Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ватутин, Рецензия на книгу Yor M. “Some aspects of Brownian motion. Part II: Some recent martingale problems”, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 3, 641–643

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2009>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:56:27

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Yor M. *Some Aspects of Brownian Motion. Part II: Some Recent Martingale Problems.* (Lecture in Mathematics, ETH Zürich). Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser, 1997, 144 p.

Читатели, знакомые с первой частью прекрасного курса лекций профессора М. Йора [1], посвященного некоторым аспектам броуновского движения и прочитанного автором в конце 1991–начале 1992 годов в Высшей технической школе в Цюрихе, по-видимому, с нетерпением ждали выхода в свет его второй части. На мой взгляд, их ожидания оправдались: перед нами (в совокупности с книгой [1]) интересный и полезный курс лекций для тех, кто хотел бы не только ознакомиться с современными методами в теории броуновского движения, но и получить стимул для размышления над еще нерешенными проблемами этой теории.

Так же, как и первая часть курса лекций, вторая часть включает в себя 9 глав (с десятой по восемнадцатую), содержание которых тесно переплетено с материалом, изложенным в [1]. При этом, по признанию самого автора, главы 10 и 11, озаглавленные соответственно «О главных значениях для броуновских и бесселевых локальных времен» и «Вероятностные представления для дзета-функции Римана», следовало бы включить в первую часть курса, но в то время это было невозможно, поскольку наиболее впечатляющие результаты в упомянутых областях были получены совсем недавно.

В главе 10 дается конструкция симметричных устойчивых процессов, использующая главные значения локальных времен одномерного броуновского движения $B(t)$, приведена теорема о распределении главных значений броуновских локальных времен, взятых в случайный экспоненциально распределенный момент времени, а также кратко изложена теория Бертоина [2], касающаяся свойств экскурсий процессов $Bes_0(d)$, $0 < d < 1$.

В главе 11 приведены представления дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в терминах s -го момента суммы двух независимых копий моментов первого попадания в 1 процессом $Bes(3)$, стартующим из нуля, а также в терминах моментов некоторых интегральных функционалов от броуновских экскурсий.

В главе 12 «Некоторые примеры и применения расширения фильтраций» дается систематическое изложение расширений фильтраций. Оказывается, что для некоторых пар фильтраций $(\mathcal{F}_t), (\mathcal{G}_t)$, удовлетворяющих при каждом t соотношению $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, не каждый $(\mathcal{F}_t)$ — мартингал является семимартингалом для $(\mathcal{G}_t)$, но это «почти» справедливо в том смысле, что многие $(\mathcal{F}_t)$ -мартингалы являются $(\mathcal{G}_t)$ -процессами Дирихле. В связи с этим при исследовании свойств расширений фильтраций естественным образом возникают главные значения локальных времен, которые, как известно, имеют нулевую квадратичную характеристику. Используя этот факт, автору удается объяснить некоторые интригующие тождества для локальных времен, приведенные в главе 10.

Если $(M_t, t \geq 0)$ — непрерывный локальный мартингал, причем $M_0 = 0$, то, согласно неравенствам Бирхольдера-Ганди, для любого $p > 0$ найдутся абсолютные константы $0 < c(p) < C(p) < \infty$, для которых

$$c(p) E(M)_{\infty}^{p/2} \leq E\left(\sup_{s \geq 0} |M_s|\right) \leq C(p) E(M)_{\infty}^{p/2}.$$

В главе 13 «Мартингальные неравенства в произвольные моменты времени» автор, используя технику расширения фильтраций показывает, как модифицируются неравенства Бирхольдера–Ганди в случае, если моменты остановки заменяются, например, конечными точками предсказуемых множеств. В основе доказательств модифицированных неравенств такого рода лежит естественная идея: необходимо «превратить» рассматриваемый случайный момент времени в момент остановки, а затем применить исходные неравенства Бирхольдера–Ганди.

Содержание главы 14 «О мартингалах, обращающихся в ноль на множестве нулей броуновского движения» полностью отражено в ее названии. Изучение такого рода мартингалов тесно связано с исследованием уравнения $X_\gamma = E[X_\infty | \mathcal{F}_\gamma]$, где $\gamma = \sup\{t < 1: B(t) = 0\}$, $\mathcal{F}_\gamma = \sigma\{z_\gamma; z — произвольный (\mathcal{F}_t)\text{-предсказуемый процесс}\}$, а неизвестный процесс (X_t) является равномерно интегрируемым $(\mathcal{F}_t)$ -мартингалом. Свойства решений этого уравнения достаточно подробно обсуждены в данной главе.

Глава 15 «О мартингалах Азема и свойство представления винеровского хаоса» посвящена мартингалам Азема–Эмери. Указанные мартингалы являются марковскими процессами и наследуют ряд свойств броуновского движения, являясь тем самым интересным и важным однопараметрическим обобщением броуновского движения. Ответа на многие естественные вопросы, касающиеся свойств мартингалов Азема–Эмери, до сих пор нет, и в обсуждаемой главе приведено несколько задач, решение которых имело бы важное значение для развития всей теории.

Хорошо известно, что при изучении свойств броуновского движения время и пространство являются, в некотором смысле, дуальными друг другу. Так, например, естественная нормировка броуновского движения корнем из дисперсии в момент t «переводит» растяжение по времени в растяжение в пространстве. В связи с этим интересно, наряду с изучением мартингалов относительно стандартной $(\mathcal{F}_t)$ -фильтрации исследовать свойства мартингалов относительно σ -алгебры

$$\mathcal{E}_t^x = \sigma\{B(s) \wedge x; s \leq t\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Структура именно таких мартингалов и анализируется в главе 16, озаглавленной «Фильтрация усеченного броуновского движения».

В главе 17 «Броуновская фильтрация, примеры Цирельсона и броуновские движения Уолша» обсуждаются вероятностные меры, локально эквивалентные винеровской мере, указываются необходимые условия в терминах представлений стохастическими интегралами относительно соответствующего броуновского движения, которым должны удовлетворять $(\mathcal{F}_t)$ -мартингалы, а также приводятся конструкции Цирельсона, показывающие, что эти условия не являются достаточными.

В заключительной главе («Дополнения к части I») устранены некоторые опечатки, обнаруженные в первой части лекций, сделан ряд небольших дополнений к главам 1–9 и приведены примеры функционалов от броуновского движения, характеристическими функциями которых (или преобразованиями Лапласа) являются гиперболические функции.

В сочетании с недавно вышедшей книгой [3], курс лекций профессора Йора будет служить прекрасным подспорьем не только исследователям, начинающим нелегкий путь в изучении свойств броуновского движения, но и тем ученым, для которых броуновское движение давно служит источником задач и рабочим инструментом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yor M. Some Aspects of Brownian Motion. Part I: Some Special Functionals. (Lecture in Mathematics, ETH Zürich.) Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1992, 136 p.
2. Bertoin J. Excursions of a $Bes(d)$ and its drift term ($0 < d < 1$). — Probab. Theory Relat. Fields, 1990, v. 84, p. 231–251.

3. *Borodin A., Salminen P. Handbook of Brownian Motion—Facts and Formulae. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1996, 476 p.*

17.06.1997 г.

В. А. Ватутин

von Plato Jan. *Creating modern probability. Its mathematics, physics and philosophy in historical perspective.* Cambridge University Press, 1994. 323 p.

Название книги лучше перевести пространно, например, так: «Процесс создания современного вероятностного мышления. Его математика, физика и философия в исторической перспективе».

Это очень хорошая, интересная и полезная книга. В наше время пишется так много научных статей и книг, что их почти никто и не читает, кроме лишь непосредственных учеников автора, которым нужно делать дипломные работы и диссертации. Поэтому читать чужие работы — уже большая заслуга перед наукой. Если же круг прочитанных источников огромен (библиография в рецензируемой книге занимает 28 страниц), для прочтения выбраны работы наиболее выдающихся авторов, прочтены они с ясным критическим пониманием, а главное — в результате возникла книга, делающая обобщенное изложение этих источников достоянием широкого круга читателей, ну тогда автор заслуживает самой искренней благодарности.

Предметом данной книги является становление вероятностного мышления примерно со второй половины прошлого века по тридцатые–сороковые годы нашего века. Это золотой век физики и математики, и теперь, когда и серебряный век, пожалуй, закончился, приятно с ностальгией заглянуть в прошлое. Автор совершенно правильно рассматривает физику и математику как единую науку (по крайней мере, в том, что касается становления вероятностных взглядов). Это и определяет круг его источников: Максвелл, Больцман, Эйнштейн, Пуанкаре, Борель, Г. Вейль, А. Вейль, Бернштейн, Хинчин, Колмогоров и многие другие. Для опытного преподавателя теории вероятностей, который всю жизнь только этим и занимался, чтение книги приносит несколько ошеломляющий результат: внезапно начинаешь понимать, какую замечательную науку преподают под этим названием (в смысле ее физических взаимосвязей). Например, рецензенту было приятно найти детальное изложение вопроса о физическом значении вероятностных свойств той цепной дроби, которая получается при разложении в нее наудачу взятого вещественного числа: вопрос связан если не прямо с расчетом возмущений планетных орбит, то с философией о том, что может из подобных расчетов получиться. Можно из книги узнать и о том, как именно Эйнштейн и Смолуховский строили свои модели броуновского движения (поначалу довольно различные); кстати, правильно писать «фон Смолуховский». Также можно узнать, почему Максвелл и Больцман рассматривали случайное размещение предметов по ящикам (что именно физически означает статистика Максвелла–Больцмана) и как хорошо для возникновения квантовой механики было то, что Больцман не владел теорией меры и потому рассматривал дискретную модель. Еще можно узнать, что означает для физика эргодичность динамической системы (отсутствие других инвариантов движения, кроме полной энергии системы, движущейся по законам классической механики) и многое, многое другое.

Но... (во всякой рецензии по законам этого жанра должно быть более или менее значительное «но», и здесь мы ввиду большой симпатии и благодарности к автору повесим особенно значительное «но», ибо по свойствам российской ментальности критика ценится гораздо выше, чем похвала); итак: но автор при таком количестве труда и энтузиазма мог бы достичь гораздо большего, если бы встал на более современную точку зрения в отношении философии науки. Однако прежде чем развивать