)$$

причем без всяких дополнительных ограничений.

Мы видим, что оценка (26) несколько отличается от (22).

Следующий шаг — это оценка суммы $\sum_j (1 - \Phi((1-\lambda)y_j/\sigma_j))$.

В [4, с. 759] доказано, что для любых случайных величин, удовлетворяющих условиям теоремы 1,

$$P\{S_n \geq x\} \geq \frac{1}{2} \sum_1^n P\{X_j > 2x\},$$

если $x \geq 2B$. Отсюда $\sum_1^n (1 - \Phi(x/\sigma_j)) \leq 2(1 - \Phi(x/2B))$, если $x \geq B$.

Используя конкретные свойства нормального закона, можно получить более точную оценку, однако, в более узкой области.

Введем для краткости обозначение $\Phi_1(x) = 1 - \Phi(x)$.

Лемма 3. Если $x \geq \sqrt{3}B$, то

$$\sum_1^n \Phi_1\left(\frac{x}{\sigma_j}\right) \leq \Phi_1\left(\frac{x}{B}\right), \quad B^2 = \sum_1^n \sigma_j^2. \quad (27)$$

Доказательство. Докажем, прежде всего, что лемма верна для $n = 2$. Очевидно, для любого $\sigma > 0$

$$\begin{aligned} \Phi'_{\sigma^2}\left(\frac{x}{\sigma}\right) &= -\frac{x}{\sigma^3 2\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}, \\ \Phi'_{\sigma^2}\left(\frac{x}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right) &= \frac{x}{(1-\sigma^2)^{3/2} 2\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2(1-\sigma^2)}. \end{aligned}$$

Функция $u^{3/2}e^{-u^2/2}$ убывает по u при $u > 3/x^2$. Следовательно, функция $e^{-x^2/2\sigma^2}/\sigma^3$ возрастает по σ при $0 < \sigma < 1$, если $x \geq \sqrt{3}$. Соответственно, функция $e^{-x^2/2(1-\sigma^2)}/(1-\sigma^2)^{3/2}$ убывает по σ при $0 < \sigma < 1$, если $x \geq \sqrt{3}$.

Поскольку при $\sigma^2 = \frac{1}{2}$

$$\Phi'_{\sigma^2}\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \Phi'_{\sigma^2}\left(\frac{x}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right) = 0,$$

из сказанного выше следует, что

$$\begin{aligned} \Phi'_{\sigma^2}\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \Phi'_{\sigma^2}\left(\frac{x}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right) &> 0, \quad 0 < \sigma^2 < \frac{1}{2}, \\ \Phi'_{\sigma^2}\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \Phi'_{\sigma^2}\left(\frac{x}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right) &< 0, \quad \frac{1}{2} < \sigma^2 < 1. \end{aligned}$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает неравенство

$$1 + \Phi(x) < \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right), \quad x \geq \sqrt{3}, \quad 0 < \sigma^2 < 1.$$

Иначе говоря,

$$\Phi_1\left(\frac{x}{B}\right) > \Phi_1\left(\frac{x}{\sigma_1}\right) + \Phi_1\left(\frac{x}{\sigma_2}\right), \quad (28)$$

где $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = B^2$, $x \geq \sqrt{3}B$.

Пусть лемма верна для $n-1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_1^n \Phi_1\left(\frac{x}{\sigma_j}\right) &= \sum_1^{n-1} \Phi_1\left(\frac{x}{\sigma_j}\right) + \Phi_1\left(\frac{x}{\sigma_n}\right) \\ &\leq \Phi_1\left(\frac{x}{\sqrt{B^2 - \sigma_n^2}}\right) + \Phi_1\left(\frac{x}{\sigma_n}\right), \quad x \geq \sqrt{3(B^2 - \sigma_n^2)}. \end{aligned}$$

Используя неравенство (28), мы приходим к утверждению леммы.

Вернемся к неравенству (1). Заметим, что

$$D(Y) = \sum_j' \left(F_j(y_j) - \Phi\left(\frac{y_j}{\sigma_j}\right) \right), \quad (29)$$

где $\sum_j'$ означает суммирование по тем j , для которых

$$F_j(y_j) > \Phi\left(\frac{y_j}{\sigma_j}\right). \quad (30)$$

Очевидно, для любого $c > 1$

$$1 - F_j(y_j) + c \left(F_j(y_j) - \Phi\left(\frac{y_j}{\sigma_j}\right) \right) < c \Phi_1\left(\frac{y_j}{\sigma_j}\right). \quad (31)$$

Положим теперь в (1) $y_j = y$ для всех $1 \leq j \leq n$ и выберем y так, чтобы $\beta x / c_0 y = 1$, т.е. $y = \beta x / c_0$. Тогда в силу (29) и (31)

$$eD(Y) + \sum_j' \mathbf{P}\left\{X_j > \frac{\beta x}{c_0}\right\} < e \sum_j' \Phi_1\left(\frac{\beta x}{c_0 \sigma_j}\right).$$

Кроме того, $\Lambda(Y) = K_2/y < c_0 K_2/\beta x$. Поэтому при $x^2 > 2c_0 K_2/\alpha\beta$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_n \geq x\} &< e \sum_j' \Phi_1\left(\frac{\beta x}{c_0 \sigma_j}\right) + \sum_j'' \mathbf{P}\left\{X_j > \frac{\beta x}{c_0}\right\} \\ &+ \exp\left\{1 - \frac{\alpha^2 x^2}{16B^2(Y)}\right\} + e\left(\frac{c_0}{\beta}\right)^{i+1} \frac{K_{i+1}(0, Y)}{x^{i+1}}, \end{aligned}$$

где $\sum_j''$ означает суммирование по j , не удовлетворяющим (30). Полагая в (26) $y_j = \beta x / c_0$ и $\lambda = \frac{1}{2}$, имеем

$$\sum_j'' \mathbf{P}\left\{X_j > \frac{\beta x}{c_0}\right\} < \sum_j'' \Phi_1\left(\frac{\beta x}{2c_0 \sigma_j}\right) + \left(\frac{2c_0}{\beta}\right)^{i+1} \frac{K_{i+1}(0, Y)}{x^{i+1}}.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. Для любых $t > 0$ и $0 < \alpha < 1$

$$P\{S_n \geq x\} < e \left(\sum_1^n \left(1 - \Phi \left(\frac{\beta x}{2c_0 \sigma_j} \right) + \exp \left\{ -\frac{\alpha^2 x^2}{16B^2(Y)} \right\} \right) + (e + 2^{t+1}) \left(\frac{c_0}{\beta} \right)^{t+1} \frac{K_{t+1}(0, Y)}{x^{t+1}} \right), \quad \beta = 1 - \alpha, \quad (32)$$

если $x^2 > 2c_0 K_2 / \alpha \beta$.

Используя лемму 2 и учитывая, что $K_{t+1}(0, Y) < K_{t+1}$ и $B^2(Y) < c_3(t)B^2$, где $c_3(t) = \frac{1}{2} + 2e^t$, мы заключаем, что

$$P\{S_n \geq x\} < e \left(1 - \Phi \left(\frac{\beta x}{2c_0 B} \right) + \exp \left\{ -\frac{\alpha^2 x^2}{16c_3(t)B^2} \right\} + (e + 2^{t+1}) \left(\frac{c_0}{\beta} \right)^{t+1} \frac{K_{t+1}(0, Y)}{x^{t+1}} \right), \quad x^2 > \frac{2c_0 K_2}{\alpha \beta}.$$

Если положить $\alpha = \frac{1}{2}$, то мы получим оценку

$$P\{S_n \geq x\} < 2e \exp \left\{ -\frac{x^2}{64c_3(t)B^2} \right\} + (e + 2^{t+1}) (2c_0)^{t+1} \frac{K_{t+1}}{x^{t+1}}, \quad x > 2\sqrt{2c_0 K_2}. \quad (33)$$

Аналогичное неравенство следует из (21) при $\alpha = \frac{1}{2}$, но с другими постоянными.

Полагая в (33) $t = 2$, имеем

$$P\{S_n \geq x\} \leq 2e \exp \left\{ -C_1 \frac{x^2}{B^2} \right\} + C_2 \frac{K_3}{x^3}, \quad x > 3.31 K_2^{1/2}, \quad (34)$$

где $C_1 > 10^{-3}$, $C_2 < 220$.

Для сравнения приведем соответствующее неравенство из [3], которое в наших обозначениях выглядит следующим образом:

$$P\{S_n \geq x\} \leq 1 - \Phi \left(\frac{x}{2B} \right) + \exp \left\{ -C'_1 \frac{x^2}{B^2} \right\} + C'_2 \frac{K_3}{x^3},$$

где $C'_1 > 3 \cdot 10^{-4}$, $C'_2 < 450$.

Хотелось бы, конечно, имея в виду приложения, чтобы постоянная C_1 в (34) была побольше, а C_2 , соответственно, поменьше, но, скорее всего, большие значения для $1/C_1$ и C_2 — это необходимая плата за простоту формулировки.

Исходное неравенство (1), конечно, значительно точнее. Вопрос об оптимальности констант в неравенствах, полученных в настоящей работе, требует специального исследования.

Заметим, что неравенства, имеющие много общего с (1), однако без явных значений для постоянных, следуют из неравномерных оценок в центральной предельной теореме (см., например, [5]).

Обратим внимание читателя на то, что эти неравенства содержат K_t в степени $\gamma < 1$. Это вообще типично для оценок точности приближения нормальным законом и устойчивыми законами в терминах псевдомоментов (см., например, статью [6] и библиографию к ней).

Поскольку $K_t(0, Y)/x^4$ может входить в (1) в любой степени, мы вправе предположить, что K_t^γ , $\gamma < 1$, появляется в оценке для $|\mathbf{P}\{S_n < Bx\} - \Phi(x)|$ только для $x < 1/B$, т.е. скорее при малых, чем при больших отклонениях.

Между прочим, неравенство (23) позволяет объяснить, почему K_3 входит в равномерную оценку для $\Delta(x)$ именно в степени $\frac{1}{4}$ (см. [6] и более ранние работы на эту тему).

В самом деле, полагая в (23) $G = \Phi$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $b = x$, имеем при $\sigma = 1$

$$\Phi(x) - \mathbf{P}\{X < x\} < \Phi(x) - \Phi\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{K_3}{x^3} < \frac{xe^{-x^2/8}}{2\sqrt{2\pi}} + \frac{K_3}{x^3} \equiv r(x).$$

Если $x = K_3^{1/4}$, то $r(x) < (1 + 1/\sqrt{2e\pi}) K_3^{1/4}$. Как показывают примеры (см. [6]), полученная оценка в смысле зависимости от K_3 является точной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фук Д. Х., Нагаев С. В. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. XVI, в. 4, с. 660–675.
2. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986.
3. Эбралидзе Ш. С. Неравенства для вероятностей больших отклонений в терминах псевдомоментов. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. XVI, в. 4, с. 760–765.
4. Nagaev S. V. Large deviations of sums of independent random variables. — Ann. Probab., 1979, v. 7, № 5, p. 745–789.
5. Шоргин С. Я. Неклассические оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме, учитывающие большие отклонения. — Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. XXVII, в. 2, с. 308–318.
6. Нагаев С. В., Ротарь В. И. Об усилении оценок типа Ляпунова (случай близости распределений слагаемых к нормальному). — Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. XVIII, в. 1, с. 109–121.

Поступила в редакцию
12.V.1996

© 1997 г.

ПАВЛОВ И. В.*

СИСТЕМЫ ХААРА И НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О БАЗИСАХ В ПРОСТРАНСТВЕ МАРТИНГАЛОВ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ¹⁾

Для пространств мартингалов со смешанной нормой, определенных относительно диадического потока σ -алгебр, найдено условие на показатели суммируемости, влекущее за собой отсутствие безусловного базиса в этих пространствах

*Ростовская-на-Дону государственная академия строительства, кафедра высшей математики, ул. Социалистическая, 162, 344022 Ростов-на-Дону, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 94-01-01051-а.