Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Сгибнев, Асимптотика обобщенных функций восстановления при наличии конечной дисперсии, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 3, 632–637

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2007>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 10:48:51

4. Белкина Т. А., Пресман Э. Л. Асимптотически оптимальные по распределению управления для линейной стохастической системы с квадратичным функционалом. — Автоматика и телемеханика, 1997, в. 3, с. 106–116.
5. Mandl P. Asymptotic ordering of probability distributions for linear controlled systems with quadratic cost. — In: Stochastic Differential Systems. Ed. by N. Christopeit et al. (Lecture Notes in Control and Inform. Sci.) Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1986, p. 277–283.
6. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986, 512 с.

Поступила в редакцию
6.VIII.1996

© 1997 г.

СГИБНЕВ М. С.*

АСИМПТОТИКА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ КОНЕЧНОЙ ДИСПЕРСИИ¹⁾

Рассматривается асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ обобщенных функций восстановления следующего вида:

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n \cdot (n+k-1)!}{k!} P\{S_k \leq t\},$$

где $n > 0$ — целое число, а S_k — частичные суммы последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с положительным математическим ожиданием и конечной дисперсией.

Ключевые слова и фразы: обобщенные функции восстановления, старшие моменты восстановления, случайное блуждание, лестничные величины.

Пусть $X_i, i = 1, 2, \dots$, — вещественнозначные независимые одинаково распределенные случайные величины с неарифметической функцией распределения $F(x)$. Мы будем всюду предполагать, что $\mu = EX_1 > 0$ и $\mu_2 = EX_1^2 < \infty$. Положим $S_0 = 0$ и $S_k = \sum_{i=1}^k X_i, k \geq 1$.

В настоящей заметке речь пойдет об обобщенных функциях восстановления специального вида ($n > 0$ — целое число)

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n \cdot (n+k-1)!}{k!} P\{S_k \leq t\}. \quad (1)$$

Если $E(X_1^-)^{n+1} < \infty$, то функция $\Phi_n(t)$ конечна [1, следствие 5.2]; здесь $x^- = \max(0, -x)$.

В классе обобщенных функций восстановления $\sum_{k=0}^{\infty} a_k P\{S_k \leq t\}$ функции $\Phi_n(t)$ занимают особое место благодаря их непосредственной связи со старшими моментами

*Институт математики СО РАН, Университетский пр., 4, 630090 Новосибирск, Россия.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 93-01-01416.

восстановления. Предположим временно, что случайные величины X_i неотрицательны, и пусть $N(t) = \sup\{k \geq 1 : S_k \leq t\}$ — «число восстановлений» на отрезке $(0, t]$. Тогда, как будет ясно ниже,

$$\Phi_n(t) = E\{(N(t) + 1)(N(t) + 2) \cdots (N(t) + n)\}. \quad (2)$$

Именно так была определена функция $\Phi_n(t)$ в работе [2], где также отмечено, что с технической точки зрения изучение асимптотических свойств старших моментов случайной величины $N(t)$ удобно проводить в терминах функций $\Phi_n(t)$, а не $EN^n(t)$. Преобразование Лапласа–Стилтьеса функции $\Phi_n(t)$, определяемой по формуле (2), имеет весьма простой вид (см. [2]):

$$\int_0^\infty \exp(sx) d\Phi_n(x) = n! (1 - E \exp(sX_1))^{-n}, \quad \operatorname{Re} s < 0. \quad (3)$$

Отсюда и вытекает совпадение функций, определяемых правыми частями формул (1) и (2), в частном случае $X_i \geq 0$. Далее,

$$\Phi_n(t) = EN^n(t) + \frac{n(n+1)}{2} EN^{n-1}(t) + \sum_{k=0}^{n-2} c_k EN^k(t), \quad (4)$$

где c_k , $k = 0, \dots, n-2$, — постоянные коэффициенты, точные значения которых будут для нас несущественными.

Отправной точкой нашего исследования является следующий результат о старших моментах числа восстановлений $N(t)$, полученный в предположении, что неотрицательные случайные величины X_i имеют неарифметическое распределение с положительным средним и конечной дисперсией (см. [3]):

$$EN^n(t) = \frac{t^n}{\mu^n} + \frac{n^2 \mu_2 - n(n+1)\mu^2}{2\mu^{n+1}} \cdot t^{n-1} + o(t^{n-1}) \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Теперь можно отбросить временно принятое соглашение о неотрицательности случайных величин X_i . Мы покажем, что для обобщенных функций восстановления $\Phi_n(t)$ справедливо соотношение, аналогичное формуле (5).

Теорема 1. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные вещественнозначные случайные величины с неарифметическим распределением F . Предположим, что $\mu = EX_1 > 0$, $\mu_2 = EX_1^2 < \infty$ и $E(X_1^-)^{n+1} < \infty$. Тогда обобщенная функция восстановления $\Phi_n(t)$, определяемая по формуле (1), обладает следующим свойством:

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{\mu^n} \cdot t^n + \frac{n^2 \mu_2}{2\mu^{n+1}} \cdot t^{n-1} + o(t^{n-1}) \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через T первый лестничный момент: $T = \min\{k : S_k > 0\}$, а через $\mathcal{H}$ — первую лестничную высоту: $\mathcal{H} = S_T$. Пусть $S_* = \inf\{S_k : k \geq 0\}$, $D(x) = P\{S_* \leq x\}$ и $\tilde{\Phi}_n(t)$ — обобщенная функция восстановления вида (1), порожденная распределением G случайной величины $\mathcal{H}$.

Для доказательства теоремы мы воспользуемся известной идеей Блэквелла [5], позволившей доказать теорему восстановления на всей прямой путем сведения ее к уже известному результату на положительной полуоси. В нашем случае ($n \geq 1$) эта идея будет реализована посредством весьма удобной формулы, связывающей меры Φ_n и $\tilde{\Phi}_n$, порожденные неубывающими функциями $\Phi_n(t)$ и $\tilde{\Phi}_n(t)$, и распределение D инфимума случайного блуждания $\{S_k\}$.

Лемма. Пусть $a = \exp(\sum_{k=1}^{\infty} P\{S_k \leq 0\}/k)$ и D^{n*} есть n -кратная свертка распределения D . Тогда для любого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}$

$$\Phi_n(A) = a^n \int_{-\infty}^0 \tilde{\Phi}_n(A-x) D^{n*}(dx). \quad (7)$$

Доказательство леммы будет приведено после завершения доказательства теоремы 1.

Из соотношений (5) и (4) вытекает, что применительно к функции $\tilde{\Phi}_n(t)$ результат работы [3] будет выглядеть следующим образом:

$$\Delta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\Phi}_n(t) - \frac{t^n}{\nu^n} - \frac{n^2 \nu_2}{2\nu^{n+1}} \cdot t^{n-1} = o(t^{n-1}) \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где $\nu = E\mathcal{H}$ и $\nu_2 = E\mathcal{H}^2$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$, и пусть число $T > 0$ выбрано таким образом, чтобы $|\Delta(t)|/t^{n-1} < \varepsilon$ при всех $t \geq T$. Положим в лемме множество A равным $(-\infty, t]$. Тогда, поскольку $E(X_1^-)^{n+1} < \infty \Rightarrow E|S_*|^n < \infty$ [6, теорема 5],

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 |\Delta(t-x)| D^{n*}(dx) &\leq \varepsilon \int_{-\infty}^0 (t-x)^{n-1} D^{n*}(dx) \\ &= \varepsilon t^{n-1} + O(t^{n-2}) \leq 2\varepsilon t^{n-1} \end{aligned} \quad (9)$$

при всех $t \geq T_1 \geq T$. Далее,

$$\int_{-\infty}^0 (t-x)^n D^{n*}(dx) - t^n - n^2 t^{n-1} E|S_*| = O(t^{n-2}), \quad (10)$$

и при достаточно больших t , скажем, при $t \geq T_2$, правая часть не превосходит εt^{n-1} . Наконец,

$$\left| \int_{-\infty}^0 (t-x)^{n-1} D^{n*}(dx) - t^{n-1} \right| \leq \varepsilon t^{n-1} \quad (11)$$

при $t \geq T_3$. Учитывая оценки (9)–(11), получим из соотношений (7) и (8), что

$$\left| \Phi_n(t) - \frac{a^n}{\nu^n} \cdot t^n + \frac{a^n n^2 E|S_*|}{\nu^n} \cdot t^{n-1} + \frac{a^n n^2 \nu_2}{2\nu^{n+1}} \cdot t^{n-1} \right| \leq C\varepsilon t^{n-1} \quad (12)$$

при всех $t \geq \max\{T_1, T_2, T_3\}$, где C — постоянная, не зависящая от ε . Известно (см. [4, гл. 12, формулы (2.7) и (7.11)]), что $\nu = a\mu$. Установим связь между ν_2 и μ_2 . Справедливо следующее соотношение, которое можно вывести, например, из следствий 6 и 9 [7, гл. 3]:

$$\hat{F}(s) - 1 = [\hat{G}(s) - 1] [a\hat{D}(s)]^{-1}, \quad \operatorname{Re} s = 0, \quad (13)$$

где $G(x) = P\{\mathcal{H} \leq x\}$, а $\hat{F}(s)$, $\hat{G}(s)$ и $\hat{D}(s)$ суть преобразования Лапласа распределений F , G и D ; например, $\hat{F}(s) = E \exp(sX_1)$. Дважды дифференцируя первое равенство в (13) и затем полагая $s = 0$, приходим к следующему соотношению:

$$\mu_2 = \frac{\nu_2 + 2\nu E|S_*|}{a}.$$

Тем самым, соотношение (12) означает, что справедливо представление (6). Теорема доказана.

Доказательство леммы. Из следствий 6 и 9 [7, гл. 3] нетрудно извлечь соотношение

$$\frac{1}{1 - z\widehat{F}(s)} = \frac{a \mathbf{E}[z^\theta \exp(sS_*)]}{1 - \mathbf{E}[z^T \exp(s\mathcal{H})]}, \quad z \in (0, 1), \quad \operatorname{Re} s = 0, \quad (14)$$

где $\theta = \sup\{k \geq 0: S_k = S_*\}$.

Пусть $\{(T_i, \mathcal{H}_i)\}$ — последовательность независимых случайных векторов, распределенных так же, как и случайный вектор $(T, \mathcal{H})$. Положим $(U_0, V_0) = (0, 0)$ и $(U_k, V_k) = \sum_{i=1}^k (T_i, \mathcal{H}_i)$, $k \geq 1$. Обозначим через (ψ_n, W_n) случайный вектор, распределенный как сумма n независимых случайных векторов, каждый из которых распределен так же, как случайный вектор (θ, S_*) .

Возведем в степень n и затем умножим на $n!$ обе части первого равенства в (14). Переходя в полученном равенстве от преобразований Лапласа к соответствующим им мерам, убеждаемся в справедливости следующего соотношения, где A — произвольное борелевское множество:

$$\begin{aligned} n! \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m} z^m F^{m*}(A) &= a^n n! \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \sum_{m=0}^{\infty} z^m \\ &\times \sum_{l=0}^m \int_{-\infty}^0 \mathbf{P}\{U_k = m-l; V_k \in A-x\} d_x \mathbf{P}\{\psi_n = l; W_n \leq x\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Устремляя $z \uparrow 1$ в (15) и затем меняя порядок суммирования по индексам m и l в правой части, получим

$$\begin{aligned} \Phi_n(A) &= a^n n! \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \\ &\times \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=l}^{\infty} \int_{-\infty}^0 \mathbf{P}\{U_k = m-l; V_k \in A-x\} d_x \mathbf{P}\{\psi_n = l; W_n \leq x\}. \end{aligned}$$

Далее, суммируя в правой части сначала по m , а затем по l , имеем

$$\Phi_n(A) = a^n n! \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \int_{-\infty}^0 \mathbf{P}\{V_k \in A-x\} D^{n*}(dx).$$

Наконец, меняя порядок интегрирования и суммирования, убеждаемся в справедливости леммы.

З а м е ч а н и е 1. При $n = 1$ соотношение (6) совпадает с известным результатом для обычной функции восстановления $\Phi_1(t)$ (см. [4, гл. 11]):

$$\Phi_1(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{\mu_2}{2\mu^2} + o(1), \quad t \rightarrow \infty. \quad (16)$$

З а м е ч а н и е 2. Более детальную информацию об асимптотическом поведении функций $\Phi_n(t)$ можно почерпнуть в работе [1]: при $t \rightarrow \infty$ функцию $\Phi_n(t)$ можно приблизить полиномом степени n и оценить скорость сходимости. Такая детализация требует определенной регулярности распределения F и более сильных условий на моменты случайных величин X_i . Например, (см. [1, следствие 5.1(a)]), пусть $\mathbf{E}X_1 > 0$, $\mathbf{E}|X_1|^m < \infty$ при $m \geq n+1 > 2$ и

$$\liminf_{\operatorname{Re} s=0, |s| \rightarrow \infty} |1 - \widehat{F}(s)| > 0. \quad (17)$$

Тогда

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=1}^n \gamma_k t^k + \Omega(t) + r(t), \quad (18)$$

где γ_k , $k = 1, \dots, n$, суть надлежащим образом выбранные константы, $\Omega(t)$ — функция ограниченной вариации (причем ее полная вариация $|\Omega|(t)$ обладает конечным моментом порядка $m - n - 1$: $\int_{\mathbf{R}} |x|^{m-n-1} d|\Omega|(x)$) и $r(t) = O(t^{-[m]+n+1})$, $t \rightarrow \infty$; здесь $[m]$ — целая часть числа m . Если теперь в правой части (17) ограничиться суммой $\gamma_n t^n + \gamma_{n-1} t^{n-1}$, то получим утверждение теоремы 1 при дополнительных условиях (17) и $E|X_1|^m < \infty$, где $m \geq n + 1 > 2$.

В заключение продемонстрируем применение только что доказанной теоремы на одном конкретном примере. Обозначим через $\mathcal{N}(t)$ число частичных сумм S_k , не превосходящих уровня t : $\mathcal{N}(t) = \#\{k \geq 1: S_k \leq t\}$. При $X_i \geq 0$ величины $\mathcal{N}(t)$ и $N(t)$ совпадают.

Теорема 2. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные вещественнозначные случайные величины с неарифметическим распределением. Допустим, что $\mu = EX_1 > 0$, $\mu_2 = EX_1^2 < \infty$ и $E(X_1^-)^3 < \infty$. Тогда при $t \rightarrow \infty$

$$D\mathcal{N}(t) \sim \frac{\mu_2 - \mu^2}{\mu^3} \cdot t. \quad (19)$$

З а м е ч а н и е 3. Для дисперсии случайной величины $N(t)$ этот результат хорошо известен (см. [8, ч. II, (1.6)]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся соотношением (см. [9, (2.3)])

$$E\mathcal{N}(t)^2 = H(t) + 2 \int_{-\infty}^t H(t-x) dH(x), \quad (20)$$

где $H(t) \stackrel{\text{def}}{=} E\mathcal{N}(t) = \Phi_1(t) - P\{S_0 \leq t\}$. Рассмотрим конечную меру $\Phi_{n,z}$, $z \in (0, 1)$, с преобразованием Лапласа

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(sx) \Phi_{n,z}(dx) = n!(1 - zE\exp(sX_1))^{-n}, \quad \operatorname{Re} s = 0.$$

Пусть $\Phi_{n,z}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{n,z}((-\infty, t])$. Очевидно, что

$$\Phi_{n,z}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n \cdot (n+k-1)!}{k!} z^k P\{S_k \leq t\}$$

и $\Phi_{n,z} = n \Phi_{n-1,z} * \Phi_{1,z}$. Переходя к пределу в последнем равенстве ($n = 2$) при $z \rightarrow 1-$, получим

$$\Phi_2(t) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(t-x) \Phi_1(dx).$$

В наших обозначениях равенство (20) можно переписать в виде

$$E\mathcal{N}^2(t) = \Phi_2(t) - 3\Phi_1(t) + P\{S_0 \leq t\} - 2 \int_t^{\infty} \Phi_1(t-x) \Phi_1(dx). \quad (21)$$

Допустим на время, что интеграл в правой части (21) (обозначим его $I(t)$) ограничен. Тогда из равенств (21), (16), $D\mathcal{N}(t) = E\mathcal{N}^2(t) - (E\mathcal{N}(t))^2$ и теоремы 1 немедленно вытекает требуемое утверждение (19). Справедливы неравенства $\int_0^{\infty} \Phi_1(-x) \Phi_1(dx) \leq \Phi_2(0) < \infty$, откуда в силу монотонности функции $\Phi_1(x)$ и теоремы Блэквелла ($\Phi_1(x+1) - \Phi_1(x) \rightarrow 1/\mu$, $x \rightarrow \infty$) имеем $I_1 = \int_{-\infty}^0 \Phi_1(x) dx < \infty$. Поэтому в силу узловой

теоремы восстановления на всей прямой (см. [10, теорема 5]) $I(t) \rightarrow I_1/\mu$ при $t \rightarrow \infty$, что, в частности, означает ограниченность интеграла $I(t)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 4. При более сильных ограничениях, нежели в теореме 2, в работе [9] получено представление $DN(t) = At + B + o(1)$, $t \rightarrow \infty$, где $A = (\mu_2 - \mu^2)/\mu^3$ и B — вполне определенная константа (см. [9, формула (1.5b)]). Ограничения таковы: либо 1) F — неарифметическое распределение, $EX_1 > 0$, $E|X_1|^3 < \infty$ и при некотором $\varepsilon \geq 0$

$$H(t) = \begin{cases} \frac{t}{\mu} + \frac{\mu_2 - 2\mu^2}{2\mu^2} + o(t^{-1-\varepsilon}), & t \rightarrow \infty, \\ o(|t|^{-1-\varepsilon}), & t \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

(условия A_ε), либо 2) распределение F строго нерешетчато (т.е. выполнено условие (17)), $EX_1 > 0$ и $E|X_1|^\rho < \infty$ при некотором $\rho \geq 3$ (условия B_ρ). В обоих случаях приведены оценки остаточного члена $o(1)$ в представлении для $DN(t)$.

Автор весьма признателен рецензенту за внимательное прочтение рукописи и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smith W. L.* A theorem on functions of characteristic functions and its applications to some renewal theoretic random walk problems. — In: Proc. of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Univ. of California Press, 1967, v. 2, Pt II, p. 265–309.
2. *Smith W. L.* On the cumulants of renewal processes. — *Biometrika*, 1959, v. 66, № 1, 2, p. 1–29.
3. *Grübel R., Jensen U.* On the moments of the number of renewal epochs. — *Z. Angew. Math. Mech.*, 1981, B. 61, H. 10, S. 531–532.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Наука, 1967, 752 с.
5. *Blackwell D.* Extension of a renewal theorem. — *Pacific J. Math.*, 1953, v. 3, № 2, p. 315–320.
6. *Kiefer J., Wolfowitz J.* On the characteristics of the general queueing process, with applications to random walks. — *Ann. Math. Statist.*, 1956, v. 27, № 1, p. 147–161.
7. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972, 368 с.
8. *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления. М.: Советское радио, 1967, 300 с.
9. *Daley D. J., Mohan N. R.* Asymptotic behaviour of the variance of renewal processes and random walks. — *Ann. Probab.*, 1978, v. 6, № 3, p. 516–521.
10. *Smith W. L.* On some general renewal theorems for nonidentically distributed variables. — In: Proc. of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1961, v. 2, p. 467–514.

Поступила в редакцию
5.VI.1995

Исправленный вариант
2.IV.1996