Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Круглов, Рецензия на книгу Fristedt B., Gray L. “A modern approach to probability theory”, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1997, том 42, выпуск 3, 650–652

DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2012>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 08:15:48

Fristedt B., Gray L. *A Modern Approach to Probability Theory*. Boston: Birkhäuser, 1997, xx+756 с.

Книга представляет собой современный учебник по теории вероятностей, предназначенный для студентов, изучающих математику и смежные дисциплины такие, как статистика, экономика, физика и исследования операций. Современный подход к теории вероятностей — таково название рецензируемой книги. Современность подхода, пропагандируемая авторами, заключается в следующем: а) случайная величина трактуется как функция, определенная на пространстве элементарных исходов, со значениями в абстрактном пространстве; б) привлекаются все методические новинки для построения изучаемых конструкций и доказательств утверждений; в) излагаются результаты, недавно опубликованные в научной периодической литературе.

Стало правилом, что каждый новый учебник по теории вероятностей содержит нетрадиционный материал. Среди нетрадиционных тем, обсуждаемых в этой книге, мы находим точечные процессы, системы взаимодействующих частиц, методы каплинга, оптимальные стратегии в азартных играх и др.

Книга разбита на семь частей. Первая часть — Вероятностные пространства, случайные величины и математические ожидания. Она содержит восемь глав. О содержании этой части говорят названия глав: гл. 1 — вероятностные пространства, гл. 2 — случайные величины, гл. 3 — функции распределения, гл. 4 — математические ожидания: теория, гл. 5 — математические ожидания: применения, гл. 6 — вычисление вероятностей и мер, гл. 7 — теория меры: существование и единственность, гл. 8 — теория интегрирования. Обсуждаются основные понятия теории вероятностей с привлечением теории меры и интегрирования по мере. Авторы подробно обсуждают понятие случайной величины; они дают отдельные определения для случайной величины со значениями на прямой, в конечномерном евклидовом пространстве и в пространстве последовательностей. Все эти определения являются частными случаями предшествующего им определения измеримого отображения одного измеримого пространства в другое измеримое пространство. Определения сопровождаются многочисленными примерами.

Вторая часть — Независимость и суммы. Она объединяет пять глав: гл. 9 — стохастическая независимость, гл. 10 — суммы независимых случайных величин, гл. 11 — случайное блуждание, гл. 12 — теоремы о сходимости почти всюду, гл. 13 — характеристические функции. Все перечисленные темы с различной степенью полноты излагаются практически в любом университетском курсе по теории вероятностей для студентов-математиков. Вместе с тем изложение материала отличается от изложения этого же материала в других учебниках. В качестве примера укажем на лемму Бореля–Кантелли, представленную в наиболее общем виде. Как нам кажется, ее формулировка очень близка к формулировке, которую привел В. В. Петров в своей монографии [3]. Отметим интересные применения характеристических функций для доказательства теоремы о возвращении случайного блуждания в нуль, а также для вычисления суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$. Большое число методических находок мы видим в главе 12, где обсуждается понятие сходимости почти наверное. В частности, здесь доказана теорема Н. Этемади: последовательность попарно независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным абсолютным математическим ожиданием подчиняется усиленному закону больших чисел. Любопытно, что авторы не отмечают справедливость обратного утверждения, которое является тривиальным следствием леммы 10 из [3, стр. 222]. В результате мы располагаем обобщением общеизвестного усиленного закона больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин, открытого А. Н. Колмогоровым. Замечательным является доказательство этой теоремы. Оно очень короткое и доступно для понимания каждого, кто знаком с понятием почти намерной сходимости последовательности случайных величин и понятием математического ожидания случайной величины. На русском языке с этим доказательством можно ознакомиться по монографии [3].

Третья часть — Сходимость по распределению (в отечественной литературе этот вид сходимости часто называют слабой сходимостью распределений.) Она включает шесть глав: гл. 14 — сходимость по распределению на вещественной прямой, гл. 15 — предельные теоремы для распределений частичных сумм, гл. 16 — безгранично делимые распределения как пределы, гл. 17 — устойчивые распределения как пределы, гл. 18 — сходимость распределений в польских пространствах, гл. 19 — принцип инвариантности и броуновское движение. К числу сравнительно новых тем, обсуждаемых в учебной литературе, следует отнести довольно подробное изложение предельных теорем для сумм равномерно малых независимых случайных величин в схеме серий. Рассматриваются также специальные темы как представление Леви–Хинчина безгранично делимых характеристических функций, области притяжения устойчивых распределений и др. Понятие безгранично делимого распределения и общие предельные теоремы для сумм независимых случайных величин в учебной литературе впервые, по-видимому, стал рассматривать Б. В. Гнеденко [2]. Изложение слабой сходимости распределений в польских пространствах концентрируется вокруг теоремы Ю. В. Прохорова о равносильности слабой компактности и плотности семейств вероятностных распределений. Эта тема также обсуждается в ряде отечественных учебников, в частности в [4]. Принцип инвариантности не является новой темой для учебников (см., например, [1]), но в данной книге эта тема обсуждается более подробно. Помимо самого принципа инвариантности доказываются теоремы о слабой сходимости некоторых функционалов от асимптотически нормальных сумм независимых случайных величин. Приведено доказательство существования меры Винера, обсуждаются моменты остановки винеровского процесса, доказывается теорема о том, что время достижения данного уровня винеровским процессом подчиняется устойчивому закону. Специальный параграф посвящен характеристике процесса броуновского процесса в классе стационарных процессов с независимыми приращениями.

Четвертая часть — Зависимость (в оригинале Conditioning). Эта часть объединяет четыре главы: гл. 20 — пространства случайных величин, гл. 21 — условные вероятности, гл. 22 — построение случайных последовательностей, гл. 23 — условные математические ожидания. В главе 20 обсуждаются множество абсолютно интегрируемых и множество квадратично интегрируемых случайных величин, определенных на одном вероятностном пространстве. Доказывается, что первое из них можно наделить метрикой так, что в результате оно становится полным метрическим пространством, а на втором множестве можно определить скалярное произведение так, что в результате оно становится гильбертовым пространством. В главе 21 приведены конструкции некоторых последовательностей случайных величин, среди которых мы находим последовательности случайных величин, образующие цепи Маркова, и последовательности перестановочных случайных величин. В двух последних главах излагается теория условных вероятностей и условных математических ожиданий относительно данной сигма-алгебры. Соответствующие главы учебника [4] содержат более богатый материал об условных математических ожиданиях.

Пятая часть — Случайные последовательности. Пять глав входят в эту часть: гл. 24 — мартингалы, гл. 25 — последовательности восстановления, гл. 26 — однородные по времени марковские последовательности, гл. 27 — последовательности перестановочных случайных величин (в оригинале exchangeable sequences), гл. 28 — стационарные последовательности. В гл. 24 сообщаются начальные сведения о мартингалах, включая теоремы о сходимости субмартингалов. Новой темой для учебников по теории вероятностей является применение мартингалов к построению оптимальных стратегий в теории игр. Более богатый материал о мартингалах содержится в [4]. Гл. 25 содержит изложение элементов теории восстановления. Более подробно эта тема изложена в [1]. В гл. 26, посвященной однородным марковским последовательностям, помимо изложения основ таких последовательностей, обсужда-

ется возможность использования теории мартингалов в теории марковских последовательностей. Все эти сведения и дополнительный материал о цепях Маркова можно также найти в учебниках [1] и [4]. Гл. 27 содержит редко излагаемый в учебной литературе материал о последовательностях перестановочных случайных величин. Центральным результатом здесь является теорема Финетти об условной независимости случайных величин, составляющих последовательность. В последней главе обсуждаются вопросы, связанные с эргодической теоремой Биркгофа для стационарных в узком смысле последовательностей и теоремой о спектральном представлении стационарных в широком смысле последовательностей. Многие отечественные учебники по теории вероятностей, в частности учебник [4], содержат этот материал.

Шестая часть — Случайные процессы. В нее входят пять глав: гл. 29 — точечные процессы, гл. 30 — процессы Леви, гл. 31 — введение в марковские процессы, гл. 32 — системы взаимодействующих частиц, гл. 33 — диффузионное и стохастическое исчисления. Особенностью изложения является стремление авторов не привлекать топологию, где это возможно, к изучению процессов с непрерывным временем. Сравнительно новой темой для учебной литературы являются точечные процессы. Изучение их осуществляется на базе теории случайных радоновских мер, элементы которой приводятся. Содержание глав 30–32 ясно из их названий. В последней главе обсуждаются начала стохастических дифференциальных уравнений и интегрального исчисления по Ито.

Седьмая часть — Дополнения. Эта часть содержит семь дополнений: доп. А — обозначения и используемые термины, доп. В — метрические пространства, доп. С — топологические пространства, доп. D — интегрирование по Риману–Стилтьесу, доп. E — аппроксимация по Тейлору, C-значные логарифмы, доп. F — библиография, доп. G — комментарии и приоритеты (в оригинале credits). Назначение и содержание дополнений ясно из их названий.

Сказанное выше представляет собой результат попытки дать представление о книге и ее достоинствах. Вместе с тем, имея в виду российского читателя, мы упомянули некоторые отечественные учебники, содержащие аналогичный материал и написанные с целями, похожими на те, которые поставили перед собой авторы рецензируемого учебника. Можно констатировать, что авторы отлично справились с поставленными целями. В результате студенты и преподаватели получили в свое распоряжение новый замечательный учебник.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А. Теория вероятностей. Москва: Наука, 1986.
1. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. 6-е издание. Москва: Наука, 1988.
1. Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. Москва: Наука, 1987.
1. Ширяев А. Н. Вероятность. 2-е издание. Москва: Наука, 1989.

17.VII.1997 г.

В. М. Круглов