Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Зубков, Рецензия на книгу Galambos J. Simonelli.
“Bonferroni-type inequalities with applications”, *Теория веро-
ятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 3, 645–649

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2011>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразу-
мевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:43:33

тием. В подстрочном примечании автор деликатно оспаривает такую точку зрения. У рецензента другие воспоминания о взгляде А. Н. Колмогорова на этот предмет. В 1972 г. рецензент опубликовал учебное пособие «Теория вероятностей», которое Андрей Николаевич резко критиковал устно и даже выдвинул письменные обвинения более чем в 40 пунктах. Один из этих пунктов состоял примерно в том, что нельзя думать, будто алгоритмическая вероятность практически применима для проверки случайности (это, фактически, именно то, что написано в упомянутом подстрочном примечании на с. 236). Рецензент и тогда это понимал, так что по этому пункту обвинения удалось оправдаться.

Для третьего примера обратимся к с. 165 книги, где автор выражает радость по тому поводу, что в социальной статистике из большого числа произвольных актов отдельных людей складывается такая сумма, которая следует жесткому закону, предсказуемому с замечательной достоверностью. Опять-таки, источников (в данном случае — учебников), в которых такое написано, предостаточно, но автор, кажется, в самом деле, не понимает, что в социальных явлениях такое бывает лишь в учебниках демографии или страховой математики, но не на самом деле. Вероятностное мышление — это не только физика, но и многие другие науки, которые пытаются понять (а в частности — предсказать) неопределенное будущее с помощью теоретико-вероятностной случайности, т.е. в конечном счете, тех жеребьевок или азартных игр, которые неведомым, но очень прочным образом укоренены в глубинной человеческой психологии.

Наука, как и миф, рождается из чуда и откровения. Почему из совершенно нелепого мифа Пуассона о статистически независимом голосовании присяжных в суде рождается закон Пуассона (1837 г.), который потом оказывается точным законом радиоактивного распада? Почему закон ошибок (т.е. нормальный закон), который у Лапласа и Гаусса появился для описания ошибок наблюдений (и на самом деле как закон ошибок не подтверждается), появляется в качестве закона для скоростей молекул газа Максвелла? Почему броуновское движение за несколько лет до Эйнштейна было исследовано Башелье в применении к финансовой математике, где, конечно, эта модель весьма груба? Чтобы кончить этот перечень недоуменных вопросов, на которые желательно было бы получить ответ из историко-научных и философских исследований (подобных рецензируемой книге) зададим последний вопрос такого сорта. Почему из термодинамики, которая отнюдь не претендует на охват всех явлений природы, был сделан эсхатологический вывод о неизбежности тепловой смерти, и какую роль в стимуляции научной критики сыграло желание избежать «ужасной тепловой смерти вселенной» (с. 88 книги)?

В общем, нам бы казалось, что замечательный материал, которым владеет автор книги, следовало бы обобщать на более глубоком психологическом и/или философском уровне. Иначе получается, что, например, на целой странице 128 автор книги объясняет, что пока не появилась теория броуновского движения Эйнштейна, экспериментаторы не понимали, что не следует пытаться измерять скорость броуновского движения. Но ведь наблюдение, состоящее в том, что без хорошей теории экспериментатор вообще не замечает совершенно очевидных (как потом оказывается) сторон исследуемого явления, совершенно тривиально для нынешней философии науки.

3.03.1997 г.

В. Н. Тутубалин

G a l a m b o s J., S i m o n e l l i I. **Bonferroni-type Inequalities with Applications.** New York e.a. Springer, 1996. ix+269 pp.

Рецензируемая монография посвящена неравенствам Бонферрони, упоминание о которых можно найти почти в каждом учебнике по теории вероятностей. Эти неравенства образуют целый класс оценок распределений, связанных с числом одновременно происходящих событий (или с суммами зависимых индикаторов). Ситуации, в

которых возникают совокупности зависимых событий, практически неисчерпаемы, а простота и универсальность неравенств Бонферрони делают их незаменимыми на начальных этапах исследования. Ограничение тематики позволило авторам подробно изложить основные идеи, связанные с неравенствами типа Бонферрони, и проиллюстрировать их применения рядом интересных примеров.

Историческими предшественниками неравенств Бонферрони являются комбинаторная формула включения-исключения и следующие из нее неравенства, описанные в середине XIX века Булем; в 1927 г. (за 9 лет до выхода в свет учебника Бонферрони) такие неравенства были опубликованы в работах венгерского математика Йордана. Как правило, научные открытия — результат труда многих ученых, и вопрос об авторстве часто не имеет однозначного решения.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — события, заданные на одном вероятностном пространстве, $\chi(A_i)$ — индикатор события A_i и $\nu_n = \chi(A_1) + \dots + \chi(A_n)$ — число одновременно происходящих событий. Авторы определяют неравенства типа Бонферрони как неравенства, связывающие $P\{\nu_n = k\}$ или $P\{\nu_n \geq k\}$ с линейными комбинациями $S_1, S_2, \dots$, где

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

или, более общо, с линейными комбинациями $P\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}\}$, $k = 1, 2, \dots$; при этом участвующие в линейных комбинациях коэффициенты не должны зависеть от событий $A_1, \dots, A_n$, их вероятностей и т.п.

Общезвестны неравенства Бонферрони вида

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2d+1} (-1)^k C_{k+m}^m S_{k+m} &\leq P\{\nu_n = m\} \leq \sum_{k=0}^{2d} (-1)^k C_{k+m}^m S_{k+m}, \\ \sum_{k=0}^{2d+1} (-1)^k C_{k+m-1}^{m-1} S_{k+m} &\leq P\{\nu_n = m\} \leq \sum_{k=0}^{2d} (-1)^k C_{k+m-1}^{m-1} S_{k+m}. \end{aligned} \quad (1)$$

С точки зрения теории вероятностей неравенства вида (1) удобны тем, что входящие в их левую и правую части слагаемые S_k являются биномиальными моментами ν_n :

$$S_k = EC_{\nu_n}^k = \frac{1}{k!} E\nu_n(\nu_n - 1) \dots (\nu_n - k + 1) = \frac{1}{k!} E\nu_n^{[k]},$$

и в конкретных задачах, как правило, их можно сравнительно просто вычислить или оценить. Это обстоятельство, а также возможности уточнений неравенств типа (1) привлекали к ним внимание ряда математиков. Первые 4 главы книги содержат обзор нескольких общих методов доказательства неравенств типа Бонферрони.

Глава I называется «Метод индикаторов». Этот по сути дела комбинаторный метод основан на следующей теореме А. Реньи:

Если (Ω, B, P) — вероятностное пространство и $F_i = f_i(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ($i = 1, \dots, t$) — произвольные булевы функции n переменных из B , а $c_1, \dots, c_t$ — произвольные действительные числа, то необходимое и достаточное условие справедливости неравенств

$$\sum_{k=1}^t c_k P\{F_k\} \geq 0 \quad (2)$$

для любых $A_1, \dots, A_n \in B$ состоит в том, чтобы (2) выполнялось в частных случаях, когда каждое A_i совпадает либо с Ω , либо с $(\emptyset)$.

Теорема Реньи сводит доказательство неравенства (2) к проверке его справедливости для случаев, когда $P\{\nu_n = k\} = 1$ при $k = 0, 1, \dots$. В главе I этим методом

доказаны как неравенства (1), так и их уточнения (вида $a_1 S_1 + \dots + a_r S_r$), неумлучшаемые в тех или иных классах наборов коэффициентов $a_1, \dots, a_r$. Рассмотрены также конкретизации теоремы Реньи, в которых события A_i связываются с вершинами графа; при этом получаются неравенства, связывающие $P\{\nu_n = k\}$ и $P\{\nu_n \geq k\}$ с линейными комбинациями $P\{A_{i_1}, A_{i_2} \dots A_{i_k}\}$, например:

$$P\{\nu_n \geq r\} \leq \sum_{i>r-1} P\{A_i\} - \sum_{i>r} P\{A_i A_r\} - \sum_{i>r+1} P\{A_i A_{r+1} \bar{A}_r\} - \dots - \sum_{i>t} P\{A_i A_t \bar{A}_{t-1} \dots \bar{A}_r\}.$$

В главе II «Метод многочленов» описан метод доказательства неравенств типа Бонферрони, использующий эквивалентность неравенств вида

$$aP\{\nu_n = m\} + \sum_{k=0}^n c_k(n) S_k \geq 0 \quad \text{и} \quad bP\{\nu_n \geq m\} + \sum_{k=0}^n d_k(n) S_k \geq 0$$

соответственно выполнению совокупностей неравенств

$$aC_n^m p^m (1-p)^{n-m} + \sum_{k=0}^n c_k(R) C_n^k p^k \geq 0$$

и $b \sum_{k=m}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^n c_k(R) C_n^k p^k \geq 0$ при всех n , всех $p \in [0, 1]$ и всех $R \geq n$. В качестве примеров применения метода многочленов авторы доказывают ряд неравенств для $P\{\nu_n = 0\}$, имеющих вид линейных комбинаций S_k с коэффициентами, выражающимися через биномиальные, и указывают способ вывода неравенств для $P\{\nu_n = k\}$ и $P\{\nu_n \geq k\}$ из соответствующих неравенств для $k = 0$. Рассмотрен также итерационный метод доказательства нижних оценок для $P\{\nu_n = k\}$ и $P\{\nu_n \geq k\}$.

В третьей главе описывается «Геометрический метод» доказательства неравенств типа Бонферрони, при котором оценивание функции распределения $P\{\nu_n \leq t\}$ рассматривается как задача на экстремум при фиксированных моментах $S_1, S_2, \dots, S_r$. Он основан на том, что для целочисленной неотрицательной случайной величины ν и функций $f_1, \dots, f_r$ вектор

$$(Ef_1(\nu), Ef_2(\nu), \dots, Ef_r(\nu))$$

принадлежит выпуклой линейной оболочке счетного множества векторов $F = (f_1(k), f_2(k), \dots, f_r(k))$, $k = 0, 1, \dots$. Полагая $f_1(x) = \chi\{x \leq t\}$, $f_j(x) = x^{[r-1]}$, $r = 2, \dots, k$, можно свести доказательство неравенств типа Бонферрони к нахождению опорных гиперплоскостей для выпуклой оболочки множества F . В других терминах та же идея используется в главе IV, где неравенства типа Бонферрони получаются с помощью методов линейного программирования.

Значительная часть доказанных в главах III и IV верхних и нижних оценок имеет вид линейных комбинаций $S_k, S_{k+1}, \dots, S_{k+r}$, где k не обязательно равно 0. Эти оценки оптимальны лишь в тех областях значений $(S_k, S_{k+1}, \dots, S_{k+r})$, где соответствующая гиперплоскость совпадает с одной из граней линейной оболочки. Задача поиска нужной грани состоит в нахождении целочисленного решения системы неравенств, и в общем случае ее решение описывается не аналитической формулой, а алгоритмом. Конечные аналитические формулы для экстремальных значений $P\{\nu > 0\}$ можно получать в более широком классе неотрицательных (не обязательно целочисленных) случайных величин, и они имеют вид рациональных (а не линейных) функций от $E\nu, E\nu^2, \dots$; см., например, [2].

Глава V «Многомерные неравенства типа Бонферрони» посвящена выводу двусторонних оценок для вероятностей вида

$$P\{\nu_1 = t_1, \dots, \nu_d = t_d\} \quad \text{или} \quad P\{\nu_1 \geq t_1, \dots, \nu_d \geq t_d\},$$

где случайные величины $\nu_1, \dots, \nu_d$ строятся по совокупности событий A_{ij} , ($j \in \{1, \dots, d\}$, $i \in \{1, \dots, n(j)\}$), заданных на одном вероятностном пространстве: $\nu_j = \chi\{A_{1j}\} + \chi\{A_{2j}\} + \dots + \chi\{A_{n(j)j}\}$, $j = 1, \dots, d$. Показано, в частности, что в этом случае можно использовать как метод индикаторов из главы I, так и метод многочленов из главы II.

В главе VI «Классические задачи теории вероятностей и применения к комбинаторике» показано, что неравенства типа Бонферрони можно использовать при обосновании метода моментов, используемого в доказательствах предельных теорем о сходимости к дискретным распределениям; в этой главе доказано также несколько предельных теорем для урновых схем, найден предел вероятности того, что при случайном равновероятном выборе $N = N(n)$ подмножеств из $\{1, \dots, n\}$ хотя бы одно из них будет содержаться в другом; приводятся доказательства известных предельных теорем о вероятности связности случайного графа и о числах вершин заданной кратности.

Глава VII связана с приложениями к теории чисел. В ней показано, что с помощью неравенств типа Бонферрони (фактически — с помощью метода включения-исключения) можно получать информацию о распределении простых делителей натуральных чисел, случайно выбираемых из интервалов конечной длины (доказательства современных более глубоких результатов такого типа существенно сложнее); приводятся также предельные теоремы, описывающие распределения максимальных элементов в начальных отрезках тех или иных представлений действительных чисел (например, распределения неполных частных при разложении в цепную дробь).

В главе VIII рассматривается большое число примеров применения неравенств типа Бонферрони к оценкам (представляющих интерес для математической статистики) вероятностей многомерных областей. Например, при оценивании средних $\mu_1, \dots, \mu_k$ нормальных совокупностей с известными дисперсиями $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ по выборочным средним $\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_k$, построенным по независимым выборкам объема n , можно использовать неравенство

$$P\left\{|\mu_i - \bar{Y}_i| \leq \frac{\sigma_i z_i}{n^{1/2}}, i = 1, \dots, k\right\} \geq 1 - \sum_{i=1}^k P\left\{|\mu_i - \bar{Y}_i| \leq \frac{\sigma_i z_i}{n^{1/2}}\right\},$$

сводящее оценку вероятности многомерного доверительного интервала к оценкам вероятностей одномерных доверительных интервалов. Двусторонние оценки распределений статистик удастся получать с помощью оценок для двумерных распределений. Например, для статистики $T = X_{(n)} - \bar{X}$, где $X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$, $\bar{X} = (X_1 + \dots + X_n)/n$, используемой для обнаружения резко выделяющихся наблюдений, в случае, когда X_i независимы и имеют стандартное нормальное распределение, можно получить оценку

$$\alpha - \frac{\alpha^2}{2} \leq P\{T > t\} \leq \alpha, \quad \alpha = nP\{X_i - \bar{X} > t\},$$

доказательство которой основано на неравенстве

$$P\{X_i - \bar{X} > t, X_j - \bar{X} > t\} \leq P\{X_i - \bar{X} > t\} P\{X_j - \bar{X} > t\}.$$

Выводятся также неравенства для многомерных функций распределения, для оценок вероятностей в урновых схемах, для распределения статистики Колмогорова-Смирнова в экспоненциальном случае и т.п.

Глава IX посвящена применениям в теории экстремальных значений, большой вклад в которую сделал сам Я. Галамбош. В ней показано, как можно использовать неравенства типа Бонферрони при доказательстве предельных теорем для распределений максимумов одинаково или неодинаково распределенных случайных величин (как независимых, так и зависимых), а также для векторных экстремальных статистик.

В последней, десятой главе собрано несколько разнородных результатов, имеющих отношение к основной теме монографии: а) вывод явных формул для локальных вероятностей распределения на множестве целых неотрицательных чисел в виде знакопеременных взвешенных сумм величин $S_1, S_2, \dots$ и их применение к предельным теоремам, б) использование метода индикаторов при доказательстве квадратичных неравенств типа

$$\sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N a_{ij} P\{B_i\} P\{B_j\} \geq 0,$$

где $B_1, \dots, B_N$ — произвольные комбинации событий $A_1, \dots, A_n$, заданных на одном вероятностном пространстве — конкретными примерами таких неравенств являются справедливые при $k \geq 2$ соотношения

$$kS_k \geq S_1 S_{k-1} - (k-1) S_{k-1},$$

$$P\{\nu_n \geq k-1\} [kS_k + (k-1) S_{k-1}] \geq (S_1 - k + 2) S_{k-1},$$

в) уточнение леммы Бореля–Кантелли (условия, достаточные для того, чтобы с вероятностью 1 одновременно происходило бесконечное множество событий), г) оценки для распределения сумм d -независимых индикаторов, и т.п.

Список библиографии содержит около 250 названий и включает работы, опубликованные как в середине XIX века, так и в 1994 г. (а также еще не опубликованные препринты).

Рецензируемая монография, полностью посвященная классическому методу доказательства неравенств для сумм зависимых индикаторов, удачно дополняет недавно опубликованную книгу [1], в которой подробно описан разрабатывавшийся в последние 20 лет метод Стейна–Чена. Обе они содержат богатый материал, полезный как для исследователей, так и для преподавателей.

В заключение отмечу, что некоторое представление об описанных в этих книгах (а также некоторых других) методах доказательства неравенств для распределений сумм зависимых индикаторов отечественные читатели могут получить из статей [2]–[5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barbour A. D., Holst L., Janson S. Poisson Approximation. Oxford: Clarendon Press, 1992.
2. Зубков А. М. Неравенства для распределения числа одновременно происходящих событий. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 1994, т. 1, в. 4, с. 638–666.
3. Михайлов В. Г. Явные оценки точности в предельных теоремах для сумм случайных индикаторов. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 1994, т. 1, в. 4, с. 580–617.
4. Михайлов В. Г. Оценки точности сложной пуассоновской аппроксимации по методу Стейна–Чена. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 1996, т. 3, в. 4, с. 530–548.
5. Михайлов В. Г. Рецензия на книгу А. Д. Барбура, Л. Холста и С. Янсона «Пуассоновская аппроксимация». — Дискретн. матем., 1994, т. 6, в. 3, с. 154–159.